RELATIVISTIC COVARIANCE

Lorentz transformations

Relatività speciale basata su due postulati:

1. Leggi fisiche uguali in due sistemi di riferimento inerziali;
2. Velocità della luce $= c$ in tutti tali sistemi

Due frame K e K', con velocità relat. v lungo asse x.
Origini coincidono a $t=0$ (FIG. 4.1 R-L)
Impulso luminoso emesso all'origine a $t=0$
$\Rightarrow$ ciascun osservatore vede una sfera che si espande centrata nella sua origine
Eqs. of the expanding spheres nei 2 frame:

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0 \quad ; \quad x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0$$

$t \neq t'$ al contrario della fisica Newtoniana. Le relaz. tra (x,y,z,t) e (x',y',z',t') si deducono facilmente introducendo anche i postulati di omogeneità e isotropia spaziali $\Rightarrow$ Trasformaz. di Lorentz:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x-vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t-\dfrac{v}{c^2}x\right) \end{cases} \qquad \gamma = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

Le trasformaz. inverse sono:

$$x=\gamma(x'+vt') \quad y=y' \quad z=z' \;;\; t=\gamma\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right)$$

Uguali alle precedenti, scambiando primate e non primate e $v \to -v$

Contraz. della lunghezza:

Righello di lunghezza $L_0 = x_2' - x_1'$ misurata in K' (in quiete in K')

Lunghezza in K: $L = x_2 - x_1$, con x_2 e x_1 posizioni degli estremi allo stesso tempo t in K

$\Rightarrow \quad L_0 = x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma L$

$\Rightarrow$ Il righello in K apparirà più corto di γ^{-1}

Dilataz. dei tempi:

Orologio in quiete in K' che misura intervallo di tempo $T_0 = t_2' - t_1'$

Intervallo di tempo misurato in K: in K' il device resta sempre in $x' = 0$

$\Rightarrow \quad T_2 = t_2 - t_1 = \gamma(t_2' - t_1') = \gamma T_0$

Intervallo in K dilatato del fattore γ

Trasformazioni delle velocità

Sia $\vec{u}'$ misurata in K'. Qual è la vel. misurata in K? (FIG. 4.2 R-L)

Lorentz transf. per le quantità differenziali:

$$dx = \gamma(dx' + v\,dt') \quad ; \quad dy = dy' \quad ; \quad dz = dz'$$

$$dt = \gamma\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right)$$

Per le componenti della velocità si avrà?

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + v\,dt')}{\gamma(dt' + v\,dx'/c^2)} = \frac{u'_x + v}{1 + v u'_x/c^2}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{u'_y}{\gamma(1 + v u'_x/c^2)} \quad ; \quad u_z = \frac{u'_z}{\gamma(1 + v u'_x/c^2)}$$

Si possono generalizzare per v non necessariamente lungo l'asse x; usando le componenti di $\vec{u}$ parallela ($u_{\parallel}$) e ortogonale ($u_{\perp}$) a $\vec{v}$

$$u_{\parallel} = \frac{u'_{\parallel} + v}{(1 + v u'_{\parallel}/c^2)} \quad , \quad u_{\perp} = \frac{u'_{\perp}}{\gamma(1 + v u'_{\parallel}/c^2)}$$

Le direzioni della velocità in K e K' sono collegate dalla "relazione di aberrazione":

$$\tan\theta = \frac{u_{\perp}}{u_{\parallel}} = \frac{u' \sin\theta'}{\gamma(u'\cos\theta' + v)} \quad ; \quad u' = |\vec{u}'|$$

L'angolo azimutale φ rimane invariato.

<u>Caso $u' = c$</u> :

$$\left.\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{\sin\theta'}{\gamma(\cos\theta' + v/c)} \\ \cos\theta &= \frac{\cos\theta' + v/c}{1 + (v/c)\cos\theta'} \end{aligned}\right\} \text{aberraz. della luce}$$

Se $\theta' = \pi/2 \to$ fotone emesso ortogonal. a $\vec{v}$ in K'

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{c}{\gamma v} \quad ; \quad \sin\theta = \frac{1}{\gamma}$$

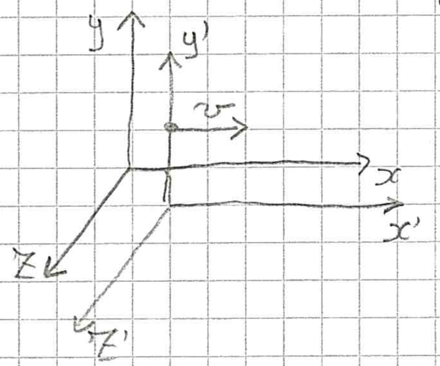
<u>FIG. 4.3 R-L</u>

Per $\gamma \gg 1 \Rightarrow \theta$ piccolo $\theta \sim \gamma^{-1}$

$\Rightarrow$ Fotoni in K vicini concentrati entro $\theta < 1/\gamma \Rightarrow$ beaming

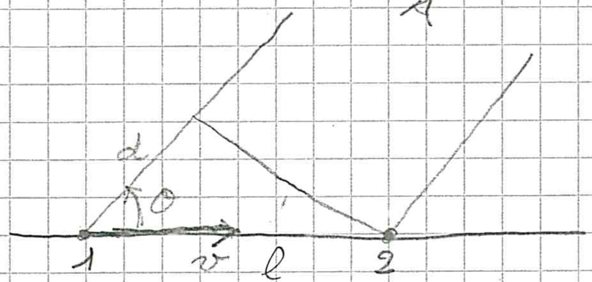
Effetto Doppler relativistico

Siano K e K' due sistemi di riferimento aventi velocità relativa v lungo l'asse x:



Ogni fenomeno periodico nel frame K' avrà un periodo più lungo osservato in K a causa della dilatazione dei tempi di un fattore $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$

Se misuriamo i tempi di arrivo degli impulsi che si propagano con la velocità della luce, ci sarà un effetto aggiuntivo sul periodo osservato dovuto ai tempi di ritardo per la propagazione della luce.
L'effetto congiunto è detto effetto Doppler.
Nel frame K la sorgente in moto emette un periodo di radiazione mentre si muove da 1 a 2 (FIG. 4.4 R-L)



ω': frequenza della radiaz. nel riferimento della sorgente
$\Rightarrow$ Il tempo per muoversi da 1 a 2 nel frame dell'osservatore è

$$\Delta t = \frac{2\pi\gamma}{\omega'}$$: dilatazione dei tempi.

Siccome $l = v\Delta t$; $d = v\Delta t \cos\theta$

Δt_A: differenza nei tempi di arrivo in 1 e in 2

$\Delta t_A = \Delta t -$ (tempo impiegato dalla rad. per propagarsi di d)

$$\Rightarrow \Delta t_1 = \Delta t - \frac{d}{c} = \Delta t\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)$$

$\Rightarrow$ la frequenza osservata è

$$\omega = \frac{2\pi}{\Delta t_1} = \frac{\omega'}{\gamma\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)}$$ $\rightarrow$ Eff. Doppler relativistico

γ^{-1}: effetto relativistico

$1-(v/c)\cos\theta$: fattore classico

$$\Rightarrow \omega' = \omega\gamma\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)$$

Il cui inverso è: $\omega = \omega'\cancel{\gamma\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)} = \omega'\gamma\left(1+\frac{v}{c}\cos\theta'\right)$

dove θ' è l'angolo tra direzione del moto e direzione verso l'osservatore, come visto nel riferimento K'

$$\left.\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{\sin\theta'}{\gamma(\cos\theta'+v/c)} \\ \cos\theta &= \frac{\cos\theta'+v/c}{1+(v/c)\cos\theta'} \end{aligned}\right\} \text{aberrazione della luce}$$

Se si fissa $\theta'=\pi/2$ (fotone emesso in direz $\perp \vec{v}$ in K')

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{c}{\gamma v}\ ;\ \sin\theta = \frac{1}{\gamma}$$

Per veloc relativistiche ($\gamma \gg 1$), θ diventa piccolo:

$$\theta \sim 1/\gamma \quad (*)$$

Se fotoni emessi isotropicamente in K' $\Rightarrow$ metà con $\theta'<\pi/2$, metà con $\theta'>\pi/2$ $\Rightarrow$ Per la $(*)$ nel frame K fotoni concentrati nella direz forward entro un cono di semiapert $1/\gamma$.

$\Rightarrow$ EFFETTO DI BEAMING RELATIVISTICO

Emissione da particelle relativistiche

Si usino le trasformazioni relativistiche per calcolare la radiazione emessa da una particella in moto relativistico

Particella con vel. nulla nel rest-frame istantaneo K'; per un certo intervallo di tempo, in presenza di accelerazione, la carica avrà comunque moto non-relativistico:

$\Rightarrow$ si calcola la radiazione emessa usando la formula di dipolo di Larmor.

dW': energia emessa in dt' nel frame K'.

$d\vec{p}' = 0$ per il momento di tale radiazione essendo l'emissione simmetrica rispetto ad ogni direzione ed al suo opposto.

L'energia nel frame K, che si muove con vel. $-v$ rispetto alla carica è:

$$dW = \gamma\, dW'$$ Dalle proprietà di trasformazione del 4-momento.

Inoltre $dt = \gamma dt'$ $\Rightarrow$ la potenza totale emessa in K e K' è

$$P = \frac{dW}{dt} \quad ; \quad P' = \frac{dW'}{dt'} \quad \Rightarrow \quad P = P'$$

$\Rightarrow$ la potenza è un invariante di Lorentz per qualunque emettitore la cui emissione sia simmetrica front-back nel rest frame istantaneo

Si esprima quindi la potenza in forma covariante:

$$P' = \frac{2q^2}{3c^3}|\vec{a}'|^2$$ $\rightarrow$ dalla formula di Larmor

$\rightarrow$ Usiamo i simboli:

$\vec{x}$: quadrivettore

$\bar{x}$: trivettore

È ~~inoltre~~ quindi: $\vec{a}\cdot\vec{U}=0$ (*) & $U^\mu=(c,\vec{0})$ nel rest-frame istantaneo della particella

$\Rightarrow a'_0=0 \Rightarrow |\vec{a}'|^2=a'_\kappa a'^\kappa=a'_0a'^0+a'_\kappa a'^\kappa=a'_\alpha a'^\alpha=\vec{a}\cdot\vec{a}$

$\Rightarrow \quad P=\frac{2q^2}{3c^3}\vec{a}\cdot\vec{a}$ → forma manifestamente covariante in quanto dato in termini di 4-vettori.

È conveniente esprimere P in termini del 3-vettore accelerazione $d^2\vec{x}/dt^2$

Se K' è il rest-frame istantaneo si può dimostrare che:

$a'_\parallel=\gamma^3a_\parallel \quad ; \quad a'_\perp=\gamma^2a_\perp$ → Problema 4.3 del RL

$\Rightarrow \quad P=\frac{2q^2}{3c^3}\vec{a}'\cdot\vec{a}'=\frac{2q^2}{3c^3}\left(a'^2_\parallel+a'^2_\perp\right)=\frac{2q^2}{3c^3}\gamma^4\left(a^2_\perp+\gamma^2a^2_\parallel\right)$

<u>Distribuzione angolare della potenza emessa e ricevuta</u>

(**) Sia dW' emessa nell'angolo solido $d\Omega'=\sin\theta' d\theta' d\varphi'$ attorno alla direzione che fa un angolo θ' con l'asse x'.

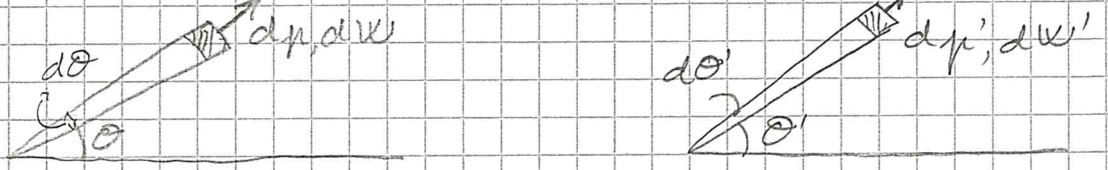


FIG. 4.9 R-L

sia $\mu=\cos\theta \quad ; \quad \mu'=\cos\theta'$

$\Rightarrow \quad d\Omega=d\mu\, d\varphi \quad ; \quad d\Omega'=d\mu'\, d\varphi'$

(*) $\vec{a}\cdot\vec{U}=\frac{dU^\mu}{d\tau}U_\mu=\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\left(U^\mu U_\mu\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}(-c^2)=0$ ⟶

(**) Nel rest-frame istantaneo della carica in movimento.

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

$d\tau$: tempo proprio; è un invariante di Lorentz: rimane invariato per trasform. di Lorentz; misura l'intervallo di tempo tra due eventi che avvengono alla stessa posizione spaziale.

Se la differenza di coordinate si riferisce alla posizione dell'origine di un altro riferimento fisso che si muove con vel v

$$\Rightarrow d\tau = dt\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \Rightarrow$$ è la formula di dilataz. dei tempi

Energia e momento formano un 4-vettore ⇒ la trasformazione dell'energia della radiazione è:

$$\overbrace{dW = \gamma(dW' + v\,dP'_x) = \gamma(1+\beta\mu')dW'}^{\to\ U^{0} = \gamma(U'^{0} + \beta U'^{1})}$$

Dalla relazione di aberrazione si ottiene anche

$$\mu = \frac{\mu' + \beta}{1 + \beta\mu'} \implies d\mu = \frac{d\mu'}{\gamma^2(1+\beta\mu')^2}$$

Essendo $d\varphi = d\varphi'$ $\implies d\Omega = \dfrac{d\Omega'}{\gamma^2(1+\beta\mu')^2}$

$$\implies \frac{dW}{d\Omega} = \gamma^3(1+\beta\mu')^3\frac{dW'}{d\Omega'}$$

Nel frame K' è $\dfrac{dP'}{d\Omega'} = \dfrac{d^2W'}{dt'\,d\Omega'}$

Nel frame K si consideri $dt_A = \gamma(1-\beta\mu)dt'$ → intervallo di tempo della radiazione, come ricevuta da un osservatore in quiete in K. Il fattore $(1-\beta\mu)$ tiene conto dell'effetto di ritardo dovuto al moto della sorgente.

Quindi la potenza ricevuta, P_r, nel frame K è

$$\frac{dP_r}{d\Omega} = \gamma^4(1+\beta\mu')^4\frac{dP'}{d\Omega'} = \frac{1}{\gamma^4(1-\beta\mu)^4}\frac{dP'}{d\Omega'} \longrightarrow$$

Se la radiazione è emessa isotropicamente in K', allora la distribuzione angolare in K sarà fortemente piccata nella direzione del moto della carica per velocità relativistiche ($\beta \sim 1$):

$\mu = \cos\theta \simeq 1 - \theta^2/2$

$$\rightarrow \frac{dP_r}{d\Omega} = \frac{dW}{dt_r\, d\Omega} = \gamma^3 (1+\beta\mu')^3 \frac{dW'}{d\Omega'\, dt'} \frac{dt'}{dt_r}$$

$$\frac{dt'}{dt_r} = \gamma^{-1} \frac{1}{1-\beta\mu}$$

$$\cancel{\mu} = \frac{dP_r}{d\Omega} = \frac{dP'}{d\Omega'} \gamma^2 \frac{(1+\beta\mu')^3}{(1-\beta\mu)} = \frac{dP'}{d\Omega'} \gamma^4 (1+\beta\mu')^4$$

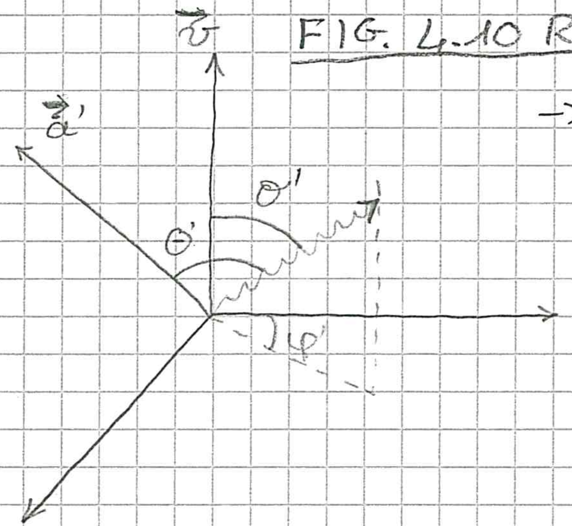
$$\beta = \left(1-\gamma^{-2}\right)^{1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\gamma^4(1-\beta\mu)^4} \simeq \left(\frac{2\gamma}{1+\gamma^2\theta^2}\right)^4$$ → fortemente piccato in $\theta = 0$, su un'apertura angolare $\sim 1/\gamma$

Applichiamo ora queste formule al caso di una particella che emette.
Nel frame K' sarà

$$\frac{dP'}{d\Omega'} = \frac{q^2 a'^2}{4\pi c^3} \sin^2\Theta' \; ;$$ Θ': angolo compreso tra l'accelerazione e la direzione di emissione.

FIG. 4.10 R-L



→ Geometria per emissione da dipolo da una particella istantaneamente in quiete.

Scrivendo $\bar{a}' = \bar{a}'_{\parallel} + \bar{a}'_{\perp}$ per il 3-vettore accelerazione
ed usando $a'_{\parallel} = \gamma^3 a_{\parallel}$; $a'_{\perp} = \gamma^2 a_{\perp}$

$$\Rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{\left(\gamma^2 a_{\parallel}^2 + a_{\perp}^2\right)}{(1-\beta\mu)^4} \sin^2\Theta'$$

Si deve ora collegare Θ' agli angoli nel sistema K.

1. Accelerazione $\parallel$ velocità $\Rightarrow \Theta' = \theta'$

$$\Rightarrow \sin^2\Theta' = \frac{\sin^2\theta}{\gamma^2(1-\beta\mu)^2}$$

Essendo $a_{\perp} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dP_{\parallel}}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3} a_{\parallel}^2 \frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\mu)^6}$

2. Accelerazione ⊥ velocità: $\cos\Theta' = \sin\Theta' \cos\varphi'$

$$\Rightarrow \sin^2\Theta' = 1 - \frac{\sin^2\Theta \cos^2\varphi}{\gamma^2(1-\beta\mu)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dP_\perp}{d\Omega} = \frac{q^2 a_\perp^2}{4\pi c^3} \frac{1}{(1-\beta\mu)^4} \left[1 - \frac{\sin^2\Theta \cos^2\varphi}{\gamma^2(1-\beta\mu)^2}\right]$$

3. Limite fortemente relativistico.

$\gamma \gg 1 \Rightarrow (1-\beta\mu)$ diventa piccolo per $\mu = 1$ (direz. forward) $\Rightarrow$ radiazione fortemente piccata

$$(1-\beta\mu) \simeq \frac{1+\gamma^2\Theta^2}{2\gamma^2}$$

Nel caso di acceleraz parallela la radiaz. ricevuta è

$$\frac{dP_\parallel}{d\Omega} \simeq \frac{16 q^2 a_\parallel^2}{\pi c^3} \gamma^{10} \frac{\gamma^2\Theta^2}{(1+\gamma^2\Theta^2)^6}$$

Per accelerazione perpendicolare:

$$\frac{dP_\perp}{d\Omega} \simeq \frac{4 q^2 a_\perp^2}{\pi c^3} \gamma^8 \frac{1 - 2\gamma^2\Theta^2\cos 2\varphi + \gamma^4\Theta^4}{(1+\gamma^2\Theta^2)^6}$$

Entrambi dipendono da Θ attraverso la combinazione $\gamma\Theta$ $\Rightarrow$ l'ampiezza angolare del picco di radiazione è $\Theta \sim 1/\gamma$.

FIG. 4.11 R-L