

## RAIAZIONE DI SINCROTRONE

Nella anche bremsstrahlung magnetico: emessa da elettroni relativistici in un campo magnetico.

Il ciclotrone è il caso non-relativistico

Calcoli dettagliati brappo complessi

⇒ analisi qualitativa delle caratteristiche spettrali

### Il moto delle cariche

Si assume  $E=0 \Rightarrow$  la Forza di Lorentz  $\vec{e}$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B} \quad ; \quad \vec{p} = \frac{m_e \vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma m_e \vec{v} \quad ; \quad \frac{d}{dt}(\gamma m_e c^2) = q \vec{v} \cdot \vec{E} = 0$$

quest'ultima eq. implica  $\gamma = \text{const}$  o, equivalentemente,  $|\vec{v}| = \text{const}$ .

$$\Rightarrow \gamma = \text{const} \Rightarrow m \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B}$$

Il vettore velocità dell'elettrone si scompone in  $\vec{v}_{\parallel}$ , parallelo al campo  $\vec{B}$ , e  $\vec{v}_{\perp}$  nel piano ortogonale a  $\vec{B}$ :

$$\vec{v}_{\parallel} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{B}}{B} \vec{B}$$

$$v_{\parallel} = |\vec{v}| \cos \alpha$$

$$\alpha = \angle(\vec{v}, \vec{B})$$

$$v_{\perp} = |\vec{v}| \sin \alpha$$

Non essendoci alcuna accelerazione  $\parallel \vec{B} \Rightarrow$  solo  $\vec{v}_{\perp}$  ci interessa

$$\Rightarrow \text{moto circolare: } \frac{d\vec{v}_{\parallel}}{dt} = 0 \quad ; \quad \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = \frac{e}{\gamma m_e c} \vec{v}_{\perp} \times \vec{B}$$

$$m_e a_{\perp} = \frac{m_e v_{\perp}^2}{R} = \frac{e}{\gamma c} v_{\perp} B$$

↳ Moto elicoidale

$$\frac{v_{\perp}}{R} = \frac{eB}{\gamma m_e c} = \frac{\omega_L}{\gamma} = \omega_B \quad ; \quad \omega_L = \frac{eB}{m_e c} = 2\pi \nu_L : \text{freq. di Larmor}$$

detta anche frequenza di ciclotrone.



$$\omega_L = 2.8 \left( \frac{B}{1G} \right) \text{ MHz}$$

Il raggio dell'orbita, raggio di Larmor, è dato da

$$R = \frac{\gamma v_{\perp}}{\omega_L} \approx 10^7 \left( \frac{E}{\text{GeV}} \right) \left( \frac{B}{1G} \right)^{-1} \text{ cm}$$

Valori tipici sono

$$B = 1 \mu\text{G}; E = 10 \text{ GeV} \Rightarrow R = 10^{11} \text{ cm} \approx (7 \text{ UA})$$



Valori piccoli per scale cosmologiche

⇒ è possibile forze magnetoidrodinamica (MHD).

### Energia emessa

Radiazione da elettrone accelerato:

$$P_{\text{em}} = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^4 (a_{\perp}^2 + \gamma^2 a_{\parallel}^2) \quad a: \text{accelerazione}$$

→ Si deriva facendo la trasformazione di Lorentz della formula classica della radiaz. di dipolo:  $P = 2e^2 a^2 / 3c^3$

In caso di moto elicoidale,  $a_{\perp} = \omega_B v_{\perp}$ , mentre  $a_{\parallel} = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_{\text{em}} &= \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^4 \frac{v_{\perp}^2 e^2 B^2}{\gamma^2 m_e^2 c^2} \\ &= 2 \beta_{\perp}^2 \gamma^2 c \cdot \sigma_T \cdot U_B \cdot \sin^2 \alpha \quad \alpha \quad P = \frac{2}{3} \pi^2 c \beta_{\perp}^2 \gamma^2 B^2; \beta_{\perp} = \frac{v_{\perp}}{c} \end{aligned}$$

$U_B = \frac{B^2}{8\pi}$ : densità d'energia del campo  $\vec{B}$

$\sigma_T = \frac{8\pi e^4}{3m_e^2 c^4}$ : sez. d'area Thomson

$$\alpha = \angle(\vec{v}, \vec{B})$$



La presenza di  $\sigma_T$  è un effetto di elettrodinamica quantistica: la radiaz di sincrotrone si può derivare nel sistema di riferimento dell'elettrone come interazione di  $e$  con un fotone virtuale del campo magnetico (scattering Compton virtuale).

Per l'energia totale emessa  $\Rightarrow$  integrale sui tutti gli elettroni.

Distribuzione in velocità isotropa:

$$\langle \sin^2 \alpha \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \sin^2 \alpha d\Omega = 2/3$$

$$\Rightarrow \langle P_{em} \rangle = \frac{4}{3} \beta^2 \gamma^2 c \sigma_T U_B \quad \text{or} \quad \langle P_{em} \rangle = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \pi^2 c \beta^2 \gamma^2 B^2$$

$$\sim 1.6 \times 10^{-2} \left(\frac{B^2}{8\pi}\right) \left(\frac{E}{m_e c^2}\right)^2 \text{ eV s}^{-1} \quad \text{per } \beta \rightarrow 1.$$

Note:  $E = \gamma m_e c^2 \Rightarrow P \propto E^2 U_B$

$P_{em} \propto \sigma_T \propto m_e^{-2} \Rightarrow$  la radiaz. di sincrotrone da ioni è trascurabile rispetto a quella da elettroni

Il tempo di vita di una particella di energia  $E$  è

$$t_{1/2} = E/P \propto (B^2 E)^{-1} = 16.4 \mu\text{s} / B^2 \gamma$$

## Spettro da sincrotrone

È correlato alla variazione di  $\vec{E}(t)$  quale vista da un osservatore.

Effetto di beaming  $\Rightarrow$  radiaz. emessa appare concentrata in una stretta range di direzioni intorno al vettore  $\vec{v}$ .  $\vec{v}$  e  $\vec{a}$  ortogonali  $\Rightarrow$  Fig. 4.11d di RL

L'osservatore vede un impulso di radiaz. in un intervallo  $\Delta t$  minore del periodo di girazione  $1/\omega_B$

$\Rightarrow$  Spettro su un range di  $\omega$  più largo di  $\omega_B/2\pi$ .

## Fig. 6.2 di RL

Cono di emissione di larghezza  $\sim 1/\gamma$ .

$a$ : raggio dell'orbita

$\Delta s$ : distanza lungo il percorso dal quale la radiaz. emessa è vista dall'osservatore

$$\Rightarrow a = \Delta s / \Delta \theta$$

Raggio  $a$  ottenibile dall'eq. del moto:

$$\gamma m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}$$

$$|\Delta \vec{v}| = v \Delta \theta; \Delta s = v \Delta t \Rightarrow \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{q B \sin \alpha}{\gamma m c v} \Rightarrow a = \frac{v}{\omega_B \sin \alpha}$$

$a$  differisce di  $\sin \alpha$  rispetto al raggio del cerchio del moto proiettato sul piano  $\perp$  a  $\vec{B}$ .

$$\Rightarrow \Delta s \approx \frac{2v}{\gamma \omega_B \sin \alpha} \text{ essendo } \Delta \theta \approx \frac{2}{\gamma}$$

$t_1, t_2$ : istanti in cui  $q$  passa per 1 e per 2:  $\Delta s = v(t_2 - t_1)$

$$\Rightarrow (t_2 - t_1) = \frac{2}{\gamma \omega_B \sin \alpha}$$

$t_1^A$  e  $t_2^A$ : istanti di arrivo del segnale emesso da 1 e da 2

$$\Delta t^A = t_2^A - t_1^A = \frac{2}{\gamma \omega_B \sin \alpha} \left(1 - \frac{v}{c}\right) \quad \left. \vphantom{\Delta t^A} \right\} \text{Stesso fattore che entra nell'effetto Doppler}$$

$$\gamma \gg 1 \Rightarrow 1 - \frac{v}{c} \approx \frac{1}{2\gamma^2} \Rightarrow \Delta t_A \approx (\gamma^3 \omega_B \sin \alpha)^{-1}$$

$\Rightarrow$  Durata dell'impulso più breve di  $\gamma^3$  rispetto al periodo di giroamento (Fig. 6.3 RL)

$\Rightarrow$  Spettro piuttosto largo con cut-off a frequenza  $\sim 1/\Delta t_A$

Def. di frequenza critica:  $\omega_c \equiv \frac{3}{2} \gamma^3 \omega_B \sin \alpha$  o  $\nu_c \equiv \frac{3}{4\pi} \gamma^3 \omega_B \sin \alpha$

$\Rightarrow$  Spettro si estende fino a  $\omega_c$ .

Ci descriviamo in forma generale su tale spettro

$\vec{E}$  sarà funzione di  $t$  attraverso  $\gamma \theta$  (per il beaming)

$\Rightarrow \vec{E}(t) \propto F(\gamma \theta)$ ;  $t$ : tempo nell'observer frame

$t=0$  e  $s=0$  quando l'impulso è centrato sull'osservatore

$\theta \approx s/a$ ,  $t \approx (s/v)(1 - v/c) \Rightarrow$  relazione tra  $\theta$  e  $t$ :

$$\gamma \theta \approx 2\gamma (\gamma^2 \omega_B \sin \alpha) t \equiv \omega_c t$$

$$\Rightarrow E(t) \propto g(\omega_c t)$$

$\Rightarrow$  Andamento dello spettro:

$$\hat{E}(\omega) \propto \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega_c t) e^{i\omega t} dt \quad \left(\tau = \omega_c t\right) \propto \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) e^{i \frac{\omega}{\omega_c} \tau} d\tau$$

Spettro:  $\frac{dW}{d\omega d\Omega} \propto |\hat{E}(\omega)|^2 \rightarrow$  Integro su  $d\Omega$  e divido per periodo orbitale:

$$\frac{dW}{dt d\omega} = \frac{1}{T} \frac{dW}{d\omega} \equiv P(\omega) = C_1 F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right); \quad F: \text{dimensionless fctn}$$



Si calcoli  $C_1$  confrontando la potenza totale attenuata integrando lo spettro su  $\omega$  col risultato precedente

$$P = \frac{2q^4 B^2 \gamma^2 \beta^2 \sin^2 \alpha}{3m^2 c^3} \quad (*)$$

Sarà:  $P = \int_0^\infty P(\omega) d\omega = C_1 \int_0^\infty F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) d\omega = \omega_c C_1 \int_0^\infty F(x) dx$

Essendo  $\omega_c = \frac{2\gamma^2 q B \sin \alpha}{2mc}$

Per caso relativ. ( $\beta \approx 1$ ) la potenza per unità di frequenza emessa da ogni elettrone è:

$$P(\omega) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{q^3 B \sin \alpha}{mc^2} F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

Convenzione per la costante adimensionale.

Indice spettrale per distrib. di elettroni "power-law"

In  $P(\omega)$  il fattore  $\gamma$  appare solo attraverso  $\omega_c$

Se spettro approssima power-law in un range di  $\omega$ :

$$P(\omega) d\omega \propto \omega^{-\lambda}; \quad \lambda: \text{indice spettrale}$$

B.g. Rayleigh-Jeans part del BB:  $\lambda = -2$

Spesso la funz. di distrib. di elettroni relativistici si descrive con una power-law:

$$N(E) dE = C E^{-\Gamma} dE; \quad E_1 < E < E_2$$

$$N(\gamma) d\gamma = C \gamma^{-\Gamma} d\gamma; \quad \gamma_1 < \gamma < \gamma_2$$

La potenza totale per unità di volume e di freq. da tale distribuzione:

$$P_{\text{tot}}(\omega) = C \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} P(\omega) \gamma^{-\Gamma} d\gamma \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \gamma^{-\Gamma} d\gamma$$

$\gamma \rightarrow x \equiv \omega/\omega_c$ , ed essendo  $\omega_c \propto \gamma^2$

$$P_{\text{tot}}(\omega) \propto \omega^{-\frac{(p-1)}{2}} \int_{x_1}^{x_2} F(x) x^{\frac{(p-3)}{2}} dx$$

$(x_1, x_2)$  corrispondano a  $(\gamma_1, \gamma_2)$  e dipendono da  $\omega$ .

Se energy limits ampi, si può appross:  $x_1 \approx 0, x_2 \approx \infty \Rightarrow$  l'integr. è indipendente da  $\omega$ :

$$P_{\text{tot}}(\omega) \propto \omega^{-\frac{p-1}{2}} \Rightarrow \Delta = \frac{p-1}{2}$$

### Distinzione tra potenza emessa e ricevuta

Impulsi ricevuti non alla freq.  $\omega_B$ , ma a quella Doppler-shifted (Fig. 6.11 di RL)

$$T = \frac{2\pi}{\omega_B} \rightarrow \text{Periodo orbitale del moto proiettato sul piano} \perp \text{ a } \vec{B}$$

Effetto di time-delay sul periodo per l'arrivo degli impulsi:

$$T_A = T \left( 1 - \frac{v_{\parallel}}{c} \cos \alpha \right) = T \left( 1 - \frac{v}{c} \cos^2 \alpha \right) \stackrel{\beta \approx 1}{\approx} \frac{2\pi}{\omega_B} \sin^2 \alpha$$

La frequenza fondamentale osservata è  $\omega_B / \sin^2 \alpha$ .

$\Rightarrow$  due modifiche rispetto alla teoria precedente:

1. Spazialità delle armoniche =  $\omega_B / \sin^2 \alpha$ , anziché  $\omega_B$

Nel derivare la larghezza dell'impulso  $\Delta t_A$  abbiamo incluso Doppler effect  $\Rightarrow$  la radiaz. del continuo avrà ancora spettro  $\propto F(\omega/\omega_c)$

2. Potenza emessa dividendo energia per il periodo di giro  $T$ . Potenza ricevuta dividendo per  $T_A$

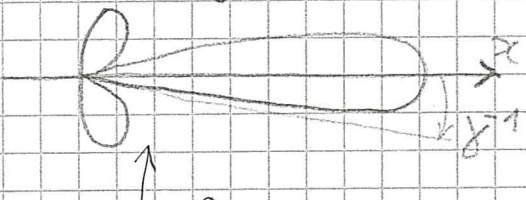
$$\Rightarrow P_r = \frac{P_e}{\sin^2 \alpha}$$



## Spettro da singola elettrone

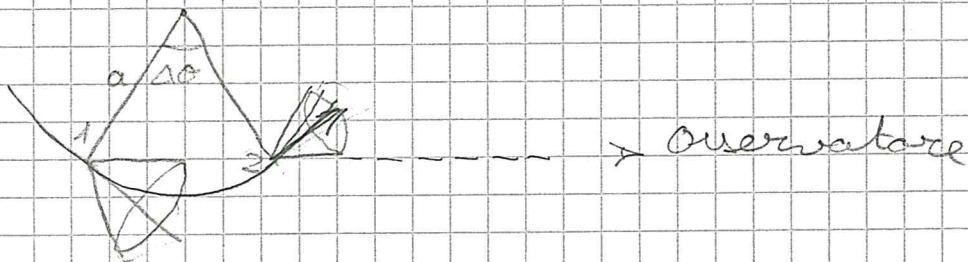
Nel frame dell'elettrone la radiazione emessa ha la caratteristica di dipolo.

Facendo la trasformaz. di Lorentz per passare al frame del laboratorio si ha l'effetto del Doppler beaming:



$$\Delta\theta \sim \gamma^{-1} \rightarrow \text{per l'angolo di apertura totale}$$

distribuzione angolare della radiazione emessa da carica con accelerazione ortogonale alla velocità: emissione focalizzata in direzione della velocità, con angolo di apertura  $\Delta\theta \sim \gamma^{-1}$



Nell'elettron frame, il beam è visibile all'osservatore durante il tempo

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega_B} = \frac{m_e c \gamma^2}{e B} \frac{\omega}{\omega_L}$$

Tuttavia, l'effetto Doppler accorcia la durata dell'impulso. Quindi, nel sistema di riferimento del laboratorio è

$$\Rightarrow \tau = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \Delta t = (1 - \beta) \Delta t$$



Per  $\gamma \gg 1$ , cioè  $\beta \approx 1$

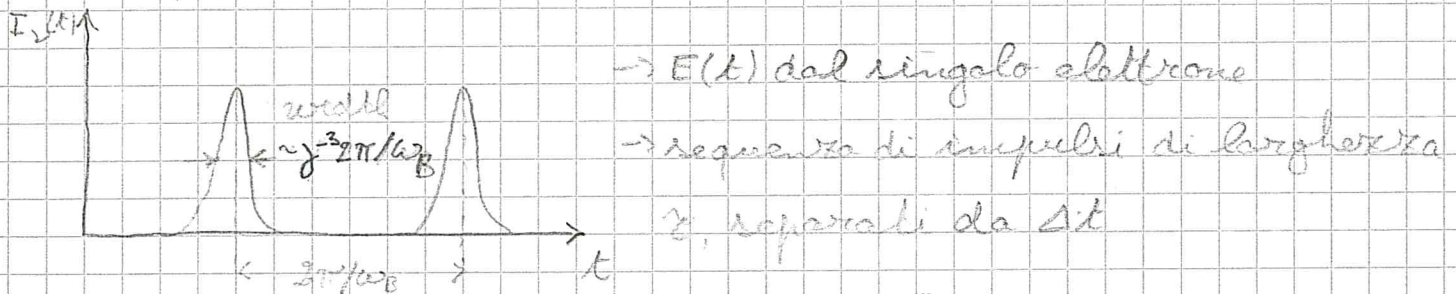
$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} = (1+\beta)(1-\beta) \approx 2(1-\beta)$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \Delta t = \frac{1}{\gamma^2 \omega_L} = \frac{1}{\gamma^3 \omega_B}$$

Diunque, la frequenza caratteristica della radiazione è data da:

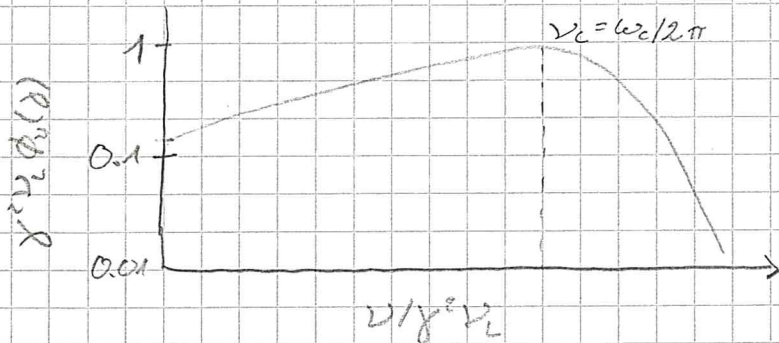
$$\omega_c = \gamma^2 \omega_L = \frac{eB}{m_e c} \left( \frac{E}{m_e c^2} \right)^2$$

Il campo risultante



Lo spettro si deriva dalla  $\mathcal{F}\{E(t)\}$

$\tau$  piccolo  $\Rightarrow$  ampio intervallo di frequenze  $\nu$  rilevante



La frequenza caratteristica è

$$\nu_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = 630 \left( \frac{B}{10^{11} \text{G}} \right) \left( \frac{E/m_e c^2}{10^3} \right)^2 \text{ MHz}$$

La luce ottica ha  $\nu_c \sim 10^{14} \text{ MHz}$



$\frac{P_{\text{Compt}}}{P_{\text{Synch}}} = \frac{U_{\text{rad}}}{U_B}$  → Conseguenza del fatto che in GED il processo di sincronizzazione è interpretato come scatte ring Compton su un fotone virtuale del campo B.

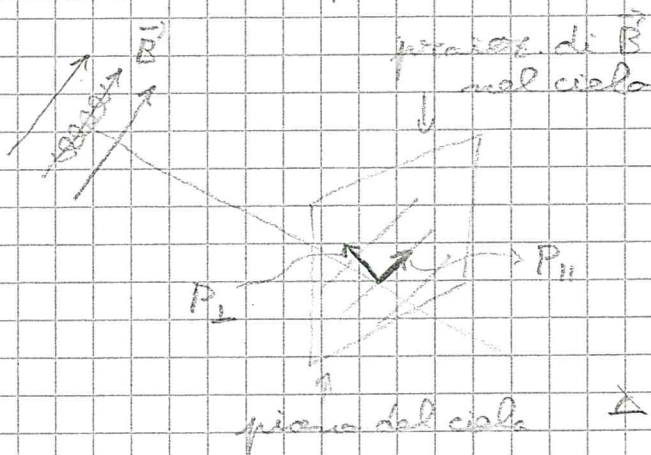
Se  $U_{\text{rad}} > U_B \Rightarrow P_{\text{Compt}} > P_{\text{Synch}} \Rightarrow$  il campo di radiaz dei fotoni di sincronizzazione subirà una notevole amplificazione  
 $\Rightarrow$  cooling molto efficiente degli elettroni per Compton in verso: catastrofe Compton

### Riassunto:

1. Moto degli elettroni in un campo  $\vec{B}$
2. Radiazione caratteristica da moto relativistico
3. Effetto Doppler sul campo di radiaz. emessa
4. Integrazione sulla  $\gamma$ -distribuzione degli elettroni

Tutto ciò facendo diverse approssimazioni. Si danno ora i risultati esatti, senza approssimazioni, e senza derivare.

### Potenza emessa per le due direz. di polarizzazione



$$\frac{P_{\perp}}{P_{\parallel}} = \frac{7^3}{2} \frac{e^3 B}{mc^3} \left( \frac{F(\nu/\nu_c) - G(\nu/\nu_c)}{F(\nu/\nu_c) + G(\nu/\nu_c)} \right)$$

$$F(x) = x \int_x^{\infty} K_{5/3}(y) dy$$

$$G(x) = x K_{2/3}(x)$$

$K_n \rightarrow$  funzioni di Bessel mod. i-esima ord.

→ La polarizzaz permette di misurare anche la direz. del campo magnetico.



## Lo spettro totale

$$P(\nu) = P_{\perp}(\nu) + P_{\parallel}(\nu) \propto F(\nu)$$

Come in precedenza, lo spettro totale emesso si trova integrando sulla distrib. in energia degli elettroni. Nel caso di legge di potenza

$$\begin{pmatrix} P_{\parallel} \\ P_{\perp} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} m_0 \frac{e^3 B}{m_0 c^2} \begin{pmatrix} J_F - J_G \\ J_F + J_G \end{pmatrix} \left( \frac{2\nu}{3Z} \right)^{-\frac{p-1}{2}}$$

$$J_F = \frac{2^{p+1/2}}{p+1} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{p}{4} - \frac{19}{12}\right)$$

$$J_G = 2^{\frac{p+3}{2}} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{7}{12}\right) \Gamma\left(\frac{p}{4} - \frac{1}{12}\right)$$

## Grado di polarizzazione

Definito come

MOSTRARE FIG. DI PAG. 6.21

$$\boxed{\frac{P_{\perp} - P_{\parallel}}{P_{\perp} + P_{\parallel}} = \frac{J_F}{J_G} = \frac{p+1}{p+7/3}}$$

$p=2.5$  tipico di radiogalassie  
 $\Rightarrow$  grado di polarizzazione di  $\approx 70\%$ !

Attenzione: la rotazione di Faraday e disomogeneità di  $\vec{B}$  possono diminuire il grado di polarizzazione.

Rotaz. di Faraday: rotazione del piano di polarizzazione di onde EM durante la propagazione in un plasma magnetizzato.

$$K_{\nu}(Z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{\nu}(Z) - I_{\nu}(Z)}{\sin 2\pi} ; \quad I_{\nu}(Z) = e^{i\frac{\pi\nu}{2}} J_{\nu}(Ze^{i\pi/2}) ; \quad J_{\nu}(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(\nu+k)!} \left(\frac{Z}{2}\right)^{2k+\nu}$$

$$\Gamma(z+1) = z! = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt$$

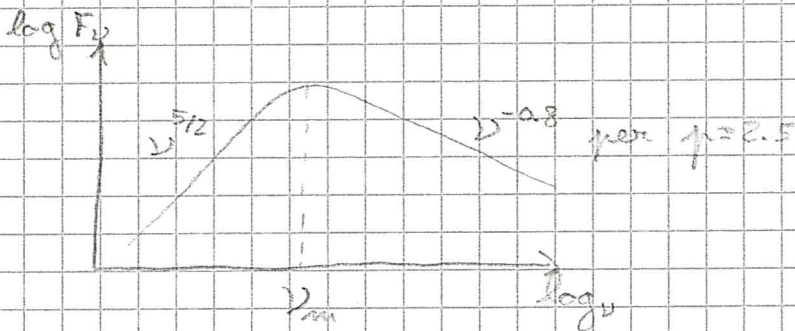
## Autoeccitamento di sincrotrone

Si procede in modo analogo al caso dell'autoeccitamento di *bremsstrahlung*, con risultati simili

Risultato: al di sotto di una frequenza di cut-off gli elettroni sono otticamente spessi alla radiaz. di sincrotrone  
 $\Rightarrow$  Autoeccitamento

Per elettroni distribuiti in energia a legge di potenza:

$\rightarrow$  basse frequenze  $P_{\nu} \propto \nu^{5/2}$  indipendente da  $p$   
alte "  $P_{\nu} \propto \nu^{-1/2}$



La frequenza di bremsstrahlung  $\nu_m$  dipende dal valore di  $B$ .  
Dalla sua misura si può ricavare l'intensità del campo magnetico.

MOSTRARE FIG. DI PAG. 6-25.



Fattore  $\sin^2 \alpha$  veramente da includere?

Dipende dal caso fisico.

Tipica situazione in astrofisica: emissione da una regione delimitata nello spazio con velocità netta rispetto all'osservatore che è moderata.

⇒ particella che si avvicina dopo si allontana

⇒ nel lungo termine num. totale di impulsi emessi e ricevuti uguale

⇒ Potenza totale emessa e ricevuta uguale

⇒ Correzione per il moto elicoidale poco importante nei casi usuali.

### Autoeccitamento da sincrotrone

1. Fotone che interagisce con una carica in un  $\vec{B}$  fisso, ed è assorbito, dando la sua energia alla carica.

2. Emissione stimolata, o autoeccitamento negativo; carica che è indotta ad emettere con più intensità in una direzione o a una frequenza in cui ci sono già più fotoni

→ Processi descrivibili utilizzando i coefficienti di Einstein

→ Generalizzato dal caso di transizioni tra stati discreti a quello tra stati continui

Stati di una particella che emette: stati di particella libera, definiti da momento, posizione ed eventuali gradi interni di libertà.

Da meccanica statistica: uno stato quantico associato ai gradi di libertà traslazionali di una particella entro un volume  $h^3$  dello spazio delle fasi

⇒ Spazio delle fasi classico continuo <sup>viene</sup> discretizzato in volumi  $h^3$  e transizioni tra questi stati come fossero discreti

Energia  $h\nu$  di un fotone: molte transizioni possibili tra stati con energie che differiscono di  $h\nu$ .

$\Rightarrow$  Modifica dell'espressione del coeff. di assorbimento  $\alpha_\nu$ :

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} \left[ n_1 B_{12} \phi(\nu) - n_2 B_{21} \right] \Rightarrow \alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} \sum_{E_1} \sum_{E_2} \left[ n(E_1) B_{12} - n(E_2) B_{21} \right] \phi_{21}(\nu) \quad (*)$$

$\phi_{21}(\nu) \approx \delta$ -function che restringe somme tra stati che differiscono di  $h\nu = E_2 - E_1$

Assumiamo che assorbimento ed emissione isotropi  $\Rightarrow$  per simmetria implica che  $\vec{B}$  sia "tangled" e che la distrib. di particelle sia isotropa.

Si specializza (\*) per emissione di stimolazione

Def:  $P(\nu, E_2) = 2\pi P(\omega)$

In termini dei coeff. di Einstein:

$$P(\nu, E_2) = h\nu \sum_{E_1} A_{21} \phi_{21}(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} h\nu \sum_{E_1} B_{21} \phi_{21}(\nu)$$

dove abbiamo usato una delle relaz. tra EC:

$$A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21}$$

Per i coeff. di assorb. dov'è emissione stimolata:

$$-\frac{h\nu}{4\pi} \sum_{E_1} \sum_{E_2} n(E_2) B_{21} \phi_{21} = -\frac{c^2}{8\pi h\nu^3} \sum_{E_2} n(E_2) P(\nu, E_2)$$

La parte di vero assorbimento è:  $\left[ \begin{array}{l} \text{usando} \\ B_{12} = B_{21} \end{array} \right.$

$$\frac{h\nu}{4\pi} \sum_{E_1} \sum_{E_2} n(E_1) B_{12} \phi_{12} = \frac{c^2}{8\pi h\nu^3} \sum_{E_2} n(E_2 - h\nu) P(\nu, E_2)$$

$$\Rightarrow \alpha_\nu = \frac{c^2}{8\pi h\nu^3} \sum_{E_2} \left[ n(E_2 - h\nu) - n(E_2) \right] P(\nu, E_2)$$

$f(p)$ : funz. di distrib. isotropa degli elettroni

$f(p) d^3p$ : densità in num. di elettroni con momento  $p$  in  $d^3p$



Per meccanica statistica: num. di stati quantici nel volume  $d^3p$  è dato da

$$\frac{\tilde{\omega}}{h^3} d^3p ; \tilde{\omega}: \text{peso statistico intrinseco della particella} \\ = 2 \text{ per spin} = \frac{1}{2} \text{ (elettroni)}$$

$$\Rightarrow \sum_{E_2} \rightarrow \frac{\tilde{\omega}}{h^3} d^3p ; n(E_2) \rightarrow \frac{h^3}{\tilde{\omega}} f(p_2)$$

$$\Rightarrow \alpha_\nu = \frac{c^2}{8\pi h \nu^3} \int d^3p_2 [f(p_2^*) - f(p_2)] P(\nu, E_2)$$

$p_2^*$ : momento corrispondente a energia  $E_2 - h\nu$ .

Si controlla che dia il risultato corretto per distrib. termica di particelle:

$$f(p) = K \exp\left[-\frac{E(p)}{kT}\right]$$

$$\Rightarrow f(p_2^*) - f(p_2) = K \exp\left[-\frac{E_2 - h\nu}{kT}\right] - K \exp\left[-\frac{E_2}{kT}\right] \\ = f(p_2) (e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)$$

Il coeff. di assorbimento sarà:

$$\alpha_\nu^{th} = \frac{c^2}{8\pi h \nu^3} (e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1) \int d^3p_2 f(p_2) P(\nu, E_2)$$

↓  
Potenza totale per unità di volume  
e di range di frequenza  $\nu$   
 $= 4\pi j_\nu$  per emissione isotropa.

Essendo

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu}{c^2} (e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)^{-1} : \text{Planckiana}$$

$$\Rightarrow \alpha_\nu^{th} = \frac{j_\nu}{B_\nu(T)} : \text{legge di Kirchhoff, c.v.s.}$$

$f(p)$  è isotropa  $\Rightarrow$  conveniente usare la distrib. in energia  $N(E)$

Assumiamo caso ultra-relativistico:  $E = pc$

$$\Rightarrow N(E)dE = f(p) 4\pi p^2 dp$$

$$\Rightarrow \alpha_\nu = \frac{c^2}{8\pi h\nu^3} \int dE P(\nu, E) E^2 \left[ \frac{N(E-h\nu)}{(E-h\nu)^2} - \frac{N(E)}{E^2} \right]$$

Assumiamo  $h\nu \ll E$ : assunzione necessaria comunque visto che si usa elettrodinamica classica.

Espandendo al primo ordine in  $h\nu$ :

$$\alpha_\nu = -\frac{c^2}{8\pi\nu^2} \int dE P(\nu, E) E^2 \frac{\partial}{\partial E} \left[ \frac{N(E)}{E^2} \right] \quad (**)$$

Si muova, per distrib. termica:

$$N(E) = K E^{\rho+2} e^{-\frac{E}{kT}}$$

$$\Rightarrow \alpha_\nu^{th} = \frac{c^2}{8\pi\nu^2 kT} \int N(E) P(\nu, E) dE = \frac{j_\nu c^2}{2\nu^2 kT} \quad \left. \begin{array}{l} \text{legge di Kirchhoff} \\ \text{in regime di} \\ \text{Rayleigh-Jeans} \end{array} \right\}$$

$\rightarrow$  non sorprendente, data l'assunzione  $h\nu \ll E$ .

Per distrib. di elettroni a legge di potenza:

$$N(E)dE = C E^{-\rho} dE \Rightarrow -E^2 \frac{d}{dE} \left( \frac{N(E)}{E^2} \right) = C(\rho+2) E^{-(\rho+1)} = \frac{(\rho+2)N(E)}{E}$$

Si noti che lo spettro di sincrotrone è stato dimostrato essere:

$$P(\omega) = \frac{\sqrt{3} q^3 B \sin^2 \alpha}{2\pi m c^2} F(x) ; x = \frac{\omega}{\omega_c} ; \omega_c = \frac{3\gamma^2 q B \sin^2 \alpha}{2mc}$$

$$F(x) \equiv x \int_x^\infty K_{5/3} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) d\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) ; K_{5/3}: \text{funzione di Bessel modificata di ordine } 5/3$$



Inserendo tutto in eq. (\*\*) per  $\alpha_\nu$ , si ottiene:

$$\alpha_\nu = \frac{\sqrt{3} q^3}{8\pi m} \left( \frac{3q}{2\pi m^3 c^5} \right)^{1/2} C (B \sin \alpha)^{\frac{n+2}{2}} \Gamma\left(\frac{3n+2}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3n+22}{12}\right) \nu^{-(n+4)/2}$$

$\Rightarrow$  La funzione sorgente sarà:

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} = \frac{P(\nu)}{4\pi \alpha_\nu} \propto \nu^{5/2}$$

Si noti che l'indice  $-5/2$  (indip. da  $n$ ) non è quello,  $-2$ , del caso Rayleigh-Jeans: non sorprende visto che la funz. di distrib. di  $\epsilon$  è non termica.

Emissione di rinvocazione otticamente sottile: in base al assorbimento la funzione di emissione:  $\nu^{-(n-1)/2}$

Caso otticamente spesso:  $\propto$  alla "source function"  $\propto \nu^{5/2}$

$\Rightarrow$  Low-frequency cut-off dello spettro dovuto ad assorbimento nel regime optically thick.

(vedere Fig. 6.12R-L)