

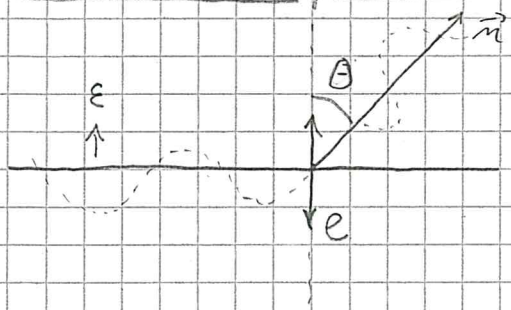
## SCATTERING COMPTON → Da R-L dopo "Dipole appross"

Urto di fotoni con cariche libere. Se  $h\nu \ll mc^2$ , tale scattering si riduce al caso classico dello scattering Thomson. Per fotoni  $x$  e  $\gamma$ , molto energetici, compaiono anche effetti quantistici che si manifestano in 2 modi:

- cinematica del processo di scattering; i fotoni hanno anche un momento  $h\nu/c \rightarrow$  urto elastico tra due particelle, con conservazione di massa-energia e della quantità di moto totale del sistema  $\Rightarrow$  causa la perdita di coerenza dell'urto cioè  $h\nu \neq h\nu'$
- modifica della sezione d'urto totale  $\sigma$  e differenziale  $d\sigma/d\Omega$  rispetto al Thomson  $\rightarrow$  dipendenza dalla  $\nu$  del fotone incidente

Si consideri prima lo scattering Thomson e poi si passi al Compton come suo analogo quantomeccanico

### Radiazione polarizzata



Scattering di radiazione polarizzata da parte di una carica libera:  
 $e$ : carica;  $\vec{E}$ : vettore di  $\vec{E}$

La forza sulla carica è  $\vec{F} = m_e \ddot{\vec{r}} = e \vec{E} \sin \omega t$

vale se la carica oscilla con velocità non-relativistica,  $v \ll c$ , cariche si può trascurare la forza magnetica, essendo  $E = B$  per un'onda elettromagnetica.

Quindi il momento di dipolo  $\vec{d} = e\vec{r}$  sarà:

$$\vec{d} = \frac{eE_0}{m_e} \vec{\epsilon} \sin \omega_0 t \Rightarrow \vec{d} = -\frac{e^2 E_0}{m_e \omega_0^2} \vec{\epsilon} \sin \omega_0 t$$

Usando l'approssimazione di dipolo

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\ddot{d}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta \Rightarrow P = \frac{2\ddot{d}^2}{3c^3}$$

Quindi mediando sul tempo ed usando  $\langle \sin^2 \omega_0 t \rangle = \frac{1}{2}$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^4 E_0^2}{8\pi m_e^2 c^3} \sin^2 \theta \Rightarrow P = \frac{e^4 E_0^2}{3m_e^2 c^3}$$

Si noti che  $\theta$  è l'angolo di scattering, invece che  $\Theta$ . Il motivo sarà chiarito in seguito.

Il flusso di radiazione incidente sull'elettrone è

$$\langle S \rangle = \frac{c}{8\pi} E_0^2$$

La sezione d'urto differenziale  $d\sigma$  per scattering in  $d\Omega$  è definita da

$$\frac{dP}{d\Omega} = \langle S \rangle \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{cE_0^2}{8\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{d\sigma}{d\Omega} \right]_{\text{per } m_e^2 c^4} = \frac{e^4}{m_e^2 c^4} \sin^2 \theta = r_0^2 \sin^2 \theta \rightarrow \text{sezione d'urto Thomson}$$

dove  $r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.82 \times 10^{-13} \text{ cm} \rightarrow$  raggio classico dell'elettrone

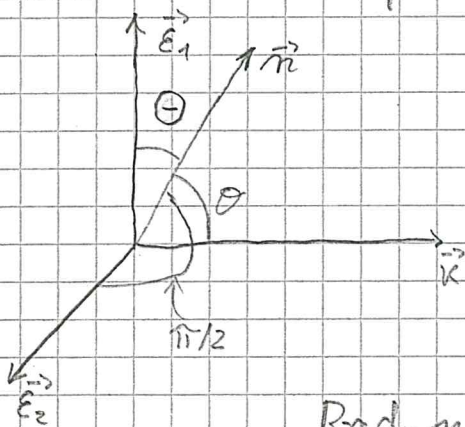
La sezione d'urto totale si ottiene integrando su  $\Omega$  o da

$$P = \langle S \rangle \sigma$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \equiv \sigma_T = 6.652 \times 10^{-25} \text{ cm}^2 \rightarrow \text{Thomson cross section}$$

Si noti che la radiazione scattata è polarizzata linearmente nel piano individuato dal vettore di polarizzazione incidente  $\vec{E}$  e dalla direzione  $\vec{n}$  della scattering.

### Radiazione non polarizzata



$\vec{E}_1, \vec{E}_2 \rightarrow$  direz di polarizzazione

$\vec{k} \rightarrow$  vettore d'onda

Sia  $\vec{E}_1$  nel piano della radiaz incidente e di quella scattata  $\Rightarrow \vec{E}_2 \perp \vec{n}$

Per la radiaz non polarizzata si

ha:

$$\text{Rad. non-pol.} = \sum \text{beam polar } \angle(90^\circ)$$

Quindi lo scattering Compton per radiaz non polarizzata che si propaga lungo  $\vec{k}$  ed è scattata in  $\vec{n}$  si ottiene come media tra due scattering di radiaz polar in direz

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{unpol}} = \frac{1}{2} \left( \left. \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \right|_{\text{pol}} + \left. \frac{d\sigma(\pi/2)}{d\Omega} \right|_{\text{pol}} \right) \text{ che fanno un angolo } \theta \text{ ed uno } \pi/2 \text{ con la direz della radiaz scattata.}$$

$$= \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \sin^2 \theta)$$

Sia  $\theta = \angle(\vec{k}, \vec{n})$ . Si ha allora

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{unpol}} = \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2 \theta) = \frac{3\sigma_T}{16\pi} (1 + \cos^2 \theta)$$

Caricché la sezione d'urto totale è nuovamente  $\sigma = \sigma_T$

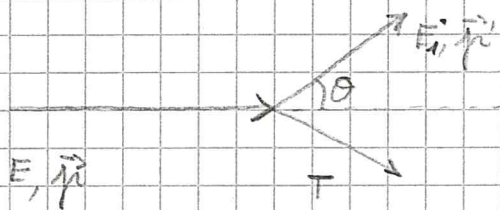
## Cinematica dello scattering

Thomson:  $\lambda_{in} = \lambda_{out} \rightarrow$  scattering coerente

Effetti quantistici danno luogo allo scatt Compton. Tali effetti si manifestano in due modi:

1. cinematica del processo di scattering;
2. variazioni della sezione d'urto.

Si consideri ora il primo punto.



Si usano le maiuscole per i 4-vettori.

Si usi la convenzione  $\vec{P} \cdot \vec{Q} = P_0 Q_0 - P_1 Q_1 - P_2 Q_2 - P_3 Q_3$

Il 4-momento di una particella a massa a riposo non nulla è

$$\vec{Q} = m_0 \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 \gamma c \\ \vec{q} \end{pmatrix}$$

$\vec{v}$ : velocità della particella  
 $\vec{q}$ : momento " " "  
 $\gamma$ : Lorentz factor

$$Q^2 = m_0^2 \gamma^2 c^2 - m_0^2 \gamma^2 v^2 = m_0^2 c^2 \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2 c^2$$

Questo è ovviamente invariante relativistico. In modo analogo il 4-momento di un fotone è

$$P = \frac{E}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{u} \end{pmatrix}$$

$\hat{u} \rightarrow$  versore della direzione del moto del fotone  
Si noti che  $P^2 = 0$  essendo  $m_0 = 0$

Nell'urto fra fotone ed elettrone, indichiamo con gli apici i 4-vettori dopo l'urto:

$$\vec{P} + \vec{Q} = \vec{P}' + \vec{Q}'$$

$$\Rightarrow (\vec{P} + \vec{Q} - \vec{P}')^2 = \vec{Q}'^2$$

Essendo la collisione elastica, la rest-mass dell'elettrone non cambia  $\Rightarrow Q^2 = Q'^2$

Essendo anche  $P^2 = P'^2 = 0$

$$\Rightarrow \vec{P} \cdot \vec{Q} - \vec{P} \cdot \vec{P}' - \vec{Q} \cdot \vec{P}' = 0 \Leftrightarrow \vec{P} \cdot \vec{P}' = \vec{Q} \cdot (\vec{P} - \vec{P}')$$

Nel sistema in cui l'elettrone è inizialmente in quiete si ha:

$$\vec{Q} \cdot (\vec{P} - \vec{P}') = m_e c \left( \frac{E}{c} - \frac{E_1'}{c} \right) = m (E - E_1')$$

$$\vec{P} \cdot \vec{P}' = \frac{E}{c} \frac{E_1'}{c} (1 - \hat{u} \cdot \hat{u}_1') = \frac{E E_1'}{c^2} (1 - \cos \theta); \text{ con } \theta = \angle(\hat{u}, \hat{u}_1')$$

Inserendo nell'eq di sopra e risolvendo per  $E_1'$ , si ottiene infine

$$E_1' = \frac{E}{1 + \frac{E}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}$$

$$\lambda_1' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) = \lambda_c (1 - \cos \theta)$$

dove  $\lambda_c = \frac{h}{m_e c} = 2.426 \times 10^{-10} \text{ cm}$ ; lunghezza d'onda Compton

Mediando su  $\theta$ , per  $E \ll m_e c^2$ , si ha

$$\frac{\Delta E}{E} \approx - \frac{E}{m_e c^2}; \text{ p. es. } \Delta E \approx 0.2 \text{ keV a } 6.4 \text{ keV}$$

In tal caso lo scattering è quasi elastico.

A basse energie la sezione d'urto sarà quella Thomson. Ad alte energie la  $\sigma_T$  non è più valida a causa di correzioni di QED. Tali correzioni portano alla formula di Klein-Nishina per radiazione non polarizzata:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} \left( \frac{E_1'}{E} \right)^2 \left( \frac{E}{E_1} + \frac{E_1}{E} - \sin^2\theta \right) \rightarrow \frac{d\sigma_T}{d\Omega} \text{ per } E_1' \approx E$$

L'effetto di QED è di ridurre la sezione d'urto rispetto al valore classico quando l'energia dei fotoni diventa grande  $\Rightarrow$

Lo scattering Compton diviene meno efficiente ad alte ener.

La sezione d'urto totale si può dimostrare che diviene

$$\sigma = \sigma_T \cdot \frac{3}{4} \left[ \frac{1+x}{x^3} \left( \frac{2x(1+x)}{1+2x} - \ln(1+2x) \right) + \frac{1}{2x} \ln(1+2x) - \frac{1+3x}{(1+2x)^2} \right]$$

dove  $x = h\nu/m_e c^2$

In regime non relativistico ( $x \ll 1$ ):

$$\sigma = \sigma_T \left( 1 - 2x + \frac{26x^2}{5} + \dots \right) ; \quad x \ll 1$$

$$\sigma = \frac{3}{8} \sigma_T x^2 \left( \ln 2x + \frac{1}{2} \right) ; \quad x \gg 1 \rightarrow \text{regime relativistico}$$

### Trasferimento di energia da scattering di elettroni in moto

Si assume  $h\nu \ll m_e c^2$  nel rest-frame dell'elettrone

Se l'elettrone ha alta energia cinetica, l'energia può essere trasferita al fotone, differentemente da quanto dato dall'equaz. classica. Questo effetto si dice

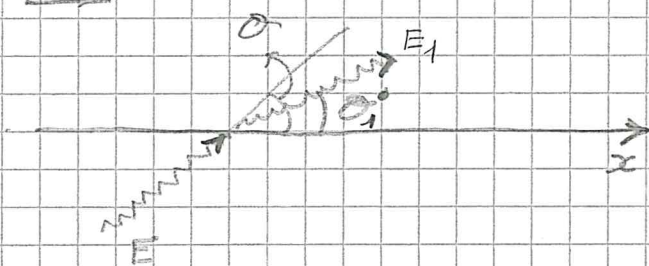
Compton inverso!

$K \rightarrow$  frame dell'acceleratore - del laboratorio

$K' \rightarrow$  rest frame dell'elettrone, nel quale anzitutto si applichi lo scattering Thomson

$K$

$K'$



Dalle formule per l'effetto Doppler:

$$E' = E \gamma (1 - \beta \cos \theta)$$

$$E_1 = E \gamma (1 + \beta \cos \theta_1)$$

Inoltre è anche dalla relazione classica, che vale in  $K'$ :

$$E'_1 = E' \left[ 1 - \frac{E'}{mc^2} (1 - \cos \Theta) \right]$$

$$\cos \Theta = \cos \theta'_1 \cos \theta'_1 + \sin \theta'_1 \sin \theta'_1 \cos(\varphi' - \varphi'_1)$$

$\varphi'_1, \varphi'_1 \rightarrow$  angoli azimutali di fotone incidente e scatterato in frame  $K'$ .

Per elettroni relativistici  $\gamma^2 = 1 \Rightarrow h\nu/mc^2$  le energie del fotone prima dello scattering, in  $K'$ , e dopo lo scattering, hanno rapporti di verso circa come:  $1 : \gamma : \gamma^2$ , essendo che la condizione  $\gamma E \ll mc^2$  per scattering Thomson si possa applicare. Questo segue dalle equazioni per  $E'$  ed  $E'_1$  essendo  $\theta$  e  $\theta'_1$  tipicamente di ordine  $\pi/2$

$\Rightarrow$  Un fotone acquista energia per un fattore  $\gamma^2$   
 Siccome fotoni di energia intermedia,  $\sim 100 \text{ keV}$ , possono ancora essere in regime Thomson, si possono produrre così fotoni di energia enorme

### Potenza da Compton inverso per un solo singolo

Si derivano le formule per la variazione media di energia di una popolazione di fotoni che scattera su una distribuzione isotropa di elettroni. Sia:

$n(p)$ : distrib. nello spazio delle fasi dei fotoni (Lorentz invar.)

$v dE$ : densità di fotoni con energia nell'intervallo  $dE$

$$\Rightarrow v dE = n d^3p$$

$d^3p$  si trasforma con  $dE$  per trasformaz. di Lorentz

$\Rightarrow v dE/E$  è un invariante di Lorentz

$$\frac{v dE}{E} = \frac{v' dE'}{E'}$$

la potenza totale emessa (vici scatterata nel rest-frame dell'elettrone) è

$$\frac{dE_1'}{dt'} = c \sigma_T \int E_1' v' dE' \quad v' dE' \rightarrow \text{densità in num. di fotoni incidenti}$$

Assumiamo che la variazione d'energia nel rest-frame sia piccola,  $E_1' = E'$  (limite Thomson).

la potenza è un invariante di Lorentz, quindi:

$$\frac{dE_1'}{dt'} = \frac{dE_1}{dt}$$



Si ricava così per la potenza emessa:

$$\frac{dE_1}{dt} = c \sigma_T \int E'^2 \frac{dE' v'}{E'} = c \sigma_T \int E'^2 \frac{v dE}{E}$$

Usando l'espressione del Doppler shift:

$$E' = E \gamma (1 - \beta \cos \theta)$$

$$\Rightarrow \frac{dE_1}{dt} = c \sigma_T \gamma^2 \int E^2 (1 - \beta \cos \theta)^2 \frac{v dE}{E}$$

che coinvolge ora sola quantità relative al frame  $K$ .

Per distribuz. isotropa di fotoni:

$$\langle (1 - \beta \cos \theta)^2 \rangle = 1 + \frac{1}{3} \beta^2$$

$$\Rightarrow \frac{dE_1}{dt} = c \sigma_T \gamma^2 \left(1 + \frac{1}{3} \beta^2\right) U_{ph} ; U_{ph} = \int E v dE$$

↓  
densità di en. iniziale dei fotoni

La rate di decrescita della energia totale iniziale dei fotoni è

$$\frac{dE_1}{dt} = -c \sigma_T \int E v dE = -\sigma_T c U_{ph} \rightarrow \text{potenza irradiata sugli elettroni}$$

Quindi, la potenza persa dagli elettroni, e quindi accresciuta dalla radiazione, è

$$\frac{dE_{rad}}{dt} = c \sigma_T U_{ph} \left[ \gamma^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{3}\right) - 1 \right] ;$$

$$\gamma^2 - 1 = \gamma^2 \beta^2 \Rightarrow P_{compt} = \frac{dE_{rad}}{dt} = \frac{4}{3} \sigma_T c \beta^2 \gamma^2 U_{ph}$$

Confrontando con la potenza di rimozionamento:

$$P_{synch} = \frac{4}{3} \sigma_T c \gamma^2 \beta^2 U_B \Rightarrow \frac{P_{rad}}{P_{compt}} = \frac{U_B}{U_{ph}}$$

percentuale di volume  
 La potenza totale della Compton scatta, per un mezzo di elettroni relativistici:

$$P_{\text{tot}} (\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-3}) = \int P_{\text{compt}} N(\gamma) d\gamma$$

P.es.:

$$N(\gamma) = \begin{cases} C \gamma^{-\mu} & ; \gamma_{\text{min}} \leq \gamma \leq \gamma_{\text{max}} \\ 0 & ; \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\text{con } \beta \approx 1 \Rightarrow P_{\text{tot}} (\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-3}) = \frac{4}{3} \sigma_T C U_{\text{ph}} C (3-\mu)^{-1} (\gamma_{\text{max}}^{3-\mu} - \gamma_{\text{min}}^{3-\mu})$$

Potenza totale per distrib. termica di elettroni non-relativistici con densità in numero  $n_e$ .

$$\gamma \approx 1, \langle \beta^2 \rangle = \langle v^2/c^2 \rangle = 3k_B T / mc^2$$

$$P_{\text{tot}} (\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-3}) = \left( \frac{4k_B T}{mc^2} \right) C \sigma_T n_e U_{\text{ph}}$$

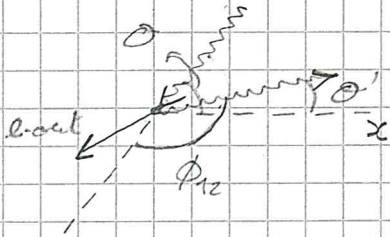
Ma brevemente che il fattore in parentesi è il guadagno medio in energia di un fotone per scattering, per  $E \ll k_B T$

## L'EFFETTO SUNYAEV-ZELDOVICH

Lo scattering Compton inverso da lunga all'effetto

Sunyaev-Zeldovich. Nei lobi di radio-galassie

$\gamma \geq 10^8 \rightarrow$  nel rest frame di tali elettroni, i fotoni del CMB piccano ad energie  $\sim 0.1 m_e c^2$ , quando lo scattering non può essere considerato elastico



$\rightarrow$  geometria dello scattering nel rest-frame dell'elettrone prima dell'urto

Sia  $p(\theta)d\theta$  la probabilità di scattering nell'angolo  $d\theta$  e sia  $\mu = \cos\theta$  ( $\theta$ : angolo tra fotone incident e diretto del moto dell'elettrone nell'observer frame).

$$p(\theta)d\theta = p(\mu)d\mu = \left( \gamma^4 (1 - \beta\mu)^3 \right)^{-1} d\mu$$

segue dall'espressione per la distribuzione angolare di potenza emessa da una particella relativistica.

Allora la probabilità di scattering verso l'angolo  $\theta'$  è

$$p(\mu'; \mu) d\mu' = \frac{3}{8} \left( 1 + \mu^2 \mu'^2 + \frac{1}{2} (1 - \mu^2)(1 - \mu'^2) \right) d\mu'$$

Il cambiamento di direzione del fotone fa sì che quest'ultimo scattinato alla frequenza  $\nu'$  vista nell'observer frame

$$\nu' = \nu (1 + \beta\mu') (1 - \beta\mu)^{-1} \quad \rightarrow \text{dallo eq per variaz di energia da Compton in } K \text{ e } K'$$

Per convenzione, si la variazione in frequenza in termini

$$\text{ridi } S = \log(\nu'/\nu)$$

Dimostrazione dello shift in frequenza:

$$E' = E \gamma (1 - \beta \cos \theta)$$

$$E_1 = E_1' \gamma (1 + \beta \cos \theta_1')$$

$$\frac{E_1}{E} = \frac{v''}{v} = E_1' \gamma (1 + \beta \cos \theta_1') \frac{\gamma (1 - \beta \cos \theta)}{E'} \quad ; \quad E' \approx E_1'$$

$$= \gamma^2 (1 + \beta \cos \theta_1') (1 - \beta \cos \theta)$$

Usando l'eq. per l'aberrazione:

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \beta \cos \theta'} \quad ; \quad \text{essendo } \gamma^2 = (1 - \beta^2)^{-1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{1 - \beta^2} (1 - \beta \cos \theta) &= \frac{1}{1 - \beta^2} \left( 1 - \frac{\beta \cos \theta' + \beta^2}{1 + \beta \cos \theta'} \right) = \\ &= \frac{1}{1 - \beta^2} \left( \frac{1 + \beta \cos \theta' - \beta \cos \theta' - \beta^2}{1 + \beta \cos \theta'} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \beta \cos \theta'} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{v''}{v} = \frac{1 + \beta \cos \theta_1'}{1 + \beta \cos \theta'} \quad \rightarrow \text{N.B. } \theta' \text{ di RL} = \pi - \theta \text{ di B99}$$

$\theta_1' \text{ " " " } = \theta' \text{ di B99}$

$$\Rightarrow \frac{v''}{v} = \frac{1 + \beta \cos \theta'}{1 - \beta \cos \theta}$$

cosicché la probabilità che un singolo scattering causi una variazione di frequenza  $S$ , da un obiettivo con velocità  $\beta c$ , è:

$$P(S; \beta) dS = \int \mu(\mu) d\mu \phi(\mu; \mu') \left( \frac{d\mu'}{dS} \right) dS$$

$$\Rightarrow P(S; \beta) = \frac{3}{16\gamma^4 \beta} \int_{\mu_1}^{\mu_2} (1 + \beta \mu') \left( 1 + \mu^2 \mu'^2 + \frac{1}{2} (1 - \mu^2)(1 - \mu'^2) \right) (1 - \beta \mu)^3 d\mu$$

dove  $\mu' = \frac{e^S (1 - \beta \mu) - 1}{\beta}$  ;  $\mu = \frac{-e^{-S} (1 + \beta \mu') + 1}{\beta}$

L'integrale sarà su valori reali di  $\mu$ , e cioè:

$$\mu_1 = \begin{cases} -1 & S \leq 0 \\ \frac{1 - e^{-S} (1 + \beta)}{\beta} & S \geq 0 \end{cases} \quad \mu_2 = \begin{cases} \frac{1 + e^S (1 - \beta)}{\beta} & S \leq 0 \\ 1 & S \geq 0 \end{cases}$$

MOSTRARE FIG. 1 DEL BIRKISHAW

La crescente asimmetria di  $P(S; \beta)$  al crescere di  $\beta$  è causata dal relativistic beaming. La larghezza della funzione a zero indovinata in  $S$ ,  $\longrightarrow$

$$\Delta S_0 = 2 \log \left( \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)$$

crece poiché  $\beta$  più alti fanno crescere lo shift in frequenza associato ad un dato angolo di deflessione dei fotoni

$$\rightarrow P(S; \beta) = 0 \Rightarrow \mu_1 = \mu_2$$

$$S > 0 \Rightarrow \frac{1 - e^{-S}(1+\beta)}{\beta} = 1 ; 1 - \beta = e^{-S}(1+\beta) \Rightarrow S = \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)$$

$$S \leq 0 \Rightarrow -1 = \frac{1 - e^{-S}(1-\beta)}{\beta} ; 1 + \beta = e^{-S}(1-\beta) \Rightarrow S = \ln\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta S_0 = 2 \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)$$

## Scattering di fotoni su popolazione di elettroni

Si calcoli  $P(S; \beta)$  mediando sulla distrib di valori di  $\beta$  degli elettroni

Per fotoni che hanno scatterato 1 volta:

$$P_1(S) = \int_{\beta_{\min}}^1 n_e(\beta) P(S; \beta) d\beta$$

dove  $\beta_{\min} = \frac{e^{|S|} - 1}{e^{|S|} + 1} \rightarrow$  minimo valore di  $\beta$  in grado di causare lo shift  $S$ .

$n_e(\beta)$  non si deve estendere a  $\gamma$  così grandi da violare l'assunzione di scattering classico implicita nell'uso della sez d'urto Thomson.

Neun problema per il CMB se  $\gamma < 2 \times 10^9$ . Negli ammassi di galassie ( $T \approx 15$  keV),  $\gamma$  sono sempre più piccoli

Per distribuzione Maxwelliana relativistica:

$$n_e(\beta) = \frac{\gamma^5 \beta^2 \exp(-\gamma/\Theta) d\beta}{\Theta K_2(1/\Theta)} ; \quad \Theta = \frac{kT_e}{mc^2}$$

$K_2 \rightarrow$  funzione di Bessel modificata di secondo tipo e secondo ordine

MOSTRARE FIG. 5 DI BIRKINSHAW

Distribuzione molto asimmetrica al crescere della temperatura. L'upscattering prevale nel downscattering

Nel caso di legge di potenza per la distrib. in energie dei fotoni (caratteristica dei lobi delle radio-galassie)

$$p_e(\gamma) d\gamma = \begin{cases} A \gamma^{-\alpha} d\gamma & ; \gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2 \\ 0 & ; \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove  $A = \begin{cases} \log \gamma_2 - \log \gamma_1 & ; \alpha = 1 \\ (1-\alpha) (\gamma_2^{1-\alpha} - \gamma_1^{1-\alpha}) & ; \alpha \neq 1 \end{cases}$

Tali elettroni in radio lobi possono produrre SZ.  
 $\alpha \approx 2.5$  in generale

MOSTRARE FIGURA 6 DI BIRKINSHAW

Un'altra caratteristica più pronunciata che nel caso della distrib. termica, a causa del numero maggiore di elettroni con  $\gamma \gg 1$ .

Effetto di SZ sulla spettro della radiazione

Effetto globale sulla spettro del CMB.

Sia lo spettro incidente

$$I_0(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left( e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)^{-1}$$

Se ciascun fotone scattoria una sola volta, lo spettro risultante sarà

$$\frac{I(\nu)}{\nu} = \int_0^{\infty} d\nu_0 P_1(\nu, \nu_0) \frac{I_0(\nu_0)}{\nu_0}$$

dove  $P_1(\nu, \nu_0)$  è la probabilità che un urto dia lo shift in frequenza da  $\nu_0$  a  $\nu$ .



$$P_1(\nu, \nu_0) = P_1(s) / \nu \quad ; \quad s = \ln(\nu / \nu_0)$$

$$\Rightarrow I(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_1(s) I_0(\nu_0) ds$$

Quindi la variazione dello spettro alla freq.  $\nu$  è

$$\Delta I(\nu) = I(\nu) - I_0(\nu) = \frac{2 \rho_n}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} P_1(s) ds \left( \frac{\nu_0^3}{e^{2s/kT_e} - 1} - \frac{\nu^3}{e^{2s/kT_e} - 1} \right)$$

MOSTRARE FIGS. 7-8 NEL BIRKINSHAW

La funzione  $\Delta I(\nu)$  è generalmente simile per distrib. termiche e non termiche; decrescita nella zona Rayleigh-Jeans dello spettro e crescita nella zona di Wien.

Più in generale, un fotone può essere scatterato 0, 1, 2, ..., N volte e incubarsi negli elettroni.

$\tau_e$ : profondità ottica della nube di elettroni

$\Rightarrow e^{-\tau_e}$ : probab. di non essere scatterato

$\tau_e e^{-\tau_e}$ : " " una scattering

$$P_N = \frac{\tau_e^N e^{-\tau_e}}{N!} \rightarrow \text{probab. di } N \text{ scattering}$$

Quindi la funzione di redistribuzione in frequenza completa è

$$P(s) = e^{-\tau_e} \left( \delta(s) + \tau_e P_1(s) + \frac{1}{2!} \tau_e^2 P_2(s) + \dots \right)$$

La funzione di redistribuzione  $P_N(s)$  dopo N scattering è

$$P_2(s) = \int dt_1 P_1(t_1) P_1(s-t_1)$$

$$P_3(s) = \int dt_1 dt_2 P_1(t_1) P_1(t_2) P_1(s-t_1-t_2)$$

⋮

Scrivendo  $P(s)$  usando le trasformate di Fourier:

$$P(s) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{P}(k) e^{iks} dk \quad \text{dove} \quad \tilde{P}(k) = e^{-\tau_e(\tilde{P}_1(k)-1)}$$

dove la FT di  $P_1(s)$  è  $\tilde{P}_1(k) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} P_1(s) e^{-iks} ds$

La generalizzazione di  $I(\nu)$  per profondità ottica arbitraria fornisce

$$I(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(s) I_0(\nu_0) ds$$

Essendo nei casi di interesse astrofisica  $\tau_e \ll 1$ , sarà sufficiente usare l'approssimazione

$$P(s) = (1 - \tau_e) \delta(s) + \tau_e P_1(s)$$

Quindi la varianza di intensità avrà la stessa espressione che nel caso ad 1 solo scattering, ma moltiplicata di un fattore  $\tau_e$ :

$$\Delta I_\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \tau_e \int_{-\infty}^{+\infty} P_1(s) ds \left( \frac{\nu_0^3}{e^{h\nu_0/kT_e} - 1} - \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT_e} - 1} \right)$$

→  $\Delta I_\nu$  non dipende dal redshift a cui si trova la nube di elettroni → SZ è un importante indicatore sullo stato del gas ad alto  $z$

## Il parametro di Comptonizzazione

Serve per descrivere l'effetto sulla spettro di scattering ripetuto in un mezzo termico.

Il parametro di Comptonizzazione in un mezzo finito ci dice quanto viene distorto lo spettro dei fotoni

$$y = \left( \begin{array}{l} \text{variazione fra} \\ \text{media di energia} \\ \text{per ogni ciclo} \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{l} \text{numero medio} \\ \text{di scattering} \end{array} \right)$$

Se  $y \gg 1$  lo spettro sarà alterato in modo significativo.

Si calcoli ora il primo termine, per distribuiti termica di elettroni in regime non relativistico.

Mediante degli angoli l'eq.

$$E_1' = E' \left( 1 - \frac{E'}{m_e c^2} (1 - \cos \theta) \right) \Rightarrow \frac{\Delta E'}{E'} = \frac{E_1' - E'}{E'} = - \frac{E'}{m_e c^2}$$

Nel frame del laboratorio, al primo ordine nei due parametri  $E/m_e c^2$  e  $k_B T_e/m_e c^2$ , avrà la forma:

$$\frac{\Delta E}{E} = - \frac{E}{m_e c^2} + \frac{\alpha k_B T_e}{m_e c^2} \quad \alpha: \text{coefficiente da determinare}$$

Sia per calcolare  $\alpha$ :

- fotoni ed elettroni in equilibrio ed interagiscono solo tramite scattering

- densità di fotoni bassa da poter trascurare l'emissione stimolata

$\Rightarrow$  Distrib. di Bose-Einstein per i fotoni, con potenziale chimico anziché zero Planckiana, poiché i fotoni non possono essere creati o distrutti dallo scattering.

$$\Rightarrow N(E) = k E^2 \exp\left(-\frac{E}{kT_e}\right) \quad \rightarrow \text{funz. di distrib. per fotoni}$$

nel caso non degenero coincide con quella di particella ultrarelativ.

$$\Rightarrow \langle E \rangle = \int E (dN/dE) dE / \int (dN/dE) dE = 3kT_e$$

$$\langle E^2 \rangle = 12 (kT_e)^2$$

In tale caso <sup>spontaneo</sup> l'energia può essere trasferita da fotoni ad elettroni

$$\Rightarrow \langle \Delta E \rangle = 0 = \frac{\alpha kT_e}{m_e c^2} \langle E \rangle - \frac{\langle E^2 \rangle}{m_e c^2} = \frac{3kT_e}{m_e c^2} (\alpha - 4) kT_e \Rightarrow \alpha = 4$$

$$\Rightarrow (\Delta E)_{NR} = \frac{E}{m_e c^2} (4kT_e - E) \rightarrow \text{energia trasferita \(\times\) scattering da elettroni non relativistici in equilibrio termico.}$$

Se  $kT_e > E/4 \Rightarrow$  Compton inverso: i fotoni guadagnano

energia.  
Se trasfer. d'energia nel vert. br. dell'elettrone trascurabile:  $kT_e \gg E$

Nel caso relativistico,  $\gamma \gg 1$ , si può dimostrare che

$$(\Delta E)_R \sim 16 E \left( \frac{kT_e}{m_e c^2} \right)^2$$

Per il caso NR, essendo  $\langle E \rangle = 3kT_e \Rightarrow \frac{\Delta E_{NR}}{\langle E \rangle} = \frac{1}{m_e c^2} (4kT_e - 3kT_e) = \frac{kT_e}{m_e c^2}$

Per il numero medio di scattering, se  $ct$  è la dimensione della nube di elettroni, essendo  $(\Delta E)_{NR}/E \approx kT_e/m_e c^2$

$$\Rightarrow y = \frac{kT_e}{m_e c^2} \frac{ct}{\lambda_e} \quad \lambda_e = (m_e \sigma_T)^{-1} \text{ Compton range}$$

è il libero cammino medio per scattering

$$= \frac{k_B \sigma_T}{m_e c^2} m_e T_e (ct)$$

## L'equazione di Kompaneets: scattering ripetuti da elettroni non relativistici

Evoluzione della densità di fotoni nello spazio delle fasi,  $n(\omega)$ , causata essere continuo

$f_e(\vec{p}_e)$ : phase-space density di elettroni di momento  $\vec{p}_e$

Equazione di Boltzmann per  $n(\omega)$ :

$$\frac{\partial n(\omega)}{\partial t} = c \int d^3 p_e \int \frac{d\Omega}{4\pi} d\Omega \left[ f_e(\vec{p}_e) n(\omega_1) (1 + n(\omega)) + \right. \\ \left. - f_e(\vec{p}_e) n(\omega) (1 + n(\omega_1)) \right]$$

dovuto allo scattering  $p + \omega \leftrightarrow p_1 + \omega_1$

1° termine: scattering alla freq  $\omega$  da fotoni di freq.  $\omega_1$

2° " : " dalla " " verso " " " "

Si noti:

- relazione tra  $\omega$  e  $\omega_1$  derivata successivamente
- la dipendenza dagli angoli scompare dopo l'integrazione in  $d\Omega$
- $[1 + n(\omega)]$  e  $[1 + n(\omega_1)]$  tengano conto di effetti di scattering stimolato: freq. di scattering da  $\omega_1$  a  $\omega$  accresciuta del fattore  $1 + n(\omega)$  perché fotoni obbediscono la statistica di Bose-Einstein e tendono verso la mutua occupazione dello stesso stato quantistico.

Ricorriamo ora la soluzione approssimata nel limite non-relativistico  $k_B T_e \ll m_e c^2$ .

Elettroni non relativ.: energie frazionarie trasferite per scattering è piccola.

L'eq. di Boltzmann si espande al 2° ordine in tale quantità, ottenendo l'eq. di Fermi-Planck. Per il caso di scattering di elettroni termici non relativistici, si chiama eq. di Kompaneets.

Distrib. termica di elettroni non relativistici:

$$f_e(E) = \frac{n_e}{(2\pi m kT)^{3/2}} e^{-E/kT} \quad \text{con } E = \frac{p^2}{2m} \quad n_e: \text{densità di elettroni}$$

$$\Delta \equiv \frac{\hbar(\omega_i - \omega)}{kT} : \text{trasferimento adimensionale di energia ai fotoni}$$

Caso  $\Delta \ll 1$  (rilevante per  $e^-$  non relativistici)

Espansione di  $n(\omega)$  al 2° ordine in tale variabile:

$$n(\omega_i) = n(\omega) + (\omega_i - \omega) \frac{dn(\omega)}{d\omega} + \frac{1}{2} (\omega_i - \omega)^2 \frac{d^2 n(\omega)}{d\omega^2} + \dots$$

Se espande in modo analogo  $f_e(E)$

$$\text{Def: } x \equiv \hbar\omega/kT$$

$$\Rightarrow c^{-1} \frac{dn}{dt} = \left[ n' + n(1+n) \right] \int d^3p \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega f_e \Delta + \left[ \frac{1}{2} n'' + n'(1+n) + \frac{1}{2} n(1+n) \right] \int d^3p \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega f_e \Delta^2$$

$$\text{con } n' = dn/dx; \quad n'' = d^2n/dx^2$$

Termine in  $\Delta$ : secular shift

" "  $\Delta^2$ : termine di random walk

Derivazione dell'espressione di  $\Delta$

$$\Delta = \frac{x \vec{p} \cdot (\hat{n}_1 - \hat{n})}{mc} + \mathcal{O}\left(\frac{kT}{mc^2}\right)$$

Derivata dell'Eq. di Kompaneets (Sect. 7.6 R-L)

Da esercizio 7.4 di RL:

(a) Derivata di  $\Delta$  (eq. 7.53)

Set  $c=1$

↳ momento del fotone entrante  $\vec{P}_\gamma = \hbar\omega(1, \hat{n})$

" " " uscente:  $\vec{P}_{\gamma'} = \hbar\omega_1(1, \hat{n}_1)$

↳ momento iniziale dell'elettrone:  $\vec{P}_e = (E, \vec{p})$

" finale " :  $\vec{P}_{e'}$

$$c = |\vec{P}_{e'}|^2 = |\vec{P}_e + \vec{P}_\gamma - \vec{P}_{\gamma'}|^2 \Rightarrow E\hbar\omega - \hbar\omega\vec{p}\cdot\hat{n} - \hbar^2\omega\omega_1(1 - \hat{n}\cdot\hat{n}_1) + \hbar\omega_1 E - \hbar\omega_1\vec{p}\cdot\hat{n}_1$$

$$\Rightarrow \Delta \equiv \frac{\hbar(\omega_1 - \omega)}{kT} = \frac{x\vec{p}\cdot(\hat{n}_1 - \hat{n}) - x^2 kT(1 - \hat{n}\cdot\hat{n}_1)}{E - \vec{p}\cdot\hat{n}_1 + x kT(1 - \hat{n}\cdot\hat{n}_1)}$$

$x = \frac{\hbar\omega}{kT}$ ;  $\frac{\vec{p}}{m}$  of the order  $\alpha \equiv \left(\frac{kT}{m}\right)^{1/2} \Rightarrow$  al primo ordine

in  $\alpha$ : il denominatore diventa  $E = m \rightarrow$  electron mass.

il secondo termine al numer. trascurabile

$\mathcal{O}(\alpha^2)$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{x\vec{p}\cdot(\hat{n}_1 - \hat{n})}{m} \text{ c.v.d. } + \mathcal{O}\left(\frac{kT}{mc^2}\right)$$

(b) Calcolo dell'integrale  $I_2$  di eq. 7.54

Sia  $\chi$  l'angolo tra  $\vec{p}$  e  $(\hat{n}_1 - \hat{n})$ .

$$I_2 \equiv \iint d^3p f_e \Delta^2 \frac{d\Omega}{d\Omega} d\Omega = \left(\frac{x}{mc}\right)^2 \int d^3p p^2 \cos^2 \chi f_e \int |\hat{n}_1 - \hat{n}|^2 \frac{d\Omega}{d\Omega}$$

Derivazione di  $I_2$   $\longrightarrow$

$$I_2 = 2x^2 n_e \sigma_T \left( \frac{kT}{mc^2} \right) + O \left( \frac{kT}{mc^2} \right)^2$$

Derivation of the expression for  $\partial n / \partial t$   $\longrightarrow$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = - \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} [x^2 j(x)] \quad \text{con } j = g(x) [n' + h(n, x)] \quad (+)$$

Si devono ora determinare le funzioni  $g$  e  $h$ .

Per una distrib. B-E di fotoni con potenziale chimico

finito,  $n = (e^{\alpha+x} - 1)^{-1}$   $\rightarrow$  Soluz. "steady state" dell'eq. di Fokker-Planck (\*)

dove esiste un equil. termico con gli elettroni

$$\Rightarrow j(x) = 0$$

Richiedendo  $n' + h(n, x) = 0$  con  $n$  dato da (\*), allora

$$h(n, x) = n(1+n) \quad (**)$$

Introducendo la  $\partial n / \partial t$  ottenuta usando tale  $h(n, x)$  nella

$j(n, x)$ , con la  $\partial n / \partial t$  data dalla Fokker-Planck, si

ottengono le espressioni per  $g(x)$  e  $I_1$ :

$$(**) \quad g(x) = -c x^2 n_e \sigma_T \left( \frac{kT}{mc^2} \right) ; \quad I_1 = m_e \sigma_T x(1-x) \left( \frac{kT}{mc^2} \right)$$

The secular term in the F-P eq dice che energia è

quadruplicata o persa dagli elettroni a seconda che del

segno di  $1-x$ , quindi in accordo con l'espressione

di  $\langle \Delta E \rangle$  per elettroni non relativistici

Sostituendo (\*\*) in (+):

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \left( \frac{kT}{mc^2} \right) \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} [x^4 (n + n + n^2)]$$



$\frac{d\sigma}{d\Omega}$  indipendente da  $\vec{p}$   $\Rightarrow$  all'ordine più basso in  $\frac{v}{c}$  non

l'integ. su  $\vec{p}$  fatto indipand. da quello sulla direz. dei fotoni (in  $d\Omega$ )

Per distrib. termica di elettroni:

$$f_e(E) = \frac{n_e}{(2\pi m kT)^{3/2}} e^{-E/kT}; \quad n_e: \text{densità in num. di elettroni}$$
$$E = p^2/2m$$

Si scelga  $\chi$  come angolo polare per l'integrazione in  $d^3p$ :

$$d^3p = p^2 dp d\cos\chi d\varphi$$

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2\theta)$$

$$\Rightarrow I_2 = x^2 n_e \frac{kT}{mc^2} \int \frac{d\sigma}{d\Omega} |\hat{n}_1 - \hat{n}|^2 d\Omega$$

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2$$

Sia  $\hat{n}_1$  lungo l'asse polare per l'integraz. in  $d\Omega = d\cos\theta d\varphi \Rightarrow |\hat{n}_1 - \hat{n}|^2 = 2(1 - \cos\theta)$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{3}{4} x^2 n_e \sigma_T \frac{kT}{mc^2} \int_{-1}^{+1} (1 - x + x^2 - x^3) dx$$

$$= 2x^2 n_e \sigma_T \left( \frac{kT}{mc^2} \right)$$

(c) Calcolo di  $\frac{\partial n}{\partial t}$  (eq. 7.55)

Per conservare il num. totale di fotoni,  $\partial n / \partial t$  deve avere la forma:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} [x^2 j(x)]$$

Infatti con tale forma si ha

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty n x^2 dx = - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} [x^2 j(x)] dx = -x^2 j(x) \Big|_0^\infty$$

$\Rightarrow$  la variaz. nel numero totale di fotoni avviene solo per un flusso attraverso le boundary in "energy space"

$$\Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{2}{x} j(x) - \frac{\partial j}{\partial x}; \quad (*)$$

Si scriva eq. (7.52) del RL nella forma

$$\frac{\partial n}{\partial t} = C_1(x)n'' + C_2(x, x)n' + C_3(n, x) \quad (**)$$

Eqs. (\*) e (\*\*) devono essere "funzionalmente" identiche confrontando i termini con derivate più alte

$\Rightarrow j$  deve contenere un termine lineare in  $n'$ , così che  $\frac{\partial j}{\partial x}$  dia il termine  $n''$ , con coefficiente indep. da  $n$ , e nessun termine in  $n$

$$\Rightarrow j = g(x) [n' + h(n, x)]$$

dove  $t_c \equiv (m_e \sigma_T / c) t$  è tempo in unità del tempo medio tra due scattering  $\rightarrow (c / \lambda_e) t$

$\lambda_e = (m_e \sigma_T)^{-1}$  - libero cammino medio

Usando l'espressione di Compton- $y$ :

$$y = \frac{kT_e}{mc^2} \frac{ct}{\lambda_e} \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial y} = \frac{1}{x_e^2} \frac{\partial}{\partial x_e} \left[ x_e^4 (n' + n'' + n''') \right]$$

Tale eq. ha soluzione indipendente da  $t$  se  $e^-$  e  $\gamma$  in equilibrio termico:

$$n = (e^{x_e + a} - 1)^{-1} \text{ è soluz. dell'eq. di Kompaneets}$$

Per  $\gamma$  del CMB ed elettroni termici dell'ICM si ha  $x_e \ll 1$

$$\Rightarrow \frac{\partial n}{\partial x_e} \gg n, n'$$

$$\Rightarrow \frac{\partial n}{\partial y} = \frac{1}{x_e^2} \frac{\partial}{\partial x_e} \left[ x_e^4 \frac{\partial n}{\partial x_e} \right] \longrightarrow$$

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{1}{x_0^2} \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial n}{\partial x_0}$$

$$x = \frac{h\nu}{k_B T z}$$

↑

Per l'omogeneità si sostituisca  $x_0 \rightarrow x$ ;  $(x, y) \rightarrow (\frac{h\nu}{k_B T z}, y)$  dove

$$\xi = 3y + \ln x_0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial n}{\partial y} = \frac{\partial^2 n}{\partial \xi^2} \rightarrow \text{equaz della diffusione}$$

Ciò indica che la soluzione dell'eq. di Kompaneets può essere scritta come

$$I_0(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(s) I_0(\nu_0)$$

dove il kernel di scattering "Kompaneets" ha la forma gaussiana

$$P_x(s) = (L_T \nu y)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(s + 3y)^2}{L_T y}\right)$$

Tale approssimazione differisce dalla soluzione esatta

$$P_x(s) = \int_{P_{\min}}^{\infty} P_x(\beta) P(s; \beta) d\beta$$

di una quantità piccola, ma che può diventare importante quando gli elettroni diventano più relativistici

MOSTRARE FIG. 5 DI BIRKINSHAW.

Per analizzare meglio (per SZ cinematica), si deve usare la trattazione relativistica con opportuna espressione per  $\xi$ . In tal modo, il profilo della distorsione

spettrale  $\Delta I(x)$  varia in modo dipendente dalla temperatura.

MOSTRARE FIG. 9 NEL BIRKINSHAW.

A bassi valori di  $T_e$ , il kernel Komponeets e quello completamente relativistico sono molto simili.

Se  $x \ll 1$ , cioè anche  $y \ll 1$ , per uno spettro incidente di corpo nero, l'espressione

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{\Delta n}{y}$$

può essere usata nell'eq. di Komponeets, con  $n, n^2$  trascurabili per ottenere la distribuzione spettrale. Usando per  $n$  lo spettro

$$\Delta n = x y \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \left( x \text{ coll. } \frac{x}{2} - 1 \right) \quad \text{dato dalla Planckiana, si ha:}$$

$$\Rightarrow \Delta I(x) = x^3 \Delta n(x) I_0, \quad \text{con } I_0 = \frac{22}{c^2} \left( \frac{k T_{\text{rad}}}{h} \right)^3$$

Si noti:

1. Nell'appa di Komponeets la  $\Delta I$  ha un'espressione analitica.

2. La posizione di minimo, massimo e zero sono indipendenti dalla temperatura, mentre lo sono nella tratta

vicine relativistica

$$x_{\text{min}} = 2.26$$

$$x_{\text{zero}} = 3.83 (1 + 1.13 \Theta)$$

$$x_{\text{max}} = 6.51 (1 + 2.15 \Theta)$$

$$\Theta = \frac{k T_e}{m_e c^2} \quad \left. \begin{array}{l} \rightarrow \text{sono dei} \\ \text{broni fit} \end{array} \right\}$$

3.  $\Delta I$  o  $\Delta T_{RJ}$  nella KA sono proporzionali a  $\gamma$  (o  $T_e \beta_{rel}$ ),  
mentre nell'espressione relativistica sono  $\propto \gamma^2$  (o  
 $\gamma^2 \beta_{rel}^2$ ), ma hanno una dipendenza complicata da  $T_e$ .

Misura di  $H_0$  (e di espansione) combinando X-ray e SZ per anelli di galassie:

Due segnali:

In emissione:  $E \propto \int n_e^2 dl$

In assorbimento:  $A \propto \int n_e dl$

$\Rightarrow E/A^2$ : misura "density weighted" della "path length" attraverso il cluster.

Se - struttura del gas nota  
- dimensione angolare del gas misurata

$\Rightarrow D_A$  (angular diameter distance) misurato da  $A^2/(E\theta)$