ISBN 978-88-08-18229-6

n'area di 40 per 4 pertiche e 1 rood misura 40 per 1 pertiche? Una ertica corrisponde oggi a 5,03 m.

). I granelli della finissima sabbia delle spiagge della California hanno n raggio medio di 50 μm e sono costituiti per lo più di biossido di silio, 1,00 m^3 del quale ha una massa di 2600 kg. Quale massa di granelli sabbia avrebbe una superficie totale (somma delle superfici di tutti anelli) uguale alla superficie di un cubo avente lo spigolo di 1,00 m?

). Una casa per le bambole è normalmente costruita in scala 1:12 spetto a una casa reale (ciò significa che ogni lunghezza nella casa per bambole è pari a 1/12 di quella reale). Una casetta in miniatura (una ıta casa per le bambole che entri in una casa per le bambole) è in genein scala 1:144 rispetto a una casa reale. Si supponga di avere una casa ra (fig. 1.7) con un fronte di 20 m, una larghezza di 12 m, un'altezza 6,0 m sulla facciata e 9,0 m al colmo del tetto. Qual è il volume, presso in metri cubi, della corrispondente (a) casa per le bambole e (b) setta in miniatura?

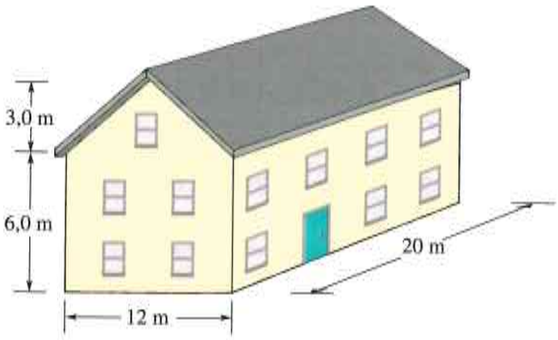


Figura 1.7 Problema 20.

. Una certa marca di idropittura per muri dichiara una «resa» di 0 ft^2/gal. (a) Esprimere questa quantità in m^2/L. (b) Esprimerla in ità SI. (c) Qual è l'inverso della quantità data e (d) che significato ico avrebbe? (*Suggerimento*: consultare le appendici A e D. al = 4,546 L.)

. Supponiamo che siate distesi su una spiaggia a osservare il sole che monta su un mare calmo e che facciate partire un cronometro all'inte esatto in cui scompare il lembo superiore del sole. Quindi vi ate in piedi, portando così gli occhi a un'altezza $h = 1{,}70$ m, e arrestail cronometro quando il lembo superiore del sole scompare nuovante. Se il tempo misurato dal cronometro è $t = 11{,}1$ s qual è il raggio ella Terra?

23. Le antiche unità di tempo erano quasi tutte basate su misure astronomiche. Tuttavia in Tibet se ne trova una che ha radici fisiologiche: il *dbug*, che corrisponde all'intervallo di tempo medio tra due espirazioni polmonari. Stimate il numero di dbug nella durata di un giorno.

24. Un'unità astronomica (UA) è la distanza media della Terra dal Sole, pari a circa $1{,}50 \cdot 10^8$ km. La velocità della luce è di circa $3{,}0 \cdot 10^8$ m/s. Esprimete la velocità della luce in unità astronomiche al minuto.

25. Che massa d'acqua è caduta sulla città del problema 5 durante il temporale? Un metro cubo di acqua ha la massa di $1{,}0 \cdot 10^3$ kg/m^3.

26. Una tipica zolletta di zucchero ha forma di cubo con spigolo lungo 1,00 cm. Quanto sarebbe lungo lo spigolo di una scatola cubica che contenesse 1,00 mol di zollette (un numero di zollette pari al numero di Avogadro; vedi appendice B)?

27. Una dieta dimagrante prevede una perdita di massa corporea di 2,3 kg in una settimana. Esprimere il ritmo di perdita di massa corporea in mg/s, senza dare necessariamente un senso pratico a un tale ritmo di dimagrimento osservato di secondo in secondo.

28. Una normale scala interna di una villa ha i gradini di alzata (altezza verticale) pari a 19 cm e di pedata (profondità orizzontale) pari a 23 cm. Alcune ricerche indicano che le scale sarebbero più sicure per chi scende se avessero una pedata di 28 cm. Data una scala alta 4,57 m, quale sarebbe la sua maggior estensione in orizzontale, se si applicasse il valore di pedata suggerito anziché quello normale?

29. Un'*unità astronomica* (UA) è uguale alla distanza media Terra-Sole, circa $150 \cdot 10^6$ km. Un *parsec* (pc) è la distanza alla quale 1 UA sottende un arco la cui misura angolare è esattamente di un secondo (vedi figura 1.8). Un *anno-luce* (a.l.) è la distanza che la luce, viaggiando nel vuoto a una velocità di circa 300 000 km/s, coprirebbe in un anno. Esprimete la distanza dalla Terra al Sole (a) in parsec e (b) in anni-luce.

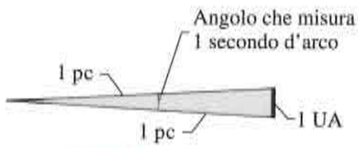


Figura 1.8 Problema 29.

30. (a) Un'unità di tempo usata talvolta in fisica microscopica è lo *shake*. 1 shake equivale a 10^{-8} s. Ci sono più shake in un secondo che secondi in un anno? (b) L'uomo esiste da circa 10^6 anni, mentre l'Universo ha un'età di circa 10^{10} anni. Se si riporta l'età dell'Universo a «1 giorno», da quanti «secondi» esiste l'umanità?

C A P I T O L O 2

Moto rettilineo

2.1 POSIZIONE, SPOSTAMENTO E VELOCITÀ MEDIA

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di...

2.01 Rendervi conto che, quando tutte le parti di un corpo esteso si muovono nella stessa direzione alla stessa velocità, possiamo considerare il corpo come se fosse una particella puntiforme. In questo capitolo ci limiteremo a trattare il moto di corpi siffatti.

2.02 Capire che la posizione di una particella corrisponde al valore che leggiamo su una scala graduata, come ad esempio l'asse x.

2.03 Applicare la relazione che intercorre tra lo spostamento di una particella e le sue posizioni iniziale e finale.

2.04 Applicare la relazione tra la velocità vettoriale media di una particella, il suo spostamento e l'intervallo di tempo corrispondente a tale spostamento.

2.05 Applicare la relazione tra la velocità scalare media di una particella, la distanza totale che essa ha percorso e l'intervallo di tempo corrispondente a tale moto.

2.06 Determinare la velocità vettoriale media tra due istanti dati, una volta noto il grafico che descrive la posizione della particella in funzione del tempo.

Idee chiave

- La coordinata x di una particella sull'asse delle x individua la posizione in cui essa si trova rispetto all'origine, o punto zero, dell'asse.
- La posizione può essere positiva o negativa, a seconda che sull'asse si trovi da una parte o dall'altra rispetto all'origine, oppure zero se coincide con l'origine. Il verso sull'asse è positivo dalla parte dei valori crescenti di x a partire dall'origine, negativo nel caso opposto.
- Lo spostamento Δx di una particella sull'asse x è la variazione della sua posizione:

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

- Lo spostamento è una quantità vettoriale. È positivo se la particella si muove concordemente al verso positivo dell'asse x, negativo nel caso opposto.
- Una particella che si sposta dalla posizione x_1 alla posizione x_2 nell'intervallo di tempo Δt compreso tra t_1 e t_2 ha una velocità vettoriale media di

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

Il segno algebrico di $\bar{v}$, che è una grandezza vettoriale, indica il verso del moto. La velocità vettoriale media non dipende dalla lunghezza del reale cammino percorso, ma solo dalle posizioni iniziale e finale.
- Nel diagramma che descrive x in funzione di t la velocità vettoriale media nell'intervallo di tempo Δt è rappresentata dalla pendenza della retta che passa per i punti iniziale e finale del moto.
- La velocità scalare media $\bar{u}$ di una particella durante l'intervallo di tempo Δt dipende dalla lunghezza del cammino effettivamente percorso durante quell'intervallo:

$$\bar{u} = \frac{\text{distanza totale}}{\Delta t}.$$

L'aspetto fisico

Uno degli obiettivi che si pone la fisica è studiare il moto degli oggetti – per esempio, a che velocità si muovono e quanto spazio percorrono in un dato tempo. Gli ingegneri di Formula 1 ne fanno una questione di vita, per determinare il successo delle loro macchine. I geologi studiano i movimenti tettonici nel tentativo di prevedere i terremoti. I medici ricorrono a questo ramo della fisica quando seguono il flusso sanguigno nel paziente alla ricerca di ostruzioni vascolari e gli ufficiali di rotta ne fanno uso quando il loro radar segnala un pericolo. Gli esempi non si contano. In questo capitolo studieremo i princìpi di fisica del moto per corpi (auto da corsa, zolle tettoniche, cellule del sangue o qualsiasi altro oggetto) che si muovono in linea retta. Un tale moto è detto *rettilineo* o *unidimensionale*.

ISBN 978-88-08-18229-6

Il moto

Il mondo, con tutto quello che contiene, si muove rispetto al resto dell'Universo. Anche ciò che in apparenza è immobile, come una strada, si muove con la rotazione della Terra, con la rivoluzione della Terra intorno al Sole, con la rivoluzione del Sole intorno al centro della Via Lattea e con la migrazione della nostra galassia rispetto alle altre galassie. Il confronto e la classificazione dei moti (chiamata **cinematica**) si presenta spesso come un compito arduo. Che cosa, esattamente, vogliamo misurare, e come vogliamo confrontare le grandezze?

Per tentare di rispondere esamineremo anzitutto alcune proprietà generali del moto, limitatamente a tre condizioni particolari:

1. Il moto sia esclusivamente rettilineo, cioè segua una linea retta. La linea può essere verticale (una pietra che cade), orizzontale (una vettura su un'autostrada dritta in piano), oppure inclinata, ma deve essere retta.
2. Le forze (tirare e spingere) sono le cause del moto, ma non ne parleremo fino al capitolo 5. Nel presente capitolo studieremo esclusivamente il moto in se stesso e le sue variazioni. Se l'oggetto accelera, rallenta, si ferma o inverte la sua direzione, e se il moto varia, come interviene il tempo in questo cambiamento?
3. L'oggetto in movimento può essere una **particella** (un oggetto puntiforme come un elettrone) oppure un oggetto che si muove come una particella (tutte le sue parti si muovono rigidamente nella stessa direzione e alla stessa velocità). Il moto di un bambino che scende rigido lungo uno scivolo rettilineo si potrebbe assimilare al moto di una particella; ma ciò non vale nel caso della piattaforma rotante di una giostra perché i diversi punti del suo bordo si muovono in direzioni diverse.

Posizione e spostamento

Localizzare un oggetto significa trovare la sua posizione rispetto a un punto di riferimento, che spesso è l'**origine** (o il punto zero) di un asse, come l'asse delle x nella figura 2.1. Il **verso positivo** dell'asse è nella direzione dei numeri crescenti, verso il lato destro della figura. La direzione opposta è il **verso negativo**.

Per esempio, una particella potrebbe essere situata nel punto $x = 5$ m, il che significa che si trova a 5 metri dall'origine nel verso positivo. Se invece fosse collocata in $x = -5$ m sarebbe esattamente alla stessa distanza dall'origine, ma nel verso opposto. Sull'asse il valore -5 m è inferiore a -1 m, ed entrambi sono inferiori al valore $+5$ m. In una coordinata il segno + si può omettere. Non così per il segno −.

Il cambiamento di posizione da un punto x_1 a un altro punto x_2 è chiamato **spostamento** Δx, in cui

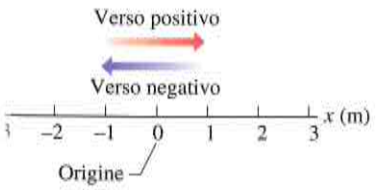
$$\Delta x = x_2 - x_1. \tag{2.1}$$

(Il simbolo Δ, che rappresenta la variazione di valore di una grandezza, significa che il valore iniziale di quella grandezza va sottratto al valore finale.) Quando si inseriscono numeri come valori di posizioni, lo spostamento nel verso positivo (verso destra nella figura 2.1) risulta sempre di segno positivo, e uno spostamento nel verso opposto (a sinistra nella figura) sarà rappresentato da un numero di segno negativo. Per esempio, se la particella si muove da $x_1 = 5$ m a $x_2 = 12$ m, allora $\Delta x = (12\text{ m}) - (5\text{ m}) = +7$ m. Il segno + indica che il moto è nel verso positivo. Se la particella va invece da $x_1 = 5$ m a $x_2 = 1$ m, allora $\Delta x = (1\text{ m}) - (5\text{ m}) = -4$ m. Il segno − vuol dire che il moto si è svolto nel verso opposto a quello dell'asse x.

Il numero di metri effettivamente percorsi durante il moto non ha importanza: lo spostamento è una grandezza che dipende solamente dalla posizione iniziale e da quella finale. Per esempio, supponiamo che la particella parta dal punto $x = 5$ m, giunga al punto $x = 10$ m e poi faccia ritorno in $x = 5$ m. Lo spostamento complessivo è $\Delta x = (5\text{ m}) - (5\text{ m}) = 0$.

Segni. Anche per lo spostamento il segno + si può omettere, cosa che non possiamo fare per il segno −. Se ignoriamo il segno (e quindi il verso) di uno spostamento, abbiamo il **modulo**, o **valore assoluto**, dello spostamento, che è sempre positivo. Se, ad esempio, $\Delta x = -4$ m, il suo modulo vale 4 m.

Lo spostamento è un esempio di **grandezza vettoriale**, cioè una grandezza che è caratterizzata da una *direzione*, col suo *verso*, e da un valore assoluto o *modulo*. Tratteremo più estesamente i vettori nel capitolo 3 (magari alcuni di voi hanno già letto quel capitolo), ma per ora è sufficiente essere consci del fatto che lo spostamento ha due aspetti caratteristici: (1) la sua *intensità* (ossia il numero di metri) *è la distanza tra la posizione iniziale e quella finale*; (2) il *verso* dello spostamento in una certa direzione, dalla posizione iniziale a quel-



gura 2.1 La posizione si determina su ı asse che è graduato secondo l'unità lunghezza (qui metri) e che si estende l'infinito nei due versi opposti. La ıriabile rappresentata (qui x) si segna solito dal lato positivo rispetto all'o-gine.

la finale, *è rappresentato da un segno positivo o negativo*, purché il moto si svolga lungo un asse.

Quello che segue è il primo di molti quesiti di VERIFICA, con cui potete accertarvi di aver capito, rispondendo con un minimo di ragionamento. Le risposte si trovano in fondo al libro, raccolte insieme alle risposte ai quesiti e problemi proposti a fine capitolo.

VERIFICA 1

Diamo qui tre coppie di valori che si riferiscono a posizioni rispettivamente finali e iniziali lungo un asse x. Quali coppie rappresentano uno spostamento negativo?
(a) -3 m, $+5$ m; (b) -3 m, -7 m; (c) 7 m, -3 m.
P N N

Velocità media: vettoriale e scalare

Un modo molto espressivo di descrivere la posizione di un oggetto consiste nel tracciare il grafico della sua posizione x in funzione del tempo t: la curva $x(t)$. A titolo di esempio, la figura 2.2 mostra la funzione $x(t)$ di un armadillo, che noi trattiamo come un oggetto puntiforme, fermo nel punto $x = -2$ m.

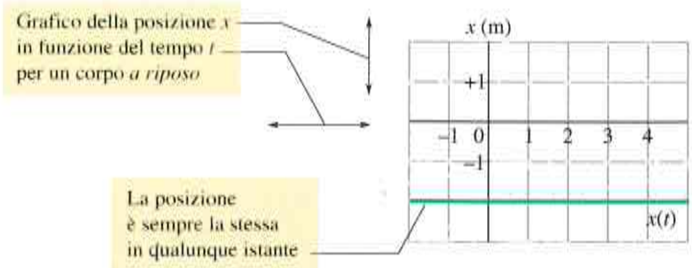


Figura 2.2 Grafico di $x(t)$ per un armadillo fermo a $x = -2$ m. Il valore di x rimane uguale a -2 m per qualsiasi istante t.

La figura 2.3a, che mostra anch'essa una funzione $x(t)$ di un armadillo, è più interessante, perché implica un moto. L'armadillo appare all'inizio, in $t = 0$, quando si trova alla posizione $x = -5$ m. Si muove verso $x = 0$, passa per questo punto quando $t = 3$ s e quindi continua a muoversi verso valori sempre maggiori di x. La figura 2.3 presenta anche il movimento dell'armadillo su un asse rettilineo come si vedrebbe realmente nei tre diversi punti. Il grafico di figura 2.3 è più astratto e totalmente diverso da quello che apparirebbe alla vista, ma è più ricco di informazioni. Rivela anche la velocità della corsa dell'armadillo.

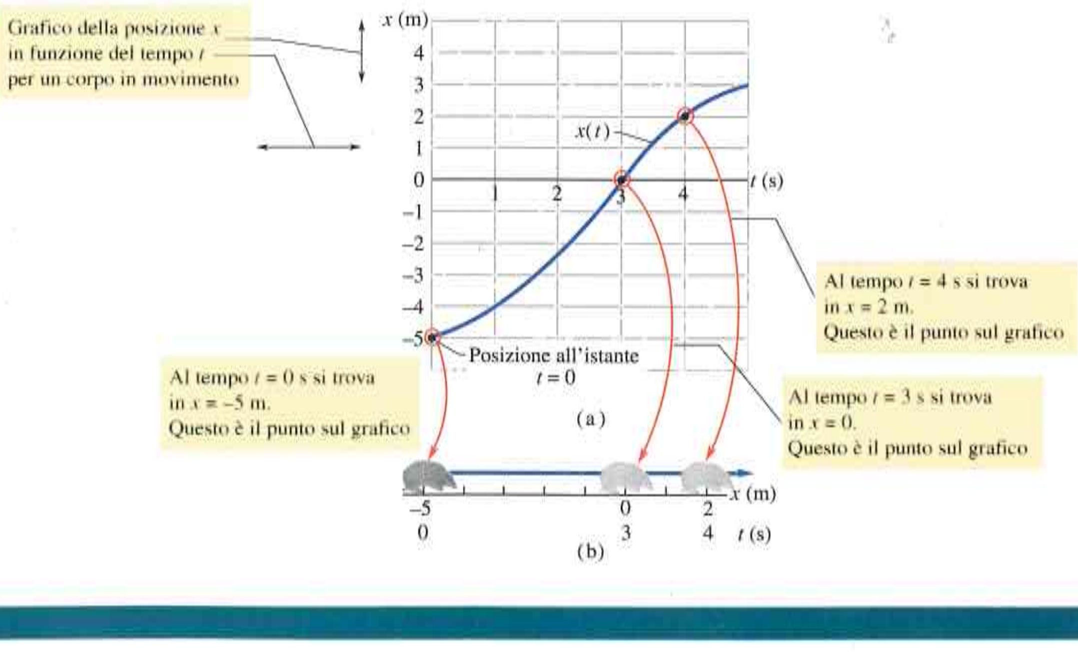


Figura 2.3 (a) Grafico di $x(t)$ per un armadillo in movimento. (b) Percorso associato al grafico. La scala sotto l'asse delle x mostra gli istanti in cui l'armadillo raggiunge certi valori di x. È mostrato anche il percorso associato al grafico per tre diversi istanti.

ISBN 978-88-08-18229-6

Nella domanda "a che velocità?" è implicita la valutazione di molte grandezze diverse. Una di esse è la **velocità vettoriale media** $\bar{v}$, che è il rapporto fra lo spostamento Δx che si verifica in un intervallo di tempo Δt e l'intervallo stesso:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \tag{2.2}$$

Questa notazione significa che all'istante t_1 l'oggetto occupa la posizione x_1 e all'istante t_2 la posizione x_2. Un'unità di misura comunemente usata per $\bar{v}$ è il metro al secondo (m/s). Nei problemi potete incontrare altre unità di misura, che tuttavia sono sempre della forma lunghezza/tempo.

Grafici. In un grafico di x in funzione di t, $\bar{v}$ è la **pendenza** della retta che unisce due punti sulla curva $x(t)$: un punto corrisponde a x_2 e t_2, l'altro a x_1 e t_1. Come lo spostamento, anche la velocità media $\bar{v}$ è una grandezza vettoriale, definita da un modulo e da una direzione e verso. Il suo modulo è uguale al valore assoluto della pendenza della retta. Una velocità $\bar{v}$ positiva (pendenza di segno positivo) ci dice che la linea è inclinata e sale verso destra; una $\bar{v}$ negativa (con inclinazione di segno negativo) corrisponde a una linea inclinata che sale verso sinistra. La velocità media ha sempre lo stesso segno dello spostamento, perché Δt nell'equazione 2.2 è un numero positivo.

La figura 2.4 mostra il calcolo di $\bar{v}$ per l'armadillo della figura 2.3 nell'intervallo di tempo da $t = 1$ fino a $t = 4$ s. Tracciamo la linea retta che congiunge il punto del percorso che rappresenta la posizione all'inizio dell'intervallo col punto che rappresenta la posizione alla fine dell'intervallo. Poi troviamo la pendenza $\Delta x/\Delta t$ della linea retta. La velocità media in quell'intervallo di tempo è

$$\bar{v} = \frac{6\ \text{m}}{3\ \text{s}} = 2\ \text{m/s}.$$

La **velocità scalare media** $\bar{u}$ è un modo diverso di descrivere *a che velocità* si muove una particella. Mentre la velocità vettoriale media riguarda lo spostamento Δx di una particella, quest'altro tipo di velocità media considera la lunghezza totale effettivamente percorsa (per esempio il numero di metri percorsi), indipendentemente dalla direzione. Cioè

$$\bar{u} = \frac{\text{distanza totale}}{\Delta t}. \tag{2.3}$$

La velocità scalare media differisce dalla velocità vettoriale media anche perché *non* include il verso e quindi manca di segno algebrico. A volte $\bar{u}$, tranne che per l'assenza di segno, è identica a $\bar{v}$. Ma, come si dimostra nel problema svolto 2.1, quando un oggetto torna indietro sul suo percorso, i risultati possono essere molto differenti.

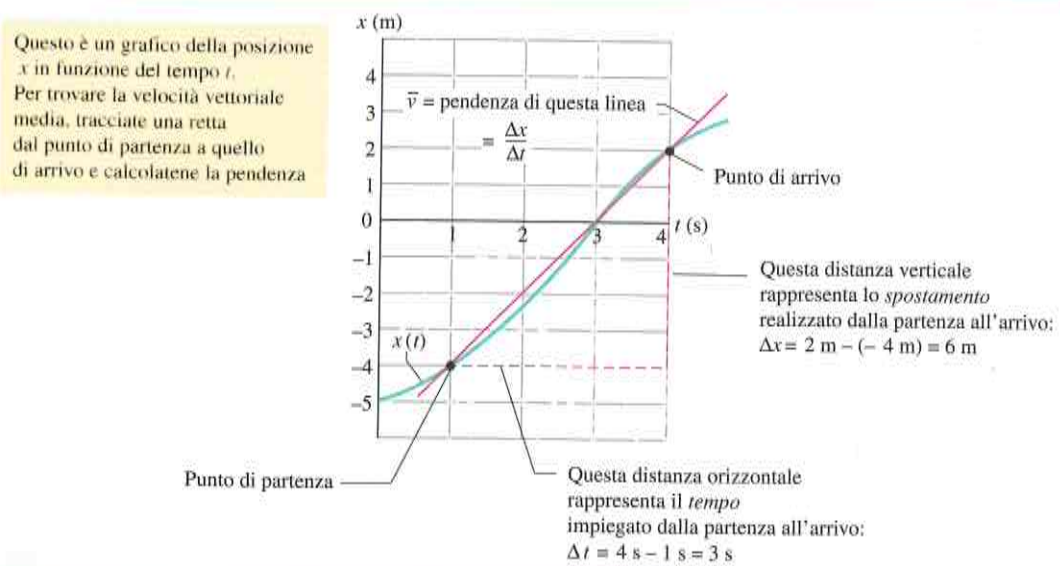


Figura 2.4 Calcolo della velocità vettoriale media fra $t = 1$ s e $t = 4$ s come pendenza della retta che congiunge i punti (sulla curva) che rappresentano i due istanti.

Nota importante (NdT). *Nell'uso comune, nella lingua italiana, con la parola «velocità» si indica quasi sempre la velocità scalare (in inglese «speed»), e non esiste nel linguaggio tecnico-scientifico un termine specifico che sia generalmente accettato (come l'inglese «velocity») per la velocità vettoriale. Poiché nella maggior parte dei casi il contesto rende inequivocabile, se non indifferente, il riferimento all'uno o all'altro concetto di velocità, in questo libro si specificherà in modo esplicito, a parole o simbolicamente come vedremo nel prossimo capitolo, se si tratti del vettore velocità (velocità vettoriale) oppure del suo modulo (velocità scalare) soltanto quando vi sia il rischio di ambiguità.*

PROBLEMA SVOLTO 2.1 Velocità vettoriale media, auto senza benzina

Alla guida di un'automobile, dopo aver percorso una strada rettilinea per 8,4 km a 70 km/h, siete rimasti senza benzina. Avete quindi proseguito a piedi, sempre nella stessa direzione, per 2,0 km fino al più vicino distributore, dove siete arrivati dopo 30 min di cammino.

(a) Qual è stato il vostro spostamento complessivo dalla partenza in auto all'arrivo a piedi alla stazione di servizio?

SOLUZIONE

Poniamo, per comodità, che il punto di partenza coincida con l'origine delle coordinate ($x_1 = 0$, $t_1 = 0$), e che vi siate spostati nel verso positivo. Il punto finale si trova a $x_2 = 8{,}4\ \text{km} + 2{,}0\ \text{km} = 10{,}4\ \text{km}$. L'idea chiave è ora sottrarre la vostra posizione iniziale da quella finale, entrambe giacenti lungo l'asse x, per ottenere lo spostamento Δx. Dall'equazione 2.1 si ottiene

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 10{,}4\ \text{km} - 0 = 10{,}4\ \text{km}.$$

Lo spostamento complessivo è dunque di 10,4 km nel verso positivo dell'asse x.

(b) Qual è l'intervallo di tempo Δt relativo all'intero spostamento?

SOLUZIONE

Conosciamo già l'intervallo di tempo Δt_{piedi} (0,50 h) per il percorso a piedi, ma ci manca l'intervallo di tempo Δt_{auto} trascorso in auto. Sappiamo tuttavia che lo spostamento in auto Δx_{auto} è di 8,4 km, percorso a una velocità media $\bar{v}$. L'idea chiave ci viene ora dall'equazione 2.2:

$$\bar{v}_{\text{auto}} = \frac{\Delta x_{\text{auto}}}{\Delta t_{\text{auto}}}.$$

Per ottenere il tempo di marcia in auto, inseriamo i dati numerici ed effettuiamo il calcolo

$$\Delta t_{\text{auto}} = \frac{\Delta x_{\text{auto}}}{\bar{v}_{\text{auto}}} = \frac{8{,}4\ \text{km}}{70\ \text{km/h}} = 0{,}12\ \text{h}.$$

Il tempo totale, dalla partenza all'arrivo, risulta così:

$$\Delta t = \Delta t_{\text{auto}} + \Delta t_{\text{piedi}} = 0{,}12\ \text{h} + 0{,}50\ \text{h} = 0{,}62\ \text{h}.$$

(c) Qual è stata dunque la velocità vettoriale media dalla partenza in auto all'arrivo a piedi? Lo si trovi sia numericamente sia graficamente.

SOLUZIONE

Dall'equazione 2.2 sappiamo che la velocità media per l'*intero tragitto* è data dal rapporto tra lo spostamento di 10,4 km relativo all'*intero tragitto* e il tempo di 0,62 h impiegato per coprire l'*intero tragitto*. Sostituendo nell'equazione 2.2 si ha:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10{,}4\ \text{km}}{0{,}62\ \text{h}} = +\ 16{,}8\ \text{km/h} \approx 17\ \text{km/h}.$$

Per trovare graficamente $\bar{v}$, dobbiamo tracciare innanzitutto $x(t)$, come nella figura 2.5, in cui i punti di partenza e di arrivo si trovano rispettivamente nell'origine e nel punto «distributore». L'idea chiave sta nell'osservare che la velocità vettoriale media è data dalla pendenza della retta che unisce questi due punti, vale a dire dal rapporto tra l'ordinata, 10,4 km, e l'ascissa, 0,62 h, che dà appunto 16,8 km/h.

(d) Supponiamo che, dopo le operazioni alla stazione di rifornimento, abbiate poi riportato il carburante fino alla macchina, impiegando nella sosta e nel viaggio di ritorno in totale 45 minuti. Qual è stata la velocità scalare media per tutto il percorso, dalla partenza in auto fino all'arrivo a piedi alla macchina con il carburante?

SOLUZIONE

Qui l'idea chiave sta nel considerare come velocità scalare media la lunghezza totale del cammino percorso dall'inizio alla fine, diviso per il corrispondente intervallo di tempo richiesto. La lunghezza dell'intero percorso è data dalla somma 8,4 km + 2,0 km + 2,0 km = 12,4 km.

Il tempo totale richiesto è 0,12 h + 0,50 h + 0,75 h = 1,37 h. Quindi l'equazione 2.3 ci dà

$$\bar{u} = \frac{12{,}4\ \text{km}}{1{,}37\ \text{h}} = 9{,}1\ \text{km/h}.$$

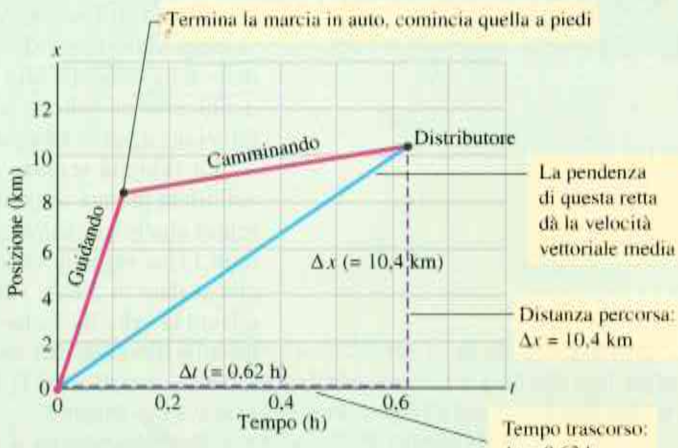


Figura 2.5 Problema svolto 2.1. Le linee marcate «Guidando» e «Camminando» sono le curve posizione/tempo per il guidatore-camminatore del problema. Le velocità sono assunte costanti. La pendenza della retta che collega l'origine con il punto marcato «Distributore» rappresenta la velocità vettoriale media per tutto il percorso.

ISBN 978-88-08-18229-6

2.2 VELOCITÀ ISTANTANEA: VETTORIALE E SCALARE

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di…

2.07 Calcolare la velocità istantanea di una particella in un certo momento, data la funzione che ne descrive la posizione in funzione del tempo.

2.08 Determinare la velocità istantanea di una particella in un certo momento, dato il grafico che ne descrive la posizione in funzione del tempo.

2.09 Identificare la velocità scalare come il modulo della velocità vettoriale.

Idee chiave

- La velocità istantanea, che spesso chiamiamo brevemente velocità, di una particella in moto è

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt},$$

in cui $\Delta x = x_2 - x_1$ e $\Delta t = t_2 - t_1$.

- La velocità istantanea (in un certo istante) si può riconoscere dalla pendenza (in quell'istante) della curva che descrive x in funzione di t.
- La velocità scalare è il valore assoluto, o modulo, del vettore velocità.

Velocità istantanea: vettoriale e scalare

Abbiamo finora esaminato due modi per descrivere quanto velocemente si muova un oggetto: la velocità vettoriale media e la velocità scalare media, misurate entrambe in un intervallo di tempo Δt. Ma la domanda "a che velocità?" si riferisce di solito alla velocità di spostamento di una particella in un istante dato, cioè alla sua **velocità vettoriale istantanea**.

La velocità vettoriale in qualunque istante si ottiene dalla velocità vettoriale media restringendo l'intervallo di tempo Δt in modo che si avvicini sempre più allo zero. Man mano che Δt diminuisce, la velocità vettoriale media si avvicina a un valore limite che è la velocità vettoriale in quell'istante:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \tag{2.4}$$

Si noti che v è, in un istante dato, la velocità con cui una particella sta cambiando la propria posizione x in funzione del tempo t, vale a dire che v è la derivata di x rispetto a t. Inoltre la velocità vettoriale v di una particella in qualunque istante t è rappresentata dalla pendenza della retta tangente alla curva nel punto di ascissa t. La velocità vettoriale istantanea è per definizione un vettore, ed è quindi definita, oltre che dal *modulo* o *intensità* o *ampiezza*, dalla direzione e verso ad essa associati.

La **velocità scalare** è il modulo della velocità vettoriale e cioè coincide con la velocità vettoriale privata di qualunque cenno alla direzione, sia nella definizione simbolica che nel segno algebrico. (*Attenzione*: la velocità e la velocità media possono essere alquanto differenti.) Una velocità vettoriale di +5 m/s e una di −5 m/s sono entrambe associate a una velocità scalare di 5 m/s, valore del modulo del vettore velocità. Il tachimetro di un'automobile misura la velocità scalare, non la velocità vettoriale, perché non può fornire alcuna indicazione sulla direzione del moto.

✔ VERIFICA 2

Le seguenti equazioni danno la posizione $x(t)$ di una particella in quattro diverse situazioni (in tutte le equazioni x è dato in metri, t in secondi e $t > 0$): (1) $x = 3t - 2$; (2) $x = -4t^2 - 2$; (3) $x = 2/t^2$; (4) $x = -2$. (a) In quale situazione la velocità vettoriale v è costante? (b) In quale altra v è diretta nel verso negativo delle x? (1),(4)

(2),(3)

ISBN 978-88-08-18229-6

PROBLEMA SVOLTO 2.2 Velocità vettoriale e pendenza di x rispetto a t; ascensore

La figura 2.6a rappresenta il moto della cabina di un ascensore che è inizialmente ferma, poi si muove verso l'alto (verso che consideriamo positivo) e infine si arresta. Tracciate la curva $v(t)$ come funzione del tempo.

SOLUZIONE

L'**idea chiave** in questo caso risiede nella possibilità di ricavare la velocità in qualsiasi momento dalla pendenza della curva $x(t)$ in quel momento. La pendenza, e quindi anche la velocità, è nulla negli intervalli che comprendono i punti a e d, in cui la cabina è ferma. Nell'intervallo bc la pendenza è costante e non nulla, quindi la cabina si muove a velocità costante e la pendenza di $x(t)$ è data da

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v = \frac{24\text{ m} - 4{,}0\text{ m}}{8{,}0\text{ s} - 3{,}0\text{ s}} = +4{,}0\text{ m/s}. \tag{2.5}$$

Il segno + significa che la cabina si muove nel verso positivo delle x. Questi valori sono registrati nel grafico della figura 2.6. Inoltre, quando la cabina comincia a salire e quando poi rallenta fino a fermarsi, la velocità v varia come indicato negli intervalli da 1 s a 3 s e da 8 s a 9 s. Della figura 2.6c parleremo nel paragrafo 2.3.

Partendo da un grafico $v(t)$ come quello della figura 2.6b, potremmo «risalire all'indietro» per ricavare l'andamento del grafico associato $x(t)$, della figura 2.6a. Se però non disponiamo di ulteriori informazioni, non possiamo determinare gli effettivi valori di x, visto che la $v(t)$ fornisce soltanto le *variazioni* di x. Per trovare queste variazioni di x durante un qualsiasi intervallo dobbiamo, sempre nel linguaggio del calcolo infinitesimale, calcolare l'area compresa «sotto la curva» $v(t)$ per il medesimo intervallo. Ad esempio, nell'intervallo da 3 a 8 durante il quale la velocità della cabina è 4,0 m/s, la variazione di x è data dall'«area» sotto la curva $v(t)$:

$$\Delta x = (4{,}0\text{ m/s})(8{,}0\text{ s} - 3{,}0\text{ s}) = +20\text{ m}. \tag{2.6}$$

Quest'area è positiva perché la curva $v(t)$ è tutta situata al di sopra dell'asse t. La figura 2.6a mostra che x aumenta effettivamente di 20 m in questo intervallo. Tuttavia la figura 2.6b non ci indica i *valori* di x all'inizio e alla fine dell'intervallo. Per questi abbiamo bisogno di ulteriori informazioni, per esempio del valore di x in un certo istante.

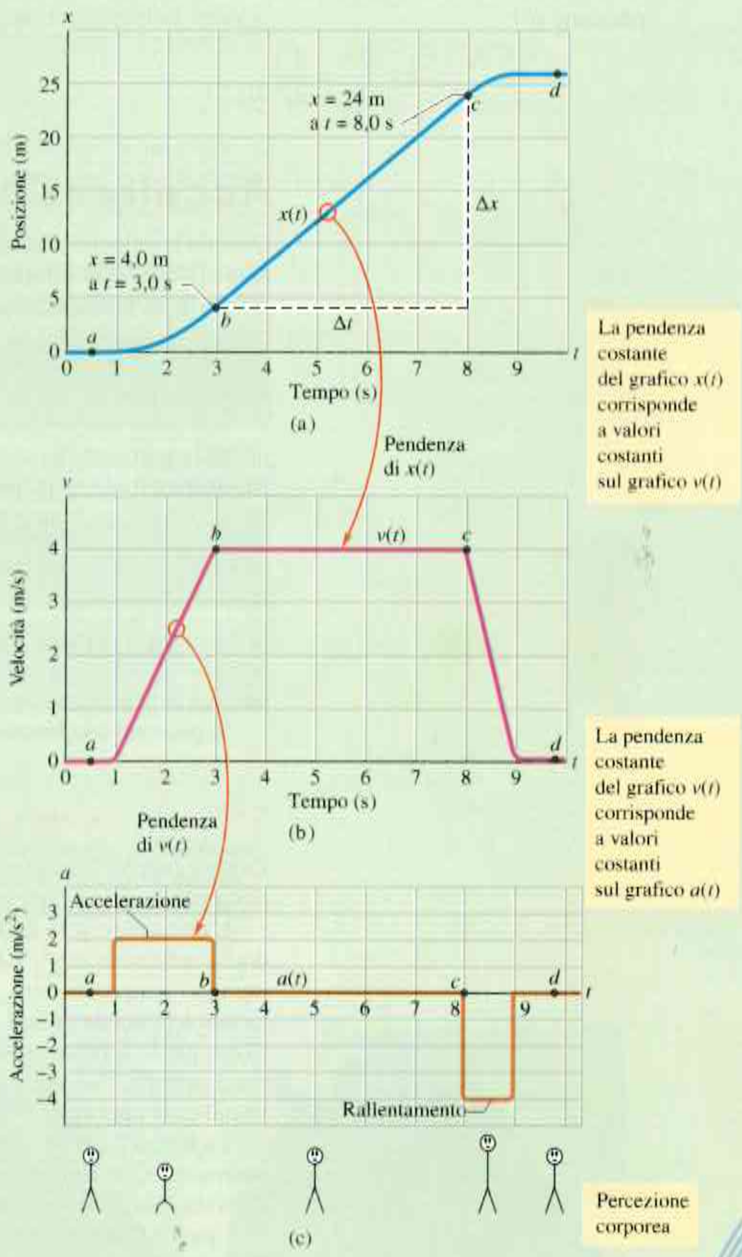


Figura 2.6 Problema svolto 2.2. (a) Curva $x(t)$ per la cabina di un ascensore che sale lungo l'asse x. (b) Curva $v(t)$ per la cabina. (c) Curva $a(t)$ per l'ascensore. È la derivata della curva $v(t)$. Gli omini in basso suggeriscono come il corpo dei passeggeri potrebbe rispondere alle accelerazioni.

2.3 ACCELERAZIONE

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di...

2.10 Applicare la relazione che intercorre tra l'accelerazione media di una particella, la sua variazione di velocità e l'intervallo di tempo in cui quest'ultima avviene.

2.11 Calcolare l'accelerazione istantanea di una particella in un certo momento, data la funzione che ne descrive la velocità rispetto al tempo.

2.12 Determinare l'accelerazione istantanea di una particella in un certo momento e la sua accelerazione media tra due istanti noti, data la funzione che ne descrive la velocità rispetto al tempo.

Idee chiave

- L'accelerazione media è il rapporto tra una variazione di velocità Δv e l'intervallo di tempo Δt in cui avviene:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{ove il segno algebrico indica il verso di } \bar{a}.$$

ISBN 978-88-08-18229-6

- L'accelerazione istantanea a, brevemente detta accelerazione, è la derivata prima della velocità $v(t)$ e la derivata seconda della posizione $x(t)$:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

- Su un grafico di v in funzione di t l'accelerazione a in qualsiasi istante t è rappresentata dalla pendenza della curva in corrispondenza di quell'istante.

Accelerazione

Quando la velocità di una particella varia, si dice che la particella è sottoposta a un'**accelerazione** (o che sta accelerando). Per il moto lungo un asse, l'**accelerazione media** $\bar{a}$ durante un intervallo di tempo Δt si calcola così:

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \tag{2.7}$$

in cui la particella ha velocità v_1 nell'istante t_1 e velocità v_2 nell'istante t_2. L'**accelerazione istantanea** (o semplicemente *accelerazione*) è la derivata della velocità rispetto al tempo:

$$a = \frac{dv}{dt}. \tag{2.8}$$

In linguaggio comune: *l'accelerazione di una particella in un certo istante è la rapidità di variazione della sua velocità in quell'istante.* Graficamente, l'accelerazione in qualunque punto è la pendenza della curva $v(t)$ in quel punto.

Si possono combinare le equazioni 2.8 e 2.4 in questo modo:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{2.9}$$

Detto a parole: *l'accelerazione di una particella in un certo istante è la derivata seconda della sua posizione $x(t)$ rispetto al tempo.*

L'unità di misura dell'accelerazione più comunemente usata è il metro al secondo quadrato: m/(s·s) o m/s^2. Altre unità di misura sono comunque tutte della forma lunghezza/(tempo · tempo), ovvero lunghezza/tempo^2. L'accelerazione è anch'essa una grandezza vettoriale e possiede quindi sia un'ampiezza o intensità (modulo) sia una direzione e un verso. Come per lo spostamento e per la velocità, il segno algebrico rappresenta il verso su un asse; precisamente, l'accelerazione è positiva quando è diretta nel verso positivo dell'asse, negativa nel caso opposto.

La figura 2.6 è un diagramma della posizione, velocità e accelerazione della cabina di un ascensore. Confrontate questa curva $a(t)$ con la curva $v(t)$: ogni punto della curva $a(t)$ è la derivata (ossia la pendenza) del punto corrispondente sulla curva $v(t)$. Quando v è costante (nel punto 0 oppure nel punto 4 m/s), la derivata è zero, e zero è anche l'accelerazione. Quando la cabina comincia a muoversi, la curva $v(t)$ ha una derivata positiva (la pendenza è positiva), il che significa che $a(t)$ è positiva. Quando la cabina rallenta fino a fermarsi, la derivata e la pendenza della curva $v(t)$ sono negative; quindi $a(t)$ è negativo.

Confrontate ora le pendenze della curva $v(t)$ durante le due fasi dell'accelerazione. Quella associata alla fase di arresto della cabina (chiamata comunemente *decelerazione*) è maggiore, perché la cabina si ferma in metà del tempo che impiega per raggiungere la sua velocità massima. La pendenza maggiore significa che l'intensità, cioè il modulo, della decelerazione è maggiore di quella dell'accelerazione, come è indicato nella figura 2.6c.

Sensazioni. Le sensazioni che proverebbe chi si trovasse nella cabina della figura 2.6 sono suggerite dagli omini disegnati sotto l'ultimo diagramma. Quando l'ascensore all'inizio accelera, si ha l'impressione di essere schiacciati verso il basso, e di essere invece stirati verso l'alto quando poi la cabina viene frenata fino all'arresto. Nell'intervallo di tempo intermedio non si avverte alcuna particolare sensazione. Il corpo umano reagisce alle accelerazioni (è un accelerometro), ma non alle velocità (non è un tachimetro). Quando si sta viaggiando in macchina a 90 km/h o in un aereo che vola a 900 km/h, non si ha la consapevolezza corporea del moto. Ma se la macchina o l'aereo variano velocemente la loro velocità, si può percepire nettamente il cambiamento, forse anche con spavento. Parte dell'eccitazione e del divertimento delle *montagne russe* di un Luna Park dipende dai cambiamenti improvvisi di velocità a cui si è sottoposti (sicché si paga per provare l'emozione di accelerazioni, non di velocità). Un esempio estremo è illustrato nella serie di fotografie della figura 2.7, scattate mentre una slitta a reazione viene rapidamente accelerata e poi rapidamente frenata fino all'arresto.

Unità g. Accelerazioni di valore elevato vengono talvolta espresse in termini di unità g, ove

$$1g = 9{,}8 \text{ m/s}^2. \qquad (2.10)$$

Vedremo nel paragrafo 2.4 che g rappresenta il modulo dell'accelerazione di un corpo in caduta libera vicino alla superficie terrestre. Su un vagoncino delle *montagne russe* si possono sperimentare per brevi istanti accelerazioni fino a $3g$, che vale $(3)(9{,}8 \text{ m/s}^2)$, ossia circa 29 m/s^2, per qualcuno più che sufficienti a giustificare il prezzo della corsa!

Segni. In molti dei più comuni esempi di accelerazione il segno ha il significato dettato dal senso comune: un'accelerazione positiva significa che la velocità di un oggetto (come un'automobile) sta aumentando, e un'accelerazione negativa significa che la velocità sta diminuendo (l'oggetto è sottoposto a rallentamento). Ben altro significato ha nelle scienze, e quindi in questo libro, il segno dell'accelerazione, che indica invece il verso in cui è diretto il vettore accelerazione; non vuol dire che l'oggetto sta aumentando o diminuendo la sua velocità.

Per esempio, se un'automobile dotata di una velocità iniziale $\bar{v} = -25$ m/s viene frenata fino all'arresto in 5,0 s, risulta $\bar{a} = +5 \text{ m/s}^2$: l'accelerazione è *positiva*, ma la macchina ha rallentato. La ragione è la differenza dei segni: il verso dell'accelerazione è opposto a quello della velocità.

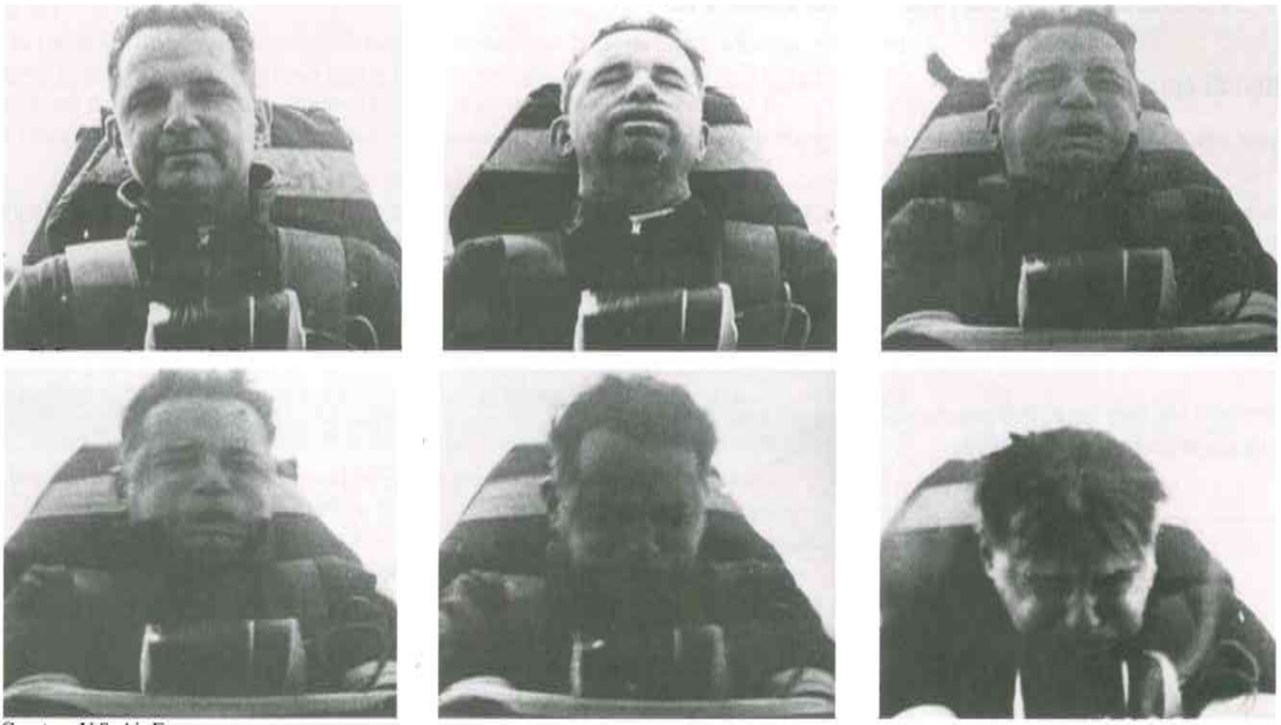
Vediamo un modo migliore di interpretare i segni:

> Se i segni di velocità e accelerazione sono gli stessi, l'oggetto sta aumentando la sua velocità; se i segni sono opposti, l'oggetto sta rallentando.

VERIFICA 3

(a) + ; (b) − ; (c) − ; (d) +

Un canguro si muove lungo l'asse x. Quale segno assume la sua accelerazione se si muove (a) nel verso positivo con velocità crescente, (b) nel verso positivo con velocità decrescente, (c) nel verso negativo con velocità crescente e (d) nel verso negativo con velocità decrescente?



Courtesy U.S. Air Force

Figura 2.7 Il colonnello J.P. Stapp su una slitta a reazione che viene portata ad alta velocità (accelerazione uscente dalla pagina) e quindi frenata molto rapidamente (accelerazione entrante nella pagina).

 ISBN 978-88-08-18229-6

PROBLEMA SVOLTO 2.3 Accelerazione e dv/dt

La posizione di una particella sull'asse x di figura 2.8 è data dall'equazione

$$x = 4 - 27t + t^3,$$

dove le unità di misura di x e t sono rispettivamente m e s.

(a) Dato che la posizione x varia col tempo t, la particella dev'essere in movimento. Trovate le funzioni $v(t)$ e $a(t)$ della particella.

SOLUZIONE

Per ottenere $v(t)$ si può calcolare la derivata di $x(t)$ rispetto a t e per ottenere l'accelerazione $a(t)$ si può calcolare la derivata di $v(t)$ sempre rispetto al tempo.

Calcoli. Derivando la funzione posizione otteniamo

$$v = -27 + 3t^2,$$

ove v è dato in m/s. Derivando la funzione velocità otteniamo

$$a = +6t.$$

Qui a è data in m/s^2.

(b) Esiste un valore di t per cui $v = 0$?

Calcoli. Eguagliando a zero l'espressione di (t) troviamo

$$0 = -27 + 3t^2,$$

che ha per soluzione

$$t = \pm 3 \text{ s}.$$

La velocità dunque è nulla sia 3 s prima sia 3 s dopo l'istante $t = 0$.

(c) Descrivete gli spostamenti della particella per $t \geq 0$.

Ragionamento. Dobbiamo esaminare le espressioni di $x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$.

Per $t = 0$ la particella si trova in $x = +4$ m e si muove verso sinistra alla velocità di -27 m/s: in quell'istante la sua accelerazione è nulla, giacché in quel momento non varia la sua velocità (fig. 2.8a).

Per $0 < t < 3$ continua a spostarsi verso sinistra, quindi con segno negativo, ma la sua accelerazione ora è finita e positiva. I segni di velocità e accelerazione sono opposti, quindi sta rallentando (fig. 2.8b).

A $t = 3$ la particella si arresta per un istante ($v = 0$) e ha raggiunto l'estremo sinistro della sua corsa sull'asse di figura 2.8. Sostituendo il valore $t = 3$ s nell'espressione di $x(t)$, si ottiene che la particella si trova in $x = -50$ m. La sua accelerazione è sempre positiva (fig. 2.8c).

Per $t > 3$ la particella si muove verso destra, il valore della sua accelerazione verso destra continua a crescere e il modulo della sua velocità, che è ora orientata verso destra, aumenta progressivamente (fig. 2.8d).

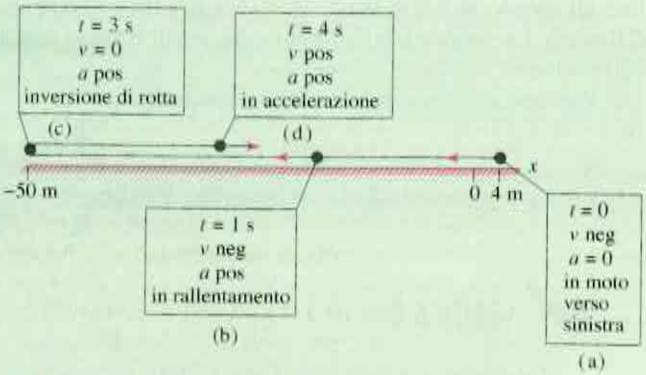


Figura 2.8 Problema svolto 2.3. Quattro momenti del moto della particella.

2.4 ACCELERAZIONE COSTANTE

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di…

2.13 Applicare le relazioni tra posizione, spostamento, velocità, accelerazione e tempo trascorso per una particella in accelerazione costante (tab. 2.1).

2.14 Calcolare la variazione di velocità di una particella integrando la sua funzione di accelerazione rispetto al tempo.

2.15 Calcolare la variazione di posizione di una particella integrando la sua funzione di velocità rispetto al tempo.

Idee chiave

Le cinque seguenti equazioni descrivono il moto rettilineo di una particella in accelerazione costante

$$v = v_0 + at,$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0),$$

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2,$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t,$$

$$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2.$$

Quando l'accelerazione non è costante, dette equazioni *non* sono valide.

Accelerazione costante: un caso particolare

In molti dei più comuni tipi di moto l'accelerazione è costante o pressoché costante. Si parla in questo caso di **moto rettilineo uniformemente accelerato.** Vedendo ad esempio che il prossimo semaforo sta mutando dal rosso al verde, in generale il guidatore imprime all'automobile un'accelerazione circa costante. (I grafici della posizione dell'auto, della sua velocità e accelerazione assomiglieranno a quelli della figura 2.9. Si noti che l'accelerazione nella figura 2.9c è costante, e di conseguenza la velocità nella figura 2.9b ha pendenza costante). Se poi deve rallentare fino a fermarsi, senza improvvisi ostacoli, l'accelerazione durante la frenata potrà anch'essa essere più o meno costante.

Casi simili sono così frequenti che per trattarli mettiamo qui in evidenza uno speciale sistema di equazioni. Un primo approccio all'elaborazione di queste equazioni è dato in questo paragrafo. Un secondo approccio verrà fornito nel prossimo paragrafo. In entrambi i paragrafi, e ogni volta che avrete da elaborare un problema di questo tipo, è da tener presente che *le equazioni sono valide soltanto nei casi in cui l'accelerazione è costante (o in cui si possa accettare un grado di approssimazione tale da poterla trattare come una costante).*

Prima equazione di base del moto rettilineo uniformemente accelerato. Quando l'accelerazione è costante, la distinzione fra accelerazione media e accelerazione istantanea perde di significato e possiamo scrivere l'equazione 2.7, con alcune variazioni di notazione, come segue:

$$a = \bar{a} = \frac{v - v_0}{t - 0}\,.$$

Qui v_0 è la velocità al tempo $t = 0$ e v è la velocità nell'istante generico successivo t. Possiamo trasformare questa equazione così:

$$v = v_0 + at. \tag{2.11}$$

Per verifica si può osservare che quest'ultima equazione si riduce a $v = v_0$ per $t = 0$, come previsto. Proviamo ora, per un ulteriore controllo, a derivare la (2.11): otteniamo dv/dt, che è appunto la definizione di a. La figura 2.9b traduce l'equazione 2.11 nel diagramma della funzione (t). La funzione è *lineare*, cioè rappresentata da una linea retta.

Seconda equazione di base del moto rettilineo uniformemente accelerato. In modo simile possiamo riscrivere l'equazione 2.2 (con qualche variazione nella notazione) come

$$\bar{v} = \frac{x - x_0}{t - 0}\,,$$

e quindi

$$x = x_0 + \bar{v}t, \tag{2.12}$$

in cui x_0 è la posizione della particella per $t = 0$ e $\bar{v}$ è la velocità media tra $t = 0$ e un istante successivo t.

Per la funzione lineare della velocità data dall'equazione 2.11, la velocità *media* in qualunque intervallo di tempo (per esempio fra $t = 0$ e un generico istante successivo t) è la media fra la velocità nel punto iniziale dell'intervallo ($= v_0$) e la velocità nel punto finale ($= v$). Per l'intervallo compreso fra $t = 0$ e un qualsiasi $t > 0$, quindi, la velocità media è

$$\bar{v} = \tfrac{1}{2}(v_0 + v)\,. \tag{2.13}$$

Sostituendo a v la sua espressione data dall'equazione 2.11, si ottiene

$$\bar{v} = v_0 + \tfrac{1}{2}at\,. \tag{2.14}$$

Infine, sostituendo a $\bar{v}$, nell'equazione 2.12, la sua espressione da quest'ultima equazione, si ricava l'equazione oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato.

$$x - x_0 = v_0t + \tfrac{1}{2}at^2\,. \tag{2.15}$$

Per verifica si può osservare che quest'ultima equazione, per $t = 0$, si riduce a $x = x_0$ come previsto. Proviamo ora, per un ulteriore controllo, a derivare la (2.15): otteniamo ancora, com'era prevedibile, l'equazione 2.11. La figura 2.9a è una rappresentazione grafica dell'equazione 2.15; la funzione è quadratica e pertanto la linea che la descrive è curva.

Le altre tre equazioni. Le equazioni 2.11 e 2.15 sono le *equazioni base per il caso di accelerazione costante* o moto rettilineo uniformemente accelerato; le si può usare per risolvere qualunque problema cinematico in cui l'accelerazione sia costante. Possiamo ottenere tuttavia altre relazioni utili in certe situazioni. Osserviamo innanzitutto che sono 5 le grandezze suscettibili di intervenire come variabili in qualunque problema che riguardi l'accelerazione costante, precisamente $(x - x_0)$, v, t, a, e v_0. Di solito una di queste grandezze non interessa il caso particolare oggetto del problema, *né come dato né come incognita*. Tre delle restanti grandezze sono quindi dichiarate come dati del problema, e viene chiesto di trovare la quarta.

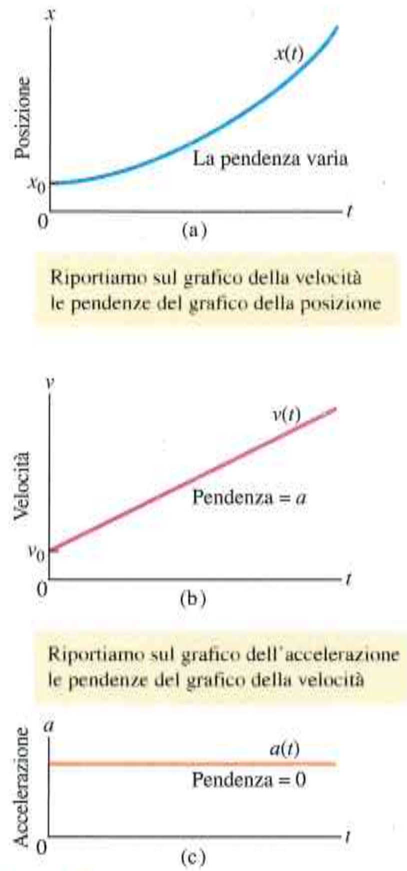


Figura 2.9 (a) Posizione $x(t)$ di una particella che si muove con accelerazione costante. (b) La sua velocità $v(t)$, data in ciascun punto dalla pendenza della curva in (a). (c) La sua accelerazione (costante), uguale alla pendenza (costante) di $v(t)$.

 ISBN 978-88-08-18229-6

Le equazioni 2.11 e 2.15 contengono ciascuna quattro di queste grandezze, ma non le stesse quattro. Nell'equazione 2.11 l'«ingrediente mancante» è lo spostamento $x - x_0$. Nell'equazione 2.15 è la velocità v. Si possono ancora combinare queste due equazioni in tre modi diversi, ricavandone tre equazioni aggiuntive, ciascuna delle quali implica una diversa «variabile mancante». Così, eliminando t, si ottiene

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0). \tag{2.16}$$

Questa equazione è utile se non conosciamo t e non ci viene richiesto di trovarlo. Possiamo, invece, eliminare l'accelerazione, lavorando su queste due equazioni, per formulare una nuova equazione in cui non compaia a:

$$x - x_0 = \tfrac{1}{2}(v_0 + v)t. \tag{2.17}$$

Possiamo infine eliminare v_0 e ottenere

$$x - x_0 = vt - \tfrac{1}{2}at^2. \tag{2.18}$$

Si noti la sottile differenza fra questa equazione e la (2.15), in cui *si partiva* dalla velocità iniziale v_0, mentre ora *si parte* da una velocità v all'istante t.

La tabella 2.1 elenca le equazioni base 2.11 e 2.15, insieme alle altre tre che abbiamo ricavato. Per risolvere un problema di accelerazione costante si deve valutare quale delle cinque variabili non intervenga nel problema, né come dato né come incognita. Scelta l'equazione corretta dalla tabella 2.1, basta sostituire i tre valori dati alle rispettive grandezze per trovare il valore dell'incognita. Invece di usare la tabella si può a volte arrivare più facilmente alla soluzione ricorrendo soltanto alle equazioni 2.11 e 2.15, combinate opportunamente per mettere in evidenza l'incognita.

TABELLA 2.1 **Equazioni del moto ad accelerazione costante o moto rettilineo uniformemente accelerato**[a]

Numero dell'equazione	Equazione	Grandezza mancante
2.11	$v = v_0 + at$	$x - x_0$
2.15	$x - x_0 = v_0t + \frac{1}{2}at^2$	v
2.16	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	t
2.17	$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	a
2.18	$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	v_0

[a] Prima di utilizzare le equazioni di questa tabella occorre assicurarsi che l'accelerazione sia effettivamente costante.

VERIFICA 4

Le seguenti equazioni danno la posizione $x(t)$ di una particella in quattro diverse situazioni. (a) $x = 3t - 4$; (b) $x = -5t^3 + 4t^2 + 6$; (c) $x = 2/t^2 - 4/t$; (d) $x = 5t^2 - 3$. A quali di queste situazioni si applicano le equazioni della tabella 2.1?

(a) 2.15; (b) NO; (c) NO; (d) 2.15

PROBLEMA SVOLTO 2.4 Gara di accelerazione

Un popolare video web mostra un aeroplano a reazione che gareggia in accelerazione su una pista assieme a un'automobile e a una motocicletta partendo da fermi (fig. 2.10). All'inizio è la moto a sopravanzare, ma alla fine vince il *jet* mentre anche l'auto batte la moto. Consideriamo solo queste ultime due ed assegniamo alcuni valori ragionevoli alle condizioni del moto. Supponiamo che i veicoli accelerino uniformemente, ma solo fino a raggiungere una loro velocità massima, in corrispondenza della quale l'accelerazione si annulla istantaneamente. La motocicletta dapprima sopravanza la macchina perché la sua accelerazione è $a_m = 8{,}40\ \mathrm{m/s^2}$ mentre quella dell'automobile è $a_a = 5{,}60\ \mathrm{m/s^2}$. Tuttavia alla fine perde la gara perché la sua velocità massima è $v_m = 58{,}8$ m/s mentre quella dell'auto è $v_a = 106$ m/s. Quanto tempo impiega l'auto a raggiunge la moto?

SOLUZIONE

Possiamo applicare le equazioni per il moto uniformemente accelerato a entrambi i veicoli, ma per la motocicletta dobbiamo separare il processo in due stadi: (1) dapprima essa percorre la distanza x_{m1} con velocità iniziale nulla e velocità finale $v_m = 58{,}8$ m/s animata da un'accelarazione $a_m = 8{,}40\ \mathrm{m/s^2}$; poi (2) percorre una distanza x_{m2} a velocità costante $v_m = 58{,}8$ m/s con accelerazione costantemente nulla. Si noti che abbiamo dato enfasi simbolica alle distanze senza conoscerne i valori. Nel risolvere i problemi di fisica un tale comportamento spesso aiuta, ma richiede una buona dose di *coraggiosa intuizione fisica*.

Calcoli. Per poter disegnare le figure e fare calcoli assumiamo che la gara si svolga in direzione dell'asse x in verso positivo, partendo dal punto $x = 0$ all'istante $t = 0$. Avremmo potuto scegliere qualunque altro valore iniziale, dato che siamo interessati a conoscere un intervallo di tempo e non a determinare, per dire, una certa ora di un dato pomeriggio, ma ci è più facile fissare le idee scegliendo numeri semplici. Sappiamo che l'auto sorpassa la moto, ma come si esprime matematicamente questa circostanza?

Significa che a un certo istante t i veicoli sono affiancati e occupano la medesima coordinata: x_a per l'auto e $x_{m1} + x_{m2}$ per la moto. In termini matematici possiamo scrivere:

$$x_a = x_{m1} + x_{m2}. \tag{2.19}$$

Stabilire questa prima relazione è di solito il passo più difficile nella risoluzione dei problemi di fisica: come si traduce l'affermazione a parole di una data circostanza in un'espressione matematica? Una finalità di questo libro e dei vostri studi consiste proprio nello sviluppare la capacità elaborativa di questo primo passo dei problemi, e ciò richiede allenamento alla pari di quello necessario per imparare il *karate*.

Ora esplicitiamo entrambi i membri della (2.19), a cominciare dal primo. L'automobile per raggiungere il punto di sorpasso x_a accelera da ferma. Ponendo nell'equazione 2.15 $x_0 = 0$ e $v_0 = 0$, abbiamo

$$x_a = \tfrac{1}{2} a_a t^2. \tag{2.20}$$

Per scrivere l'espressione di x_{m1} della motocicletta dobbiamo prima trovare il tempo t_m richiesto per raggiungere la velocità massima v_m utilizzando l'equazione 2.11. Sostituendovi $v_0 = 0$, $v = v_m = 58{,}8$ m/s e $a = a_m = 8{,}40$ m/s^2, otteniamo

$$t_m = \frac{v_m}{a_m} = \frac{58{,}8 \text{ m/s}}{8{,}40 \text{ m/s}^2} = 7{,}00 \text{ s}. \tag{2.21}$$

Ora applichiamo nuovamente la (2.15) per ricavare la distanza x_{m1} percorsa dalla moto nel primo stadio, ponendo $x_0 = 0$ e $v_0 = 0$ e

Figura 2.10 Problema svolto 2.4. Gara di accelerazione tra un aereo, un'automobile e una motocicletta dopo la partenza da fermi.

introducendo il risultato della (2.21):

$$x_{m1} = \tfrac{1}{2} a_m t_m^2 = \tfrac{1}{2} a_m \left(\frac{v_m}{a_m}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{v_m^2}{a_m}. \tag{2.22}$$

Durante il tempo rimanente $t - t_m$ la moto corre alla sua massima velocità e accelerazione nulla. Al fine di calcolare la distanza ricorriamo ancora alla (2.15) per questo secondo stadio del moto, ma ora la velocità iniziale è $v_0 = v_m$ (la velocità finale del primo stadio) e l'accelerazione è $a = 0$, di modo che la distanza percorsa in questo secondo stadio risulta

$$x_{m2} = v_m(t - t_m) = v_m(t - 7{,}00 \text{ s}). \tag{2.23}$$

Per concludere sostituiamo le equazioni 2.20, 2.22 e 2.23 nella (2.19), ottenendo

$$\frac{1}{2} a_a t^2 = \frac{1}{2}\frac{v_m^2}{a_m} + v_m(t - 7{,}00 \text{ s}). \tag{2.24}$$

Si tratta di un'equazione in t di secondo grado. Per risolverla, dopo aver introdotto i dati numerici, possiamo usare la formula delle equazioni di secondo grado o ricorrere a un programmino di sviluppo polinomiale su un calcolatore, trovando alla fine $t = 4{,}44$ s e $t = 16{,}6$ s.

Quale dei due valori rappresenta la risposta giusta? O forse l'auto affianca la moto per due volte? Non è così come mostra anche il video. Ne deduciamo che uno dei due risultati è matematicamente valido ma non ha significato fisico. Sappiamo tuttavia che la macchina sorpassa la moto *dopo* che questa ha raggiunto la sua velocità massima al tempo $t = 7{,}00$ s e quindi scartiamo la prima soluzione priva di significato e concludiamo che il sorpasso avviene all'istante

$$t = 16{,}6 \text{ s}.$$

La figura 2.11 presenta un grafico della posizione rispetto al tempo relativo ai due veicoli, ove è segnato il punto di sorpasso. Si osservi che al momento $t = 7{,}00$ s il tracciato per la moto cessa di essere curvo (velocità crescente) per diventare rettilineo (velocità costante).

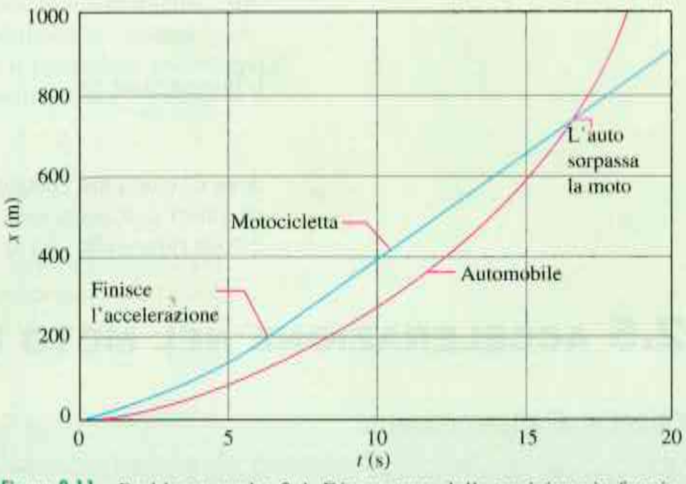


Figura 2.11 Problema svolto 2.4. Diagramma della posizione in funzione del tempo per l'auto e la moto.

Un'altra occhiata al moto uniformemente accelerato*

Le prime due equazioni della tabella 2.1 sono le equazioni fondamentali del moto rettilineo uniformemente accelerato, da cui sono derivate tutte le altre. Queste due equazioni si possono ottenere integrando l'espressione dell'accelerazione per a = costante. La definizione di a (nell'equazione 2.8) è

$$dv = a \, dt.$$

Nota che l'auto raggiunge la velocità massima dopo un tempo

$t = \frac{v_a}{a_a} = \frac{106 \text{ m/s}}{5.60 \text{ m/s}^2} = 18.9$ s

cioè dopo aver raggiunto la moto

* Questo paragrafo è destinato agli studenti che già conoscono gli integrali.

 ISBN 978-88-08-18229-6

Se operiamo l'*integrale indefinito* di entrambi i termini abbiamo

$$\int dv = \int a dt.$$

Dato che l'accelerazione è costante, si può portare fuori dall'integrale, ottenendo

$$\int dv = a \int dt,$$

ossia

$$v = at + C. \tag{2.25}$$

Per valutare la costante C poniamo $t = 0$, e quindi $v = v_0$. Sostituendo questi valori nell'equazione 2.25 (che deve essere valida per tutti i valori di t, incluso $t = 0$), risulta

$$v_0 = (a)(0) + C = C.$$

Con questa sostituzione l'equazione 2.25 prende la stessa forma dell'equazione 2.11.

Per ottenere l'altra equazione fondamentale (2.15) della tabella 2.1 riscriviamo così la definizione della velocità (eq. 2.4):

$$dx = v\, dt,$$

e, calcolando l'integrale indefinito di entrambi i membri, otteniamo

$$\int dx = \int v dt.$$

Normalmente la velocità non è costante, per cui non possiamo portarla fuori dall'integrale. Possiamo sostituire v con l'espressione data dall'equazione 2.11:

$$\int dx = \int (v_0 + at) dt.$$

Dato che è una costante, come lo è l'accelerazione, possiamo scrivere

$$\int dx = v_0 \int dt + a \int t dt.$$

L'integrazione dà

$$x = v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2 + C', \tag{2.26}$$

dove C' è un'altra costante d'integrazione. All'istante $t = 0$ abbiamo $x = x_0$. Sostituendo questi valori nell'equazione 2.26 si ottiene $x_0 = C'$. Se al posto di C' poniamo x_0, l'equazione 2.26 si riduce alla (2.15).

2.5 ACCELERAZIONE NEL MOTO DI CADUTA LIBERA

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di…

2.16 Rendervi conto che un corpo in volo libero (cioè privo di propulsioni), in qualsiasi direzione si muova, è soggetto a un'accelerazione di gravità costante (trascurando la resistenza dell'aria) di intensità g, che assumiamo pari a 9,8 m/s^2.

2.17 Applicare le equazioni per l'accelerazione costante della tabella 2.1 al moto di caduta libera.

Idee chiave

- Un esempio importante di moto rettilineo uniformemente accelerato è dato da un oggetto che sale o scende in volo verticale libero presso la superficie terrestre. Descrivono tale moto le equazioni per accelerazione costante, ove però operiamo due modifiche di notazione: (1) ci riferiamo all'asse verticale con l'asse y e verso positivo verso l'alto; (2) sostituiamo a con $-g$, in cui g rappresenta il modulo dell'accelerazione di gravità. In prossimità della superficie terrestre assumiamo

$$g = 9{,}8 \text{ m/s}^2.$$

ISBN 978-88-08-18229-6

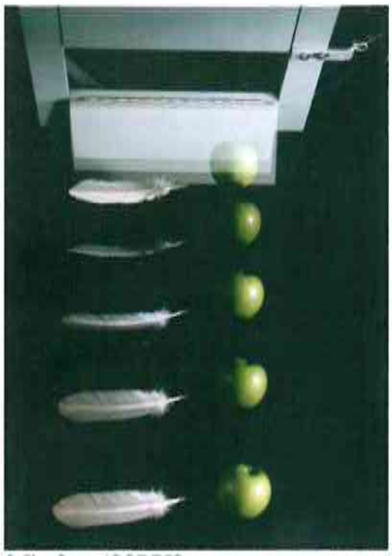
Accelerazione nel moto di caduta libera

Se, lanciando un oggetto verso l'alto o verso il basso, si potesse riuscire a eliminare l'effetto dell'aria sul suo moto, si troverebbe che la sua accelerazione verso il basso ha un valore ben definito, il cui modulo viene indicato con il simbolo g, ed è chiamata **accelerazione di gravità** o **di caduta libera**. L'accelerazione g è indipendente dalle caratteristiche dell'oggetto, quali la massa, la densità, la forma; è la stessa per qualsiasi oggetto.

Nella fotografia della figura 2.12 sono mostrati due esempi dell'accelerazione in caduta libera: è una serie stroboscopica di immagini fotografiche di una piuma e di una mela. Nella discesa questi due corpi sono soggetti a un'accelerazione verso il basso di valore g, e acquistano velocità.

Il valore di g varia leggermente con la latitudine e anche con la quota. Al livello del mare, nelle latitudini medie, il valore è di 9,8 m/s^2, valore che useremo per gli esercizi e i problemi di questo capitolo.

Le equazioni del moto rettilineo uniformemente accelerato, nella tabella 2.1, si applicano alla caduta libera vicino alla superficie della Terra. Cioè esse si applicano a qualunque oggetto in volo verticale, sia verso l'alto sia verso il basso, quando gli effetti dell'aria possono essere trascurati. Possiamo inoltre semplificare il loro utilizzo con due piccolissime modifiche. (1) La direzione del moto è collocata sull'asse verticale y invece che sull'asse x, con la direzione positiva di y rivolta verso l'alto. (Questo cambiamento eviterà la confusione nei prossimi capitoli quando verranno esaminate le combinazioni di moti orizzontali e verticali). (2) L'accelerazione in caduta libera risulta quindi negativa, cioè scende lungo l'asse y, e così nelle equazioni possiamo sostituire a con $-g$.



© Jim Sugar/CORBIS

Figura 2.12 Una piuma e una mela, in caduta libera nel vuoto, si muovono verso il basso con la stessa accelerazione g. L'accelerazione causa l'aumento della distanza tra le immagini nel corso della caduta, riprese a intervalli di tempo fissi. Si nota che in assenza d'aria la piuma e la mela percorrono la stessa distanza nello stesso tempo.

> L'accelerazione di gravità in prossimità della superficie terrestre vale: $a = -g = -9{,}8$ m/s^2, e il modulo dell'accelerazione è $g = 9{,}8$ m/s^2. Non attribuite a g il valore $-9{,}8$ m/s^2.

Si supponga di lanciare un pomodoro verticalmente verso l'alto con velocità iniziale v_0 e di riafferrarlo quando ritorna allo stesso livello di lancio. Durante il suo *volo libero* (dall'istante del lancio a quello della presa), si applicano le equazioni della tabella 2.1. L'accelerazione è sempre $a = -g = -9{,}8$ m/s^2 ed è quindi diretta verso il basso. La velocità naturalmente cambia, come indicano le equazioni 2.11 e 2.16: durante l'ascesa il modulo della velocità (positiva) diminuisce, fino a che si annulla momentaneamente. Poiché il pomodoro subisce un arresto in questo istante, occupa la posizione di massima altezza. Nella successiva discesa il modulo della velocità (negativa) aumenta.

VERIFICA 5

Se lanciate una palla verticalmente verso l'alto, qual è il segno dello spostamento (a) durante la salita e (b) durante la discesa? (c) Quanto vale l'accelerazione quando la palla è al culmine del suo percorso?

(a) positivo; (b) negativo; (c) $-g$

PROBLEMA SVOLTO 2.5 Tempo di salita, lancio di palla da baseball

Un lanciatore di baseball lancia la palla verticalmente lungo l'asse y con velocità iniziale di 12 m/s, come nella figura 2.13.

(a) Quanto tempo impiega la palla per raggiungere il punto più alto della sua traiettoria?

SOLUZIONE

Calcoli. L'idea chiave consiste nel considerare che, da quando la palla lascia la mano del lanciatore fino a quando vi ritorna, è sottoposta all'accelerazione di gravità $a = -g$. Dato che è costante, si applicano le equazioni della tabella 2.1. Come seconda idea chiave osserviamo che la palla raggiunge il vertice nell'istante in cui la sua velocità v si annulla. Conoscendo dunque v, a e la velocità iniziale $v_0 = 12$ m/s, volendo trovare t, applichiamo l'equazione 2.11, che contiene le quattro variabili.

→ $v = v_0 + at$

Riordinando abbiamo

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 12\ \text{m/s}}{-9{,}8\ \text{m/s}^2} = 1{,}2\ \text{s}.$$

→ $v^2 = v_0^2 + 2a(y - y_0)$

(b) A che altezza arriva rispetto al punto di partenza?

Calcoli. Prendiamo il punto di partenza come origine dell'asse y. Ponendo $y_0 = 0$ nella (2.16) scritta con y al posto di x, è $y - y_0 = y$ e $v = 0$ (alla massima altezza); si ha allora

$$y = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - (12\ \text{m/s})^2}{2(-9{,}8\ \text{m/s}^2)} = 7{,}3\ \text{m}.$$

ISBN 978-88-08-18229-6

(c) Quanto tempo impiegherà la palla per raggiungere un punto situato a 5,0 m sopra il punto di partenza?

$\rightarrow y - y_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

Calcoli. Conosciamo v_0, $a = -g$ e lo spostamento $y - y_0 = 5{,}0$ m; vogliamo trovare t. Ciò porta a scegliere la (2.15). Riscrivendola in funzione di y e ponendo $y_0 = 0$ troviamo

$$y = v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2,$$

ossia

$$5{,}0\ \text{m} = (12\ \text{m/s})t - (\tfrac{1}{2})(9{,}8\ \text{m/s}^2)t^2.$$

Omettendo per il momento le unità di misura (dopo averne constatato la congruità), possiamo riscriverla così:

$$4{,}9\, t^2 - 12t + 5{,}0 = 0.$$

Le soluzioni di questa equazione di secondo grado in t sono:

$$t = 0{,}53\ \text{s} \qquad \text{e} \qquad t = 1{,}9\ \text{s}.$$

Esistono due valori di t che risolvono l'equazione. Ciò non deve stupire, dato che la palla passa due volte per il punto $y = +5$ m, una prima volta in salita e una seconda in discesa.

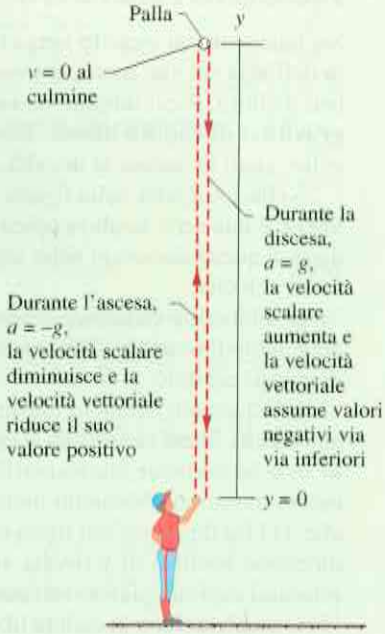


Figura 2.13 Problema svolto 2.5. Un giocatore di baseball lancia la palla verticalmente verso l'alto. Le equazioni della caduta libera si applicano sia in salita sia in discesa, purché si possano trascurare gli effetti dovuti alla presenza dell'aria.

2.6 INTEGRAZIONE CON METODO GRAFICO NELL'ANALISI DEL MOTO

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di…

2.18 Determinare la variazione di velocità di una particella per integrazione con il metodo grafico su un diagramma dell'accelerazione rispetto al tempo.

2.19 Determinare la variazione di posizione di una particella per integrazione con il metodo grafico su un diagramma della velocità rispetto al tempo.

Idee chiave

- Su un grafico dell'accelerazione a rispetto al tempo t la variazione di velocità è data da

$$v_1 - v_0 = \int_{t_0}^{t_1} a\, dt.$$

L'integrale individua un'area sul grafico:

$$\int_{t_0}^{t_1} a\, dt = \begin{pmatrix}\text{area sottesa dalla curva} \\ \text{entro gli estremi } t_0 \text{ e } t_1\end{pmatrix}.$$

- Su un grafico della velocità v rispetto al tempo t la variazione di posizione è data da

$$x_1 - x_0 = \int_{t_0}^{t_1} v\, dt.$$

L'integrale individua un'area sul grafico:

$$\int_{t_0}^{t_1} v\, dt = \begin{pmatrix}\text{area sottesa dalla curva} \\ \text{entro gli estremi } t_0 \text{ e } t_1\end{pmatrix}.$$

Integrazione con metodo grafico nell'analisi del moto

Integrale dell'accelerazione. Se disponiamo di un grafico che rappresenta l'accelerazione di un corpo in funzione del tempo, possiamo operare un'integrazione con metodo grafico per ottenere la sua velocità in qualsiasi istante. Abbiamo detto che l'accelerazione a è definita in termini di velocità come $a = dv/dt$. Pertanto, in base alla teoria dell'integrazione,

$$v_1 - v_0 = \int_{t_0}^{t_1} a\, dt. \tag{2.27}$$

In quest'equazione a secondo membro abbiamo un integrale definito (cioè destinato a dare risultati numerici piuttosto che una funzione). La velocità all'istante t_0 è rappresentata da v_0, mentre v_1 è la velocità in un istante successivo t_1. L'integrale definito si può ricavare da un diagramma che descrive $a(t)$, come quello di figura 2.14a. In particolare

$$\int_{t_0}^{t_1} a \, dt = \begin{pmatrix} \text{area sottesa dalla curva} \\ \text{entro gli estremi } t_0 \text{ e } t_1 \end{pmatrix}. \tag{2.28}$$

Considerato che l'unità di misura dell'accelerazione è 1 m/s^2 e che quella del tempo è 1 s, l'unità di area rappresentata nel grafico è

$$(1 \text{ m/s}^2)(1 \text{ s}) = 1 \text{ m/s}.$$

che è l'unità di velocità, come ci aspettavamo. Se la curva che descrive l'accelerazione giace al di sopra dell'asse x, l'area è positiva; viceversa l'area è negativa.

Integrale della velocità. In modo del tutto simile, essendo la velocità v definita in termini della posizione come $v = dx/dt$, abbiamo

$$x_1 - x_0 = \int_{t_0}^{t_1} v \, dt, \tag{2.29}$$

ove x_0 è la posizione al tempo t_0 e x_1 la posizione al tempo t_1. L'integrale definito della (2.29) si può desumere dal grafico $v(t)$, come quello di figura 2.14b. In particolare

$$\int_{t_0}^{t_1} v \, dt = \begin{pmatrix} \text{area sottesa dalla curva} \\ \text{entro gli estremi } t_0 \text{ e } t_1 \end{pmatrix}. \tag{2.30}$$

Se l'unità di velocità è 1 m/s e quella del tempo 1 s, l'area rappresentata nel grafico ha per unità

$$(1 \text{ m/s})(1 \text{ s}) = 1 \text{ m}.$$

che è l'unità di spostamento e posizione, come ci aspettavamo. L'area assumerà segno positivo o negativo in base allo stesso criterio già descritto per la curva $a(t)$ di figura 2.14a.

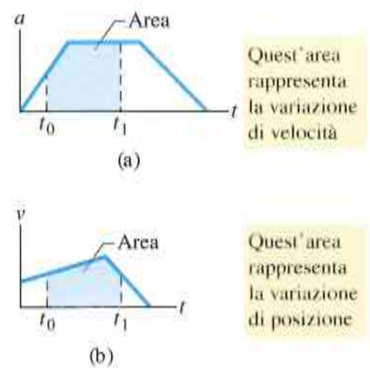


Figura 2.14 Aree sottese tra gli estremi t_0 e t_1 dalle curve che rappresentano (a) il grafico dell'accelerazione a rispetto al tempo t e (b) il grafico della velocità v rispetto al tempo t.

PROBLEMA SVOLTO 2.6 Integrazione grafica della funzione *a*(*t*), colpo di frusta

Il *colpo di frusta* è una lesione che può colpire i passeggeri di un veicolo in caso di tamponamento. I ricercatori negli anni '70 erano convinti che la lesione fosse dovuta al ripiegamento indietro della testa al di sopra dello schienale mentre quest'ultimo veniva spinto in avanti. Come rimedio introdussero i poggiatesta, ma i colpi di frusta nei tamponamenti continuarono a verificarsi.

Più recentemente in un test di studio delle lesioni cervicali conseguenti ai tamponamenti stradali, un manichino fissato al sedile viene spinto violentemente in avanti per simulare la collisione di una vettura che segue con velocità, poniamo, di 10,5 km/h. La figura 2.15a riporta l'accelerazione del torace e della testa del manichino durante tutte le fasi d'urto, che comincia all'istante $t = 0$. L'accelerazione del torace inizia 40 ms più tardi, il tempo in cui lo schienale si comprime e «assorbe» inizialmente l'impatto. L'accelerazione del capo inizia dopo altri 70 ms. Qual è la velocità del torace in questo momento?

SOLUZIONE

L'**idea chiave** consiste nel calcolare la velocità del torace per integrazione sul grafico della sua accelerazione $a(t)$. La sua velocità iniziale è $v_0 = 0$ all'istante $t_0 = 0$, inizio del processo. Vogliamo trovarne la velocità v_1 all'istante $t_1 = 110$ ms, quando la testa comincia ad accelerare.

Combinando le equazioni 2.27 e 2.28 otteniamo

$$v_1 - v_0 = \begin{pmatrix} \text{area sottesa dalla curva} \\ \text{entro gli estremi } t_0 \text{ e } t_1 \end{pmatrix}. \tag{2.31}$$

Per comodità di calcolo dividiamo l'area in questione in tre zone (fig. 2.15b). Da 0 a 40 ms abbiamo la zona A, che è di area nulla:

$$\text{area}_A = 0$$

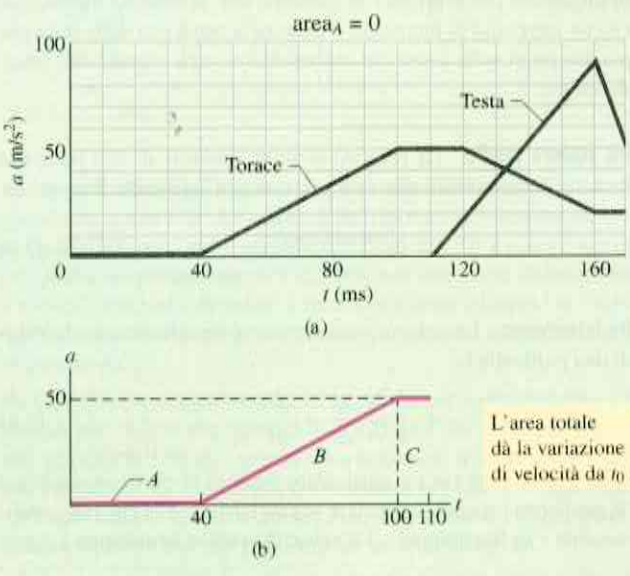


Figura 2.15 Problema svolto 2.6. (a) Curva per il torace e per la testa di un manichino sottoposto a una simulazione d'impatto in un veicolo tamponato. (b) Suddivisione in tre zone del tratto di curva relativo al torace, per facilitare il calcolo dell'area sottesa col metodo grafico.

 ISBN 978-88-08-18229-6

Da 40 ms a 100 ms si estende la zona B di forma triangolare, la cui area è

$$\text{area}_B = \tfrac{1}{2}(0{,}060\ \text{s})(50\ \text{m/s}^2) = 1{,}5\ \text{m/s}.$$

Da 100 ms a 110 ms la zona C ha forma di rettangolo con area

$$\text{area}_C = (0{,}010\ \text{s})(50\ \text{m/s}^2) = 0{,}50\ \text{m/s}.$$

Introducendo i dati nella (2.31) otteniamo

$$v_1 - 0 = 0 + 1{,}5\ \text{m/s} + 0{,}50\ \text{m/s},$$

da cui

$$v_1 = 2{,}0\ \text{m/s} = 7{,}2\ \text{km/h}.$$

Quando il capo comincia a muoversi, il torace ha già una velocità di 7,2 km/h. I ricercatori ritengono che tale differenza di velocità nelle prime fasi del processo sia responsabile delle lesioni al collo. Il ripiegamento all'indietro della testa avviene dopo e può aggravare il danno specie in assenza di poggiatesta.

RIEPILOGO & SOMMARIO

Posizione La *posizione* di una particella su un asse localizza la particella rispetto all'**origine**, o punto zero, dell'asse. La posizione può essere positiva o negativa, a seconda del lato in cui si trova rispetto all'origine, o zero se la particella sta nell'origine. Il **verso positivo** su un asse è il verso dei numeri positivi crescenti; il verso opposto è il **verso negativo**.

Spostamento Lo *spostamento* Δx di una particella è la variazione della sua posizione:

$$\Delta x = x_2 - x_1. \tag{2.1}$$

Lo spostamento è una grandezza vettoriale. È positivo se, nello spostamento, x è cresciuta, negativo in caso contrario.

Velocità vettoriale media Quando una particella si sposta dalla posizione x_2 alla posizione x_1 durante un intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, la sua *velocità vettoriale media* è

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \tag{2.2}$$

Il segno algebrico di $\overline{v}$ indica il verso del moto ($\overline{v}$ è una grandezza vettoriale). La velocità media non dipende dall'effettiva lunghezza percorsa da una particella, ma esclusivamente dalle sue posizioni iniziale e finale.

Su un grafico che esprima x in funzione di t, la velocità media, calcolata su un intervallo di tempo Δt, è data dalla pendenza della retta che collega i due punti sulla curva che corrispondono agli estremi dell'intervallo di tempo.

Velocità scalare media La *velocità scalare media* $\overline{u}$ di una particella dipende dalla distanza totale che essa percorre nell'intervallo di tempo Δt:

$$\overline{u} = \frac{\text{distanza totale}}{\Delta t}. \tag{2.3}$$

Velocità istantanea La *velocità istantanea* (o, semplicemente, la **velocità**) di una particella è

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \tag{2.4}$$

La velocità istantanea (in un particolare istante) si può rappresentare come la pendenza (in quel particolare istante) della curva che rappresenta la variabile x in funzione di t. La **velocità scalare istantanea** è uguale al modulo, ossia al valore assoluto, della velocità vettoriale istantanea.

Accelerazione media L'*accelerazione media* è il rapporto fra la variazione di velocità Δv che avviene in un intervallo di tempo Δt e l'intervallo stesso:

$$\overline{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \tag{2.7}$$

in cui il segno algebrico indica il verso di $\overline{a}$.

Accelerazione istantanea L'*accelerazione istantanea* (o semplicemente **accelerazione**) è la «rapidità» di variazione della velocità, e la derivata seconda della posizione $x(t)$ rispetto al tempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{2.8, 2.9}$$

Su un diagramma che rappresenta v in funzione di t la pendenza della curva in un punto t rappresenta l'accelerazione a in quell'istante.

Accelerazione costante Le 5 equazioni della tabella 2.1 descrivono il moto per il caso di accelerazione costante:

$$v = v_0 + at \tag{2.11}$$

$$x - x_0 = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \tag{2.15}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \tag{2.16}$$

$$x - x_0 = \tfrac{1}{2}(v_0 + v)t \tag{2.17}$$

$$x - x_0 = vt - \tfrac{1}{2}at^2. \tag{2.18}$$

Queste equazioni *non sono valide* quando l'accelerazione *non è costante*.

Accelerazione in caduta libera Un esempio particolarmente interessante di moto rettilineo con accelerazione costante è quello di un oggetto che sale o cade liberamente vicino alla superficie della Terra. Le equazioni dell'accelerazione costante descrivono questo tipo di moto, ma noi introduciamo due sostituzioni nella notazione: (1) riferiamo il moto all'asse y considerato verticale, con direzione positiva $+y$ verso l'alto; (2) sostituiamo $-g$ ad a, essendo g il valore assoluto dell'accelerazione di gravità. Vicino alla superficie della Terra, $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

QUESITI

1. Nella figura 2.16 quattro oggetti si muovono da un punto iniziale a un punto finale lungo i percorsi indicati. I percorsi attraversano una griglia di quattro rette parallele equidistanti. Ponete gli oggetti in ordine secondo i valori decrescenti di (a) velocità vettoriale media, (b) velocità scalare media.

(a) tutti uguali
(b) 4, 1 e 2, 3

ISBN 978-88-08-18229-6

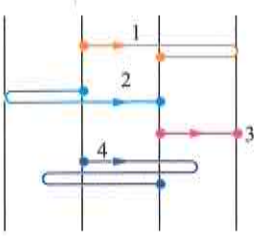


Figura 2.16 Quesito 1.

2. La figura 2.17 mostra un diagramma della posizione di una particella lungo l'asse x in funzione del tempo. (a) Al tempo $t = 0$ qual è il segno del vettore posizione? La velocità della particella è positiva, negativa o nulla a (b) $t = 1$ s, (c) $t = 2$ s e (d) $t = 3$ s? (e) Quante volte la particella passa attraverso il punto $x = 0$?

(a) −, vel > 0
(b) 0, vel > 0
(c) +, vel = 0
(d) 0, vel < 0
(e) 2

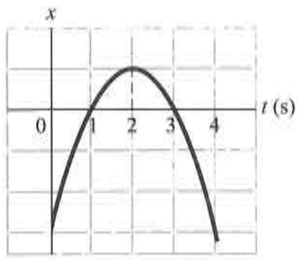


Figura 2.17 Quesito 2.

3. La figura 2.18 mostra un diagramma della velocità rispetto al tempo di una particella che si muove lungo un asse. I punti 1 e 4 rappresentano il massimo e minimo della funzione, rispettivamente, mentre i punti 2 e 6 hanno medesima ordinata. Stabilire la direzione del moto (a) all'istante $t = 0$ e (b) nel punto 4. (c) In quale dei punti indicati la particella cambia verso? (d) Ordinate i sei punti secondo i valori decrescenti del modulo dell'accelerazione.

(a) +
(b) −
(c) 3, 5
(d) 2,6, ~~5,6~~ uguali
3,5 uguali
1,4 a = 0

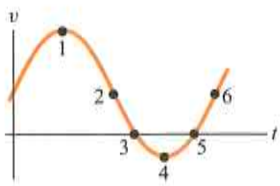


Figura 2.18 Quesito 3.

4. La velocità $v(t)$ di una particella in quattro diversi casi è data dalle seguenti equazioni: (a) $v = 3$; (b) $v = 4t^2 + 2t - 6$; (c) $v = 3t - 4$; (d) $v = 5t^2 - 3$. In quali di questi casi si possono applicare le equazioni della tabella 2.1?

5. La figura 2.19 illustra un panetto di burro che viene lanciato in alto passando davanti a tre finestre uguali. Mettete le finestre in ordine secondo i valori decrescenti di (a) velocità scalare media del panetto mentre le attraversa, (b) tempo di transito, (c) modulo dell'accelerazione durante il transito, (d) variazione Δv della velocità durante il passaggio.

Figura 2.19 Quesito 5.

6. Al tempo $t = 0$ una particella che viaggia lungo l'asse x si trova nella posizione $x_0 = -20$ m. I segni della velocità iniziale della particella v_0 (al tempo t_0) e della sua accelerazione costante a sono, rispettivamente, per quattro diverse situazioni: (1) +, +; (2)+, −; (3) −, +; (4) −, −. In quale situazione la particella (a) si trova momentaneamente ferma, (b) passa prima o poi dall'origine (dandole sufficiente tempo) e (c) non passerà mai dall'origine?

7. All'istante $t = 0$ un'auto azzurra inizialmente ferma comincia ad accelerare con modulo costante di 2,0 m/s^2 nella direzione dell'asse x partendo dal punto $x = 0$. All'istante $t = 2$ s un'auto rossa che viaggia su una corsia parallela nella stessa direzione passa dal punto $x = 0$ con velocità di 8,0 m/s e accelerazione di 3,0 m/s^2. Quali due equazioni occorre mettere a sistema per calcolare l'istante in cui l'auto rossa sorpassa quella azzurra? (Utile per risolvere il problema 51.)

8. Immaginate che su un pallone aerostatico a un passeggero distratto sfugga una mela fuori dal parapetto, mentre il pallone è in ascesa. All'istante in cui la mela comincia a cadere il pallone sta accelerando verso l'alto con intensità di 4,0 m/s^2 e ha una velocità sempre verso l'alto di modulo 2,0 m/s. Stabilire (a) il modulo e (b) il verso dell'accelerazione al momento del rilascio. (c) In tale momento la velocità della mela è positiva, negativa o nulla? (d) E qual è il suo modulo nel medesimo istante? (e) Nei momenti immediatamente successivi la velocità della mela aumenta, diminuisce o resta costante?

PROBLEMI

PARAGRAFO 2.1 Posizione, spostamento e velocità media

•**1.** Se state guidando un'auto alla velocità di 90 km/h, quanti metri percorrete durante una momentanea chiusura degli occhi di 0,50 s dovuta a uno starnuto?

•**2.** Il primato mondiale di velocità per una bicicletta stabilito nel 1992 da Chris Huber fu misurato su una lunghezza di 200,0 m percorsi in un tempo di 6,509 s. Nel 2001 lo batté Sam Whittingham, sopravanzando il primato di ben 19,0 km/h. Che tempo impiegò Whittingham per percorrere i 200,0 m?

•**3.** Un'automobile viaggia su un rettilineo per 40 km alla velocità di 30 km/h. Prosegue poi nella stessa direzione per altri 40 km a 60 km/h. (a) Qual è la velocità vettoriale media del veicolo su questo percorso di 80 km? (Supponiamo che sia nel verso positivo delle x.) (b) E la velocità scalare media? (c) Tracciate la curva che esprime x in funzione di t indicando come si determina sul grafico la velocità vettoriale media.

•**4.** Un'auto percorre un tratto in salita alla velocità di 40 km/h e poi il medesimo tratto in discesa alla velocità di 60 km/h. Qual è la sua velocità media durante la percorrenza complessiva di entrambe le tratte?

•**5.** La posizione di un oggetto che si muove in linea retta è data dall'espressione $x = 3t - 4t^2 + t^3$, ove x è dato in metri e t in secondi. Qual è la sua posizione per i seguenti valori di t: (a) 1 s, (b) 2 s, (c) 3 s e (d) 4 s? (e) Qual è lo spostamento dell'oggetto nell'intervallo di tempo tra $t = 0$ e $t = 4$ s? (f) Qual è la velocità media nell'intervallo tra $t = 2$ e $t = 4$ s? (g) Tracciate la curva $x(t)$ per $0 \le t \le 4$ s e costruite sul grafico la risposta al quesito (f).

•**6.** Calcolate la velocità media di un atleta per i seguenti due casi. (a) Marcia per 73,2 m alla velocità di 1,22 m/s e poi corsa per altri 73,2 m alla velocità di 3,05 m/s su una pista rettilinea. (b) Marcia per 1,00 min alla velocità di 1,22 m/s e poi corsa ancora per 1,00 min alla velocità di 3,05 m/s, sempre in rettilineo. (c) Tracciate la curva $x(t)$ per i due casi e indicate come si trovano graficamente le velocità medie.

••**7.** In una corsa sulla distanza di 1 km l'atleta numero 1 sulla corsia 1 (tempo: 2 min 27,95 s) è sembrato più veloce dell'atleta numero 2 sulla corsia 2 (tempo: 2 min 28,15 s). Tuttavia vi è il sospetto che la lunghezza L_2 della corsia 2 sia maggiore della lunghezza L_1 della corsia 1. Quanto può essere al massimo la differenza $L_2 - L_1$ per poter proclamare con certezza vincitore l'atleta numero 1?