ISBN 978-88-08-18229-6

Un blocco scivola giù per un piano inclinato con angolo di pendenza velocità costante. Viene quindi respinto su per lo stesso piano inclina-:on velocità iniziale v_0. (a) Quanto salirà lungo il piano prima di arre-'si? (b) E in seguito scivolerà giù di nuovo? Giustificate la risposta.

Una locomotiva accelera un treno di 25 vagoni su un binario in piano. ni vagone ha una massa di $5{,}0 \cdot 10^4$ kg ed è soggetto a una forza di ito dipendente dalla velocità secondo l'espressione $f = (250\ \mathrm{N \cdot s/m})v$. ando la velocità del treno è 30 km/h, l'accelerazione vale 0,20 m/s^2. Qual è la tensione nel gancio fra la locomotiva e il primo vagone? (b) questa rappresenta la massima forza che la locomotiva è in grado di luppare, qual è il pendio più ripido sul quale può viaggiare alla veloci-li 30 km/h?

La figura 6.38 mostra una casa costruita su un poggio in vicinanza di i scarpata a $\theta = 45°$. Uno studio geologico consiglia di ridurne la pen-ıza per timore che gli strati superiori del terreno possano scorrere verso ›asso rispetto agli strati sottostanti. Se il coefficiente di attrito statico due strati adiacenti è 0,5, qual è il minimo angolo ϕ di cui si dovrebbe urre la pendenza attuale per impedire lo scorrimento?

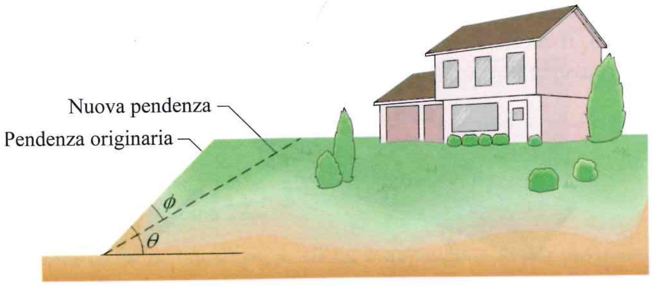


Figura 6.38 Problema 49.

. Qual è la velocità limite di una palla sferica di massa 6,00 kg e ;gio 3,00 cm quando il coefficiente aerodinamico è 1,60? La palla de in aria (massa volumica dell'aria = 1,20 kg/m^3).

. Una vettura di massa 10,7 kN affronta alla velocità di 13,4 m/s una rva non sopraelevata di raggio 61,0 m. (a) Qual è il modulo della rza d'attrito necessaria per mantenerla in strada? (b) Un coefficiente attrito statico pari a 0,350 sarebbe sufficiente allo scopo?

. Un bambino mette il cestino della merenda sul bordo esterno di una ›stra di raggio 4,6 m che compie un giro ogni 30 s. (a) Qual è la velo-ià di un punto sul bordo della giostra? (b) Quanto deve essere come inimo il coefficiente di attrito statico fra la giostra e il cestino perché ıesto rimanga al suo posto?

. Un pilota acrobata guida un'auto su un dosso avente un raggio di ırvatura verticale R = 250 m, come mostra la figura 6.39. Qual è la assima velocità che può tenere senza che l'auto si stacchi dal fondo radale nel punto più elevato?

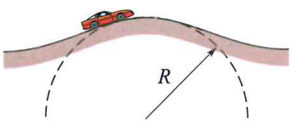


Figura 6.39 Problema 53.

I. Uno studente, reso folle dall'ultimo esame, usa una forza P di inten-ità 80 N per spostare un blocco di massa 5,0 kg, come illustrato nella ;ura 6.40, facendolo strisciare contro il soffitto della sua stanza. Quale ırà l'intensità dell'accelerazione del blocco per $\mu_k = 0{,}40$?

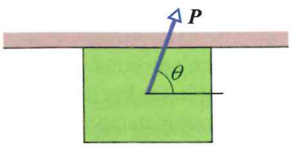


Figura 6.40 Problema 54.

55. Al blocco di massa 5,0 kg posto sul piano inclinato di un angolo $\theta = 37°$ della figura 6.41 è applicata la forza orizzontale $\boldsymbol{F}$ di intensità 50 N. Fra blocco e piano è $\mu_k = 0{,}30$. Qual è (a) il modulo e (b) la direzione dell'accelerazione del blocco sapendo che la sua velocità iniziale è di 4,0 m/s? (c) Con la forza $\boldsymbol{F}$ sempre applicata, quanto salirà lungo il piano? (d) Che cosa avverrà dopo che il blocco avrà raggiunto il punto più alto? Giustificate la vostra risposta.

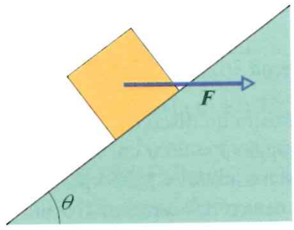


Figura 6.41 Problema 55.

56. Un treno veloce percorre un tratto di binario ad arco circolare piano orizzontale di raggio 470 m a velocità di modulo costante. Un viaggiatore di massa 51,0 kg è sottoposto a una forza da parte del vagone di componenti orizzontale e verticale aventi intensità rispettivamente di 210 N e 500 N. (a) Qual è il modulo della risultante di tutte le forze agenti sul viaggiatore? (b) Che velocità ha il treno?

57. Un ciclista pedala su una pista circolare di raggio 25,0 m alla velocità costante di 9,00 m/s. La massa complessiva del ciclista e della bicicletta è 85,0 kg. Calcolate l'intensità (a) della forza di attrito esercitata dalla pista sulla bicicletta e (b) della forza *netta* esercitata dalla pista sulla bicicletta.

58. Una rocciatrice di massa 49 kg sta scalando un «camino» fra due lastre di roccia verticali come nella figura 6.42. Il coefficiente di attrito statico fra scarpe e roccia è 1,2, quello fra la schiena e la roccia 0,80. Ella riduce la spinta contro la roccia fino a che le scarpe e la schiena siano sul punto di scivolare. (a) Disegnare un diagramma delle forze relativo alla rocciatrice. (b) Qual è la sua spinta sulla roccia? (c) Quale parte del suo peso è contrastata dalla forza d'attrito sulle scarpe?

Figura 6.42 Problema 58.

59. Dovete spingere una cassa di peso 165 N su un pavimento con coefficiente d'attrito statico di 0,510 e dinamico di 0,32. La forza applicata è orizzontale. (a) Qual è l'intensità di spinta necessaria per avviarla? (b) E per mantenerla in moto uniforme? (c) Se manteneste la stessa intensità di spinta calcolata in (a), che accelerazione subirebbe la cassa?

60. Un disco da hockey di massa 110 g scivola sul ghiaccio per 15 m prima di fermarsi. (a) Se la velocità iniziale era 6,0 m/s, qual è l'intensità della forza d'attrito sul disco durante la corsa? (b) Qual era il coefficiente d'attrito fra disco e ghiaccio?

CAPITOLO 7

Energia cinetica e lavoro

7.1 ENERGIA CINETICA

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di…

7.01 Applicare la relazione tra l'energia cinetica di una particella, la sua massa e la sua velocità.

7.02 Sapere che l'energia cinetica è una grandezza scalare.

Idee chiave

- L'energia cinetica K associata al moto di una particella di massa m e di velocità v, purché questa sia molto minore della velocità della luce, è

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad \text{(energia cinetica).}$$

L'aspetto fisico

Uno degli scopi fondamentali della fisica è lo studio di una cosa di cui parlano tutti: l'energia. Ovvio che l'argomento sia importante e difatti la nostra civiltà si fonda proprio sull'energia che l'uomo sa procurarsi e utilizzare efficacemente.

Per esempio, tutti sappiamo che qualsiasi movimento richiede energia: la richiede un attraversamento dell'oceano, un sollevamento di materiali in cima a un edificio, una spedizione di approvvigionamenti su una stazione spaziale orbitante o il lancio di una palla. Spendiamo somme ingentissime di denaro per acquistare energia da consumare. Sono scoppiate guerre a causa delle risorse energetiche e altre guerre si sono concluse grazie all'impiego da parte di uno dei contendenti di inattese e soverchianti quantità di energia. Tutti conoscono innumerevoli esempi di energia e del suo utilizzo, ma che cosa significa in realtà il termine *energia*?

Che cos'è l'energia?

Il significato di *energia* è così vasto che scriverne una definizione chiara è davvero difficile. Se ci limitiamo all'aspetto tecnico, l'energia è una grandezza fisica scalare associata allo stato (o condizione) di uno o più corpi. È però una definizione troppo vaga per esserci d'aiuto in questo momento.

Potrebbe accompagnarci almeno nei primi passi una definizione meno rigida. Diciamo che l'energia è un numero che attribuiamo a un insieme di uno o più corpi. Se una forza interviene a modificare lo stato di uno dei corpi, ad esempio muovendolo, il numero che rappresenta l'energia cambia. Dopo infinite osservazioni gli scienziati e i tecnici si sono accorti che, stabilendo con cura il criterio di assegnazione di questo numero, esso torna utile per prevedere i risultati sperimentali e, ancor più importante, per progettare macchine, come gli aeroplani. Un tale successo è conseguenza di una sorprendente proprietà del nostro Universo: l'energia si può trasformare da una forma a un'altra e può trasferirsi da un corpo a un altro, ma la quantità di energia complessiva rimane sempre invariata (l'energia *si conserva*). A questo *principio di conservazione dell'energia* non è mai stata osservata eccezione alcuna.

Immaginiamo che le varie forme di energia siano rappresentate da numeri analoghi a quelli che individuano il denaro depositato in altrettanti conti bancari. Siano anche stabilite regole su come si attribuiscono i numeri al denaro e su come esso si possa convertire. Si possono trasferire le unità monetarie che rappresentano il denaro da un conto all'altro o da un sistema a un altro, magari anche per via elettronica, cosa che non comporta alcun movimento materiale. Ciò nonostante si deve sempre rendere conto della totalità del denaro depositato (totale delle unità che rappresentano il denaro): questo numero complessivo si conserva.

 ISBN 978-88-08-18229-6

In questo capitolo ci concentreremo su una sola forma di energia, quella *cinetica*, e su una sola modalità di trasferimento dell'energia, il *lavoro*. Nel resto del libro studieremo man mano altre forme di energia e il modo in cui esprimere il principio di conservazione, che ci permetterà di risolvere equazioni.

Energia cinetica

L'**energia cinetica** è l'energia associata allo *stato di moto* del corpo. Quanto più veloce è l'oggetto considerato, tanto maggiore è la sua energia cinetica. Quando l'oggetto è a riposo, la sua energia cinetica è zero.

Se la velocità v di un corpo di massa m è notevolmente inferiore a quella della luce, si può definire l'energia cinetica come

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2. \tag{7.1}$$

Per esempio, se ci passa vicino un'anatra di massa 3,0 kg alla velocità di 2,0 m/s, la sua energia cinetica è di 6,0 kg · m^2/s^2; ovvero associamo questo numero al moto dell'anatra.

L'unità di misura SI dell'energia cinetica (così come di qualsiasi altra forma di energia) è il **joule** (J), dal nome del fisico inglese del XIX secolo James Prescott Joule, ed è definita come

$$1 \text{ joule} = 1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2. \tag{7.2}$$

L'anatra del nostro esempio possiede dunque un'energia cinetica di 6,0 J.

PROBLEMA SVOLTO 7.1 Energia cinetica, scontro ferroviario

Nel 1896 a Waco, nel Texas, William Crush, un dipendente della ferrovia *Katy*, organizzò un esperimento ponendo due locomotive agli estremi di un tratto di binario di 6,4 km; le mise in pressione, bloccò le valvole del vapore alla massima apertura e le fece scontrare frontalmente a tutta velocità (fig. 7.1), di fronte a 30 000 spettatori. Centinaia di persone rimasero ferite da frammenti metallici proiettati in ogni direzione; alcune perirono. Supponendo che ciascuna locomotiva avesse un peso di $1{,}2 \cdot 10^6$ N e un'accelerazione costante, fino alla collisione, di 0,26 m/s^2, qual era l'energia cinetica complessiva delle due locomotive all'istante della collisione?

SOLUZIONE

(1) Dobbiamo trovare l'energia cinetica di ciascuna delle due locomotive, ma abbiamo bisogno di conoscere, oltre alla loro massa, la loro velocità subito prima della collisione. (2) Possiamo supporre che l'accelerazione delle locomotive sia costante, consentendoci di usare la tabella 2.1 per trovare la velocità v subito prima della collisione. Ricorriamo all'equazione 2.16, che contiene tutte le variabili tranne la velocità:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0).$$

Questa, ponendo $v_0 = 0$ e $x - x_0 = 3{,}2 \cdot 10^3$ m (la metà della distanza iniziale), diventa:

$$v^2 = 0 + 2(0{,}26 \text{ m/s}^2)(3{,}2 \cdot 10^3 \text{ m}),$$

da cui

$$v = 40{,}8 \text{ m/s},$$

pari a circa 150 km/h.

La terza idea chiave è che per trovare la massa di ciascuna delle due locomotive basta dividere il peso per g:

$$m = \frac{1{,}2 \cdot 10^6 \text{ N}}{9{,}8 \text{ m/s}^2} = 1{,}22 \cdot 10^5 \text{ kg}.$$

Troveremo ora, in base alla (7.1), l'energia cinetica totale nell'istante prima della collisione:

$$K = 2\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right) = (1{,}22 \cdot 10^5 \text{ kg})(40{,}8 \text{ m/s})^2 = 2{,}0 \cdot 10^8 \text{ J}.$$

Come l'esplosione di una bomba.

Courtesy Library of Congress

Figura 7.1 Problema svolto 7.1. Scontro frontale fra due locomotive nel 1896.

ISBN 978-88-08-18229-6

7.2 LAVORO ED ENERGIA CINETICA

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di…

7.03 Applicare la relazione esistente tra una forza (modulo e orientamento) e il lavoro che questa svolge su una particella quando essa subisce uno spostamento.

7.04 Calcolare il lavoro operando il prodotto scalare del vettore forza per il vettore spostamento, esprimendoli sia tramite moduli e orientamenti sia tramite i versori.

7.05 Calcolare il lavoro netto sviluppato su una particella da molteplici forze che agiscono su di essa.

7.06 Applicare il teorema dell'energia cinetica per mettere in relazione il lavoro netto svolto da una o più forze con la variazione di energia cinetica che ne risulta.

Idee chiave

- Il lavoro L è l'energia conferita a un corpo o da questo ceduta per mezzo di una forza che agisce su di esso. Quando il corpo guadagna energia, il lavoro svolto su di esso è positivo. Quando il corpo perde energia, il lavoro svolto su di esso è negativo.
- Il lavoro compiuto da una forza costante $\vec{F}$ su una particella che subisce uno spostamento $\vec{d}$ è dato da

$$L = Fd\cos\phi = \vec{F}\cdot\vec{d} \qquad \text{(lavoro, forza costante)},$$

in cui ϕ è l'angolo, supposto costante, tra le direzioni di $\vec{F}$ e di $\vec{d}$.
- Il lavoro svolto sul corpo è determinato dalla componente di $\vec{F}$ lungo la direzione di $\vec{d}$.
- Nel caso siano due o più forze ad agire su un corpo, il lavoro netto è dato dalla somma dei singoli lavori compiuti da ciascuna forza, che è uguale al lavoro che compirebbe la forza netta risultante $\vec{F}_{net}$ di tutte le forze.
- Per una particella la variazione ΔK della sua energia cinetica eguaglia il lavoro netto L compiuto sulla particella:

$$\Delta K = K_f - K_i = L \quad \text{(teorema dell'energia cinetica)},$$

dove K_i è l'energia cinetica iniziale della particella e K_f è l'energia finale dopo che il lavoro è compiuto. Possiamo anche scrivere:

$$K_f = K_i + L.$$

Il lavoro

Se accelerate un oggetto accrescendone la velocità mediante l'applicazione di una forza, aumentate pure l'energia cinetica $K = \frac{1}{2}mv^2$ dell'oggetto. Analogamente, se con una forza frenate l'oggetto diminuendone la velocità, diminuite anche la sua energia cinetica. Definiamo questi cambiamenti di energia cinetica dicendo che la vostra forza ha trasferito energia da voi *all'*oggetto, oppure *dall'*oggetto a voi.

In un tal trasferimento di energia causato da una forza, si dice che *la forza ha compiuto il lavoro L sull'oggetto*. Formalmente definiamo il lavoro come segue:

> Il lavoro L è l'energia trasferita a un corpo o da un corpo per mezzo di una forza che agisce sul corpo stesso. L'energia ceduta al corpo è un lavoro positivo, mentre quella ceduta dal corpo è un lavoro negativo.

Il *lavoro* dunque è energia trasferita e *compiere lavoro* è l'atto del trasferimento di energia. Il lavoro ha la stessa unità di misura dell'energia ed è una grandezza scalare.

Il termine *trasferimento* può essere fuorviante. Non significa che vi sia una sostanza che fluisce verso un oggetto o da un oggetto. Questo trasferimento non è insomma come un flusso d'acqua. Potremmo paragonarlo piuttosto al trasferimento di denaro per via informatica da una banca all'altra. L'importo di un conto corrente cresce mentre l'altro cala, senza che vi sia alcun trasferimento materiale di banconote da un conto all'altro.

Notate che non stiamo parlando di quello che si intende comunemente per «lavoro» nel linguaggio di tutti i giorni, che spesso implica il concetto di fatica fisica o mentale. Per esempio, se spingete forte contro un muro pericolante per tenerlo in piedi, vi stancate presto a causa delle incessanti microvibrazioni muscolari necessarie per rimanere in quella posizione e, nel comune senso del termine, state svolgendo un duro lavoro. Questo sforzo invece non provoca alcun trasferimento di energia al muro né viceversa e pertanto non state compiendo alcun lavoro, nel senso del termine qui definito.

ISBN 978-88-08-18229-6

Lavoro ed energia cinetica

Cerchiamo un'espressione per il lavoro

Come esempio vogliamo trovare un'espressione per il lavoro di una biglia che scorre lungo un filo privo d'attrito, teso lungo un asse orizzontale preso come asse x (fig. 7.2). Una forza $\boldsymbol{F}$ costante, che forma un angolo ϕ con il filo, accelera la biglia. Possiamo mettere in relazione la forza e l'accelerazione tramite la seconda legge di Newton, proiettata sull'asse x:

$$F_x = ma_x, \tag{7.3}$$

ove m è la massa della biglia. Supponiamo che la forza agisca sulla biglia per uno spostamento $\boldsymbol{d}$, modificando la sua velocità iniziale da v_0 al valore v. Se la forza è costante, lo è anche l'accelerazione, e quindi possiamo servirci dell'equazione 2.16 (una delle equazioni per accelerazione costante) per la componente lungo l'asse x:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x d. \tag{7.4}$$

Risolvendola rispetto ad a_x e sostituendo nella (7.3) si ottiene

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = F_x d\,. \tag{7.5}$$

Il primo membro dell'equazione 7.5 è proprio la differenza tra l'energia cinetica finale e quella iniziale della biglia. Questa differenza è la variazione di energia cinetica della biglia dovuta all'azione della forza $\boldsymbol{F}$, e il secondo membro ci dice che questa variazione è pari a $F_x d$. Dunque il lavoro L compiuto dalla forza sulla biglia (l'energia trasferita per effetto della forza) è

$$L = F_x d. \tag{7.6}$$

Conoscendo i valori di F_x e d, mediante questa equazione possiamo calcolare il lavoro L che la forza svolge sulla biglia.

> Per calcolare il lavoro compiuto da una forza su un corpo durante un certo spostamento, si considera solo la componente della forza lungo la direzione dello spostamento subito dal corpo. Il lavoro compiuto dalla componente della forza perpendicolare allo spostamento è nullo.

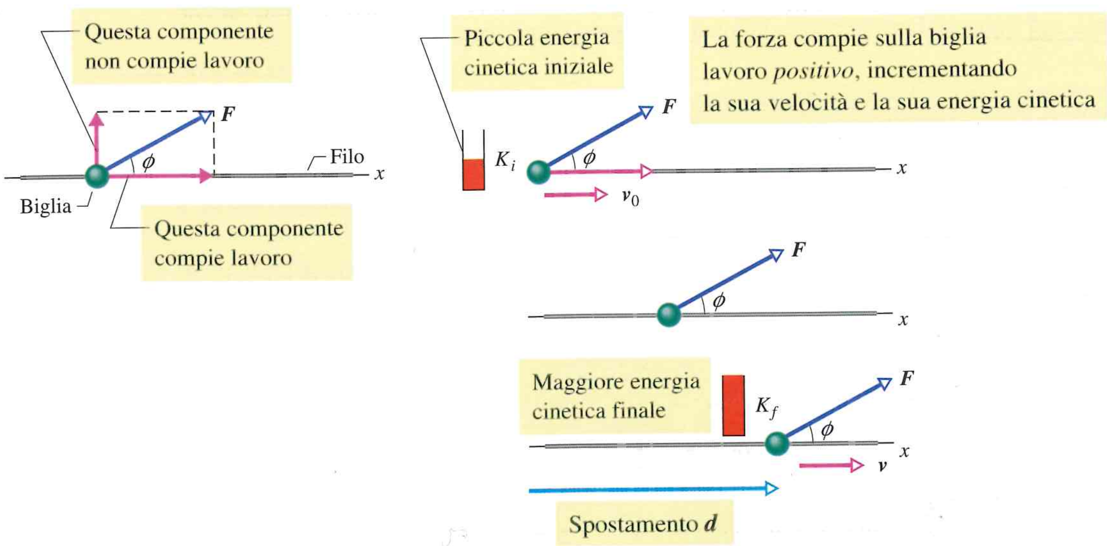


Figura 7.2 Una forza costante $\boldsymbol{F}$ che forma un angolo ϕ con lo spostamento $\boldsymbol{d}$ di una particella la accelera aumentandone la velocità da $\boldsymbol{v}_0$ a $\boldsymbol{v}$. Un «misuratore di energia cinetica» indica la variazione risultante nell'energia cinetica della particella, da $K_{\rm i}$ a $K_{\rm f}$.

Dalla figura 7.2 vediamo che si può scrivere F_x come $F \cos \phi$, ove ϕ rappresenta l'angolo compreso tra le direzioni della forza e dello spostamento. Possiamo quindi riscrivere la (7.6) in una forma più generale:

$$L = Fd \cos \phi. \tag{7.7}$$

Possiamo utilizzare la definizione di prodotto scalare data dall'equazione 3.20 per scrivere

$$L = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{d} \quad \text{(lavoro compiuto da una forza costante).} \tag{7.8}$$

(Può valer la pena di rivedere il paragrafo 3.3.) L'equazione 7.8 è particolarmente utile per il calcolo del lavoro quando il problema fa uso di versori.

Attenzione. L'uso delle equazioni 7.6, 7.7 e 7.8 è soggetto a due restrizioni. Innanzitutto la forza deve essere *costante*, vale a dire che non deve cambiare né in modulo né in direzione durante il moto del corpo. (Vedremo più tardi come comportarci con le forze *variabili* in intensità.) In secondo luogo, il corpo deve essere *puntiforme*. Cioè deve essere *rigido*: tutte le parti del corpo devono muoversi insieme nello stesso modo. In questo capitolo considereremo solo oggetti aventi le proprietà di un corpo puntiforme, come il letto e il pinguino suo passeggero nella goliardica *corsa coi letti* di figura 7.3.

Figura 7.3 Una *corsa coi letti*. Possiamo assimilare il letto e il suo occupante a una particella allo scopo di calcolare il lavoro esercitato sul letto dalla forza che applica lo studente.

Significato del segno nel lavoro. Il lavoro svolto da una forza su un corpo può essere positivo o negativo. Se per esempio l'angolo ϕ nell'equazione 7.7 è maggiore di 90° (fino a 180°), $\cos \phi$ risulta negativo e così anche il lavoro. (Avete notato che il lavoro è nullo quando $\phi = 90$?) Da questo risultato perveniamo a una semplice regola. Per trovare il segno del lavoro compiuto da una forza consideriamo la componente del suo vettore lungo la direzione dello spostamento:

> Una forza compie lavoro positivo quando la sua componente nella direzione dello spostamento è di verso concorde con lo spostamento stesso. Nel caso opposto il lavoro è negativo. Il lavoro è nullo se questa componente è nulla.

Unità di misura del lavoro. Il lavoro ha la stessa unità di misura dell'energia cinetica, che nel SI è il joule. Dall'equazione 7.6 o 7.7 vediamo che esso è equivalente al newton per metro (N · m). Estendendo quindi la (7.2) abbiamo

$$1\ \text{J} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = 1\ \text{N} \cdot \text{m}. \tag{7.9}$$

Lavoro totale svolto da più forze. Se due o più forze agiscono simultaneamente su un corpo puntiforme, il **lavoro totale** compiuto sul corpo è la *somma* dei lavori svolti da ciascuna forza. Possiamo calcolare il lavoro totale in due modi: 1) Possiamo trovare i lavori compiuti da ciascuna forza e poi sommarli. 2) Altrimenti possiamo calcolare la forza risultante dalla somma di tutte le forze, indi applicare l'equazione 7.7 in cui al posto della forza abbiamo la forza netta e l'angolo ϕ è quello compreso tra le direzioni dello spostamento e della forza netta; detto in altro modo, possiamo usare la (7.8) in cui $\boldsymbol{F}_{\text{net}}$ sostituisce $\boldsymbol{F}$.

Teorema dell'energia cinetica

L'equazione 7.5 mette in relazione, in assenza di attrito, la variazione di energia cinetica della biglia (dal valore iniziale $K_i = \frac{1}{2}mv_0^2$ al valore finale $K_f = \frac{1}{2}mv^2$) col lavoro $L = F_x d$ svolto sulla biglia. Chiamiamo ΔK la variazione di energia cinetica del corpo e L il lavoro totale compiuto su di esso. Allora possiamo scrivere

$$\Delta K = K_f - K_i = L, \tag{7.10}$$

con la quale intendiamo dire

$$\begin{pmatrix}\text{variazione di energia cinetica} \\ \text{di una particella}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{lavoro totale svolto} \\ \text{sulla particella}\end{pmatrix}.$$

Si può anche scrivere

$$K_f = K_i + L, \tag{7.11}$$

 ISBN 978-88-08-18229-6

che equivale a dire

$$\begin{pmatrix}\text{energia cinetica}\\ \text{a lavoro compiuto}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{energia cinetica}\\ \text{iniziale}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{lavoro totale}\\ \text{svolto}\end{pmatrix}.$$

Le espressioni descritte sono note tradizionalmente col nome di **teorema dell'energia cinetica** per un corpo puntiforme. Sono valide qualunque sia il segno del lavoro: se il lavoro compiuto sulla particella è positivo, l'energia cinetica della particella aumenta; in caso contrario diminuisce.

Per esempio, se l'energia cinetica è inizialmente di 5 J e sulla particella si compiono 2 J di lavoro positivo, la sua energia cinetica finale è di 7 J. Se invece i 2 J vengono sottratti alla particella perché il lavoro compiuto su di essa è negativo ($L = -2$ J), alla fine la particella rimane con un'energia cinetica di 3 J.

VERIFICA 1

Una particella si muove lungo l'asse x. Dite se l'energia cinetica della particella aumenta, diminuisce o resta uguale quando la velocità della particella cambia (a) da -3 m/s a -2 m/s e (b) da -2 m/s a 2 m/s. (c) Nei diversi casi il lavoro compiuto sulla particella è positivo, negativo o nullo? (a) diminuisce

(b) uguale

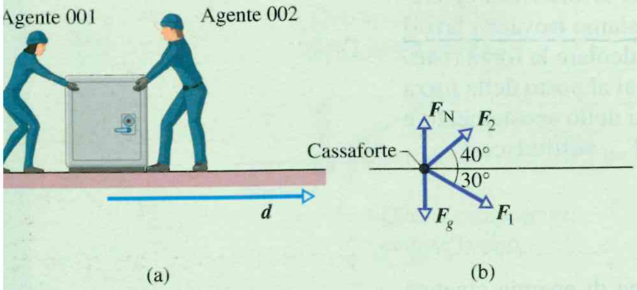
(c) negativo, nullo

ROBLEMA SVOLTO 7.2 Lavoro svolto da due forze costanti, spie industriali

figura 7.4a rappresenta due spie industriali mentre fanno scivolare a cassaforte di massa 225 kg inizialmente ferma per uno spostamento modulo $d = 8{,}50$ m diretto verso il loro furgone. La forza $\boldsymbol{F}_1$ con la ale l'agente 001 spinge la cassaforte è di 12,0 N, e la direzione di esta forza forma un angolo di 30° verso il basso rispetto all'orizzonta- La forza $\boldsymbol{F}_2$ con cui l'agente 002 tira la cassaforte è di 10,0 N, in ezione 40° verso l'alto rispetto alla linea orizzontale. Consideriamo forze costanti e l'attrito nullo.

Qual è il lavoro totale svolto dalle due forze sulla cassaforte durante spostamento $\boldsymbol{d}$?

Solo le componenti della forza parallele allo spostamento compiono lavoro



igura 7.4 Problema svolto 7.2. (a) Due spie trascinano via una cassa-orte facendole compiere uno spostamento $\boldsymbol{d}$. (b) Il diagramma vetto-iale relativo alla cassaforte.

OLUZIONE

bbiamo due idee chiave. Con la prima ricordiamo che il lavoro totale è uale alla somma dei lavori svolti dalle due forze. Con la seconda cordiamo che la cassaforte si comporta come un corpo puntiforme e e i vettori forza sono costanti, quindi utilizzeremo le equazioni 7.7 e 8, per calcolare il lavoro compiuto da ciascuna forza. Dato che ne nosciamo modulo e direzione, usiamo la (7.7). Con l'aiuto del diagramma della forze applicate alla cassaforte riportato nella figura 7.4b, esprimiamo con l'equazione 7.7 il lavoro svolto da $\boldsymbol{F}_1$:

$$L_1 = F_1 d\cos\phi_1 = (12{,}0\ \text{N})(8{,}50\ \text{m})(\cos 30{,}0°) = 88{,}33\ \text{J},$$

mentre il lavoro sviluppato dall'agente 002 è

$$L_2 = F_2 d\cos\phi_2 = (10{,}0\ \text{N})(8{,}50\ \text{m})(\cos 40{,}0°) = 65{,}11\ \text{J},$$

quindi il lavoro totale L è

$$L = L_1 + L_2 = 83{,}33\ \text{J} + 65{,}11\ \text{J} = 153{,}4\ \text{J} \approx 153\ \text{J}.$$

Per il teorema dell'energia cinetica durante lo spostamento di 8,50 m i due agenti aumentano l'energia cinetica della cassaforte di 153 J.

(b) Qual è il lavoro L_g sviluppato sulla cassaforte dalla sua forza di gravità $\boldsymbol{F}_g$ e il lavoro L_N compiuto dalla forza normale $\boldsymbol{F}_N$ esercitata dal pavimento?

SOLUZIONE

L'idea chiave sta ancora nell'osservare che, essendo le forze costanti, possiamo applicare l'equazione 7.7 per trovare il lavoro compiuto. Posto il modulo di $\boldsymbol{F}_g$ pari a mg, scriviamo

$$L_g = mgd\cos 90° = mgd\,(0) = 0,$$

e

$$L_N = F_N\, d\cos 90° = F_N\, d\,(0) = 0.$$

Potevamo immaginarlo. Dato che queste forze sono perpendicolari allo spostamento, non svolgono lavoro. Tali forze non trasferiscono alcuna energia cinetica alla cassaforte, né viceversa.

(c) La cassaforte era inizialmente ferma. Qual è la sua velocità v_f al termine dello spostamento di 8,50 m?

SOLUZIONE

Qui l'idea chiave sta nel considerare che la velocità della cassaforte cambia perché varia l'energia cinetica quando le viene ceduta energia dalle forze applicate. Mettiamo in relazione la velocità col lavoro svolto combinando le equazioni 7.10 e 7.1:

$$L = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2.$$

La velocità iniziale v_i è 0 e sappiamo che il lavoro svolto è 153,4 J. Risolvendo rispetto a v_f e sostituendo i valori noti, troviamo

$$v_f = \sqrt{\frac{2L}{m}} = \sqrt{\frac{2(153,4\ \mathrm{J})}{225\ \mathrm{kg}}} = 1,17\ \mathrm{m/s}.$$

PROBLEMA SVOLTO 7.3 Lavoro svolto da una forza costante espressa mediante i versori

Un cassa di prugne secche (fig. 7.5), sfuggita a chi la stava scaricando, sta scivolando sul pavimento privo d'attrito mentre spira un vento costante con forza $\boldsymbol{F} = (2{,}0\ \mathrm{N})\mathbf{i} + (-6{,}0\ \mathrm{N})\mathbf{j}$. Durante la spinta del vento la cassa percorre uno spostamento $\boldsymbol{d} = (-3\ \mathrm{m})\mathbf{i}$.

(a) Quanto lavoro viene svolto dal vento mentre la cassa compie lo spostamento $\boldsymbol{d}$?

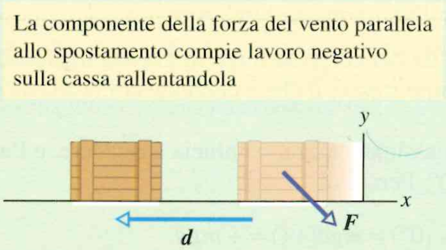


Figura 7.5 Problema svolto 7.3. La forza $\boldsymbol{F}$ rallenta una cassa di prugne secche durante il suo spostamento $\boldsymbol{d}$.

SOLUZIONE

L'idea chiave sta nell'osservare che la forza è costante e l'oggetto è schematizzabile come un corpo puntiforme. Per cui si applica l'equazione 7.7 o la 7.8 per calcolare il lavoro fornito alla cassa.

Dato che abbiamo i vettori scritti con i versori, usiamo la (7.8) e scriviamo

$$L = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{d} = [(2{,}0\ \mathrm{N})\mathbf{i} + (-6{,}0\ \mathrm{N})\mathbf{j}] \cdot [(-3{,}0\ \mathrm{m})\mathbf{i}].$$

Ricordiamo che dei possibili prodotti scalari tra versori soltanto $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}$, $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}$, e $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$ sono diversi da zero (vedi app. E). E quindi abbiamo

$$L = (2{,}0\ \mathrm{N})(-3{,}0\ \mathrm{m})\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + (-6{,}0\ \mathrm{N})(-3{,}0\ \mathrm{m})\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = (-6{,}0\ \mathrm{J})(1) + 0 = -6{,}0\ \mathrm{J}.$$

Si conclude che la forza svolge 6,0 J di lavoro negativo sulla cassa, a spese dell'energia cinetica della cassa, che varia di 6,0 J.

(b) Se all'inizio dello spostamento la cassa ha un'energia cinetica di 10 J, quanto vale quest'ultima alla fine del percorso?

SOLUZIONE

L'idea chiave sta nel considerare che l'energia cinetica della cassa diminuisce perché il lavoro compiuto su di essa è negativo. Ricorrendo al teorema dell'energia cinetica nella forma dell'equazione 7.11, si trova

$$K_f = K_i + L = 10\ \mathrm{J} + (-6{,}0\ \mathrm{J}) = 4{,}0\ \mathrm{J}.$$

Se l'energia cinetica diminuisce significa che la cassa sta rallentando.

7.3 LAVORO SVOLTO DALLA FORZA GRAVITAZIONALE

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di…

7.07 Calcolare il lavoro svolto dalla forza di gravità su un corpo che sale o scende.

7.08 Applicare il teorema dell'energia cinetica a corpi che scendono o salgono.

Idee chiave

- Il lavoro L_g svolto dalla forza di gravità $\boldsymbol{F}_g$ su un corpo puntiforme di massa m mentre subisce uno spostamento $\boldsymbol{d}$ è dato da

$$L_g = mgd\cos\phi,$$

in cui ϕ è l'angolo compreso tra $\boldsymbol{F}_g$ e $\boldsymbol{d}$.

- Il lavoro L_a svolto da una forza applicata su una particella che scende o sale è legato al lavoro L_g svolto dalla forza di gravità e alla variazione di energia cinetica ΔK subita dalla particella dalla relazione

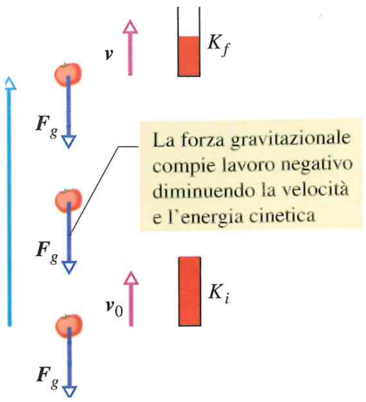
$$\Delta K = K_f - K_i = L_a + L_g.$$

Se $K_f = K_i$, l'equazione si riduce a

$$L_a = -L_g,$$

da cui deduciamo che la forza applicata conferisce al corpo tanta energia quanta gliene sottrae la forza di gravità.

 ISBN 978-88-08-18229-6



ura 7.6 Un pomodoro di massa m, hematizzato come una particella, get-o in aria, rallenta dalla velocità v_0 alla locità v durante lo spostamento $\boldsymbol{d}$, a usa della forza gravitazionale $\boldsymbol{F}_g$ agen-su di esso. Un indice di energia cineti-mostra la variazione risultante nell'e-rgia cinetica dell'oggetto da K_i a K_f.

Lavoro compiuto dalla forza di gravità

Esaminiamo ora il lavoro compiuto su un corpo da un particolare tipo di forza, la forza gravitazionale agente su di esso. La figura 7.6 mostra un pomodoro, che schematizziamo come una particella, di massa m, che viene gettato in aria con una velocità iniziale v_0 e quindi con energia cinetica iniziale $K_i = \frac{1}{2}mv_0^2$. Man mano che il pomodoro sale, rallenta a causa della forza gravitazionale costante $\boldsymbol{F}_g$, che agisce su di esso. Dato che il pomodoro rallenta, la sua energia cinetica diminuisce.

Se il pomodoro si comporta come un corpo puntiforme, vale l'equazione 7.7 per il lavoro svolto durante uno spostamento $\boldsymbol{d}$. Introduciamo mg come modulo di $\boldsymbol{F}_g$ nell'equazione 7.7 per trovare il lavoro L_g compiuto sul pomodoro dalla forza di gravità:

$$L_g = mgd\cos\phi \qquad \text{(lavoro svolto dalla forza gravitazionale).} \tag{7.12}$$

Per un corpo che sale, la forza $\boldsymbol{F}_g$ è diretta in verso opposto a quello dello spostamento $\boldsymbol{d}$, come indicato nella figura 7.6. L'angolo ϕ vale quindi 180° e

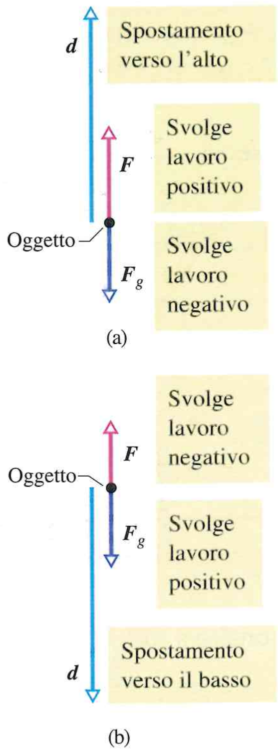
$$L_g = mgd\cos(180°) = mgd(-1) = -mgd. \tag{7.13}$$

Il segno meno indica che durante la salita del corpo la forza di gravità trasferisce l'energia mgd a spese dell'energia cinetica del corpo stesso, il che è coerente col fatto che esso rallenta mentre sale.

Dopo che il corpo ha raggiunto la massima altezza, comincia a ricadere, e l'angolo ϕ tra la forza $\boldsymbol{F}_g$ e lo spostamento $\boldsymbol{d}$ diventa 0°. Pertanto

$$L_g = mgd\cos(0°) = mgd(+1) = +\,mgd. \tag{7.14}$$

Il segno positivo indica che durante la discesa del corpo la forza gravitazionale trasferisce l'energia mgd a favore dell'energia cinetica del corpo stesso, il che è coerente col fatto che esso accelera mentre scende.



ura 7.7 (a) La forza netta solleva un getto. Lo spostamento $\boldsymbol{d}$ dell'oggetto rma un angolo $\phi = 180°$ con il vettore rza gravitazionale. La forza applica-compie lavoro positivo sull'oggetto.) La forza netta abbassa un oggetto. o spostamento $\boldsymbol{d}$ dell'oggetto forma un golo $\phi = 0°$ con il vettore forza gra-tazionale. La forza applicata compie voro negativo sull'oggetto.

Lavoro compiuto nel sollevare e abbassare un corpo

Supponiamo ora di sollevare un corpo applicandogli la forza $\boldsymbol{F}$. Durante lo spostamento verso l'alto la forza applicata compie il lavoro positivo L_a sul corpo, mentre la forza gravitazionale compie anch'essa un lavoro L_g, negativo, sul corpo stesso. Come dire che la forza applicata tende a trasferire energia al corpo mentre quella di gravità tende a trasferire energia in senso inverso. Secondo l'equazione 7.10, la variazione ΔK dell'energia cinetica del corpo dovuta a questi due trasferimenti è

$$\Delta K = K_f - K_i = L_a + L_g, \tag{7.15}$$

in cui K_f è l'energia cinetica al termine dello spostamento e K_i è quella all'inizio del processo. Questa equazione si applica anche nel caso in cui abbassiamo il corpo, ma in questo caso la forza di gravità trasferisce energia al corpo mentre la forza applicata gliene sottrae.

Spesso il corpo è fermo prima e dopo il sollevamento, per esempio quando sollevate un libro dalla scrivania allo scaffale. In questo caso sia K_f sia K_i sono nulli e l'equazione 7.15 si riduce a

$$L_a + L_g = 0,$$

ossia

$$L_a = -\,L_g. \tag{7.16}$$

Si noti che otterremmo lo stesso risultato se K_f e K_i non fossero nulli, ma uguali. In entrambi i casi il risultato significa che il lavoro compiuto dalle forze applicate è l'opposto del lavoro svolto dalla forza di gravità. Detto in altre parole, la forza applicata trasferisce al corpo la stessa quantità di energia che la forza gravitazionale gli sottrae. Tramite l'equazione 7.12 possiamo riscrivere la (7.16) come

$$L_a = -mgd\cos\phi \qquad \text{(lavoro nel sollevamento e abbassamento, } K_f = K_i\text{),} \tag{7.17}$$

dove ϕ è l'angolo compreso tra $\boldsymbol{F}_g$ e $\boldsymbol{d}$. Se lo spostamento è verticale verso l'alto (fig. 7.7a), allora $\phi = 180°$ e il lavoro svolto dalla forza applicata è pari a mgd. Se lo spostamento è verticale verso il basso (fig. 7.7b), allora $\phi = 0°$ e il lavoro svolto dalla forza applicata è pari a $-mgd$.

Le equazioni 7.16 e 7.17 si applicano a qualsiasi caso in cui un corpo viene sollevato o abbassato, purché sia in quiete prima e dopo lo spostamento considerato. Nelle due equazioni non compare il modulo della forza coinvolta, da cui pertanto sono indipendenti. Per esempio, se sollevate un peso dal pavimento fin sopra la testa, la forza applicata varia sensibilmente durante il sollevamento. Ciò nonostante, dato che il peso è fermo prima e dopo il sollevamento, il lavoro compiuto è dato dalle equazioni 7.16 e 7.17, ove, nella (7.17), mg è il peso sollevato e d è il dislivello realizzato.

PROBLEMA SVOLTO 7.4 Lavoro per sollevare una slitta su per un pendio

Una slitta è sollevata lungo una rampa partendo da ferma e terminando nuovamente ferma, di modo che la sua energia cinetica finale è uguale a quella iniziale (condizione rilevante). La figura 7.8a illustra il caso. Una fune tira la slitta di massa totale m = 200 kg su per un piano inclinato privo d'attrito con angolo θ = 30° per una distanza d = 20 m. Quanto lavoro svolge sulla slitta ciascuna forza coinvolta?

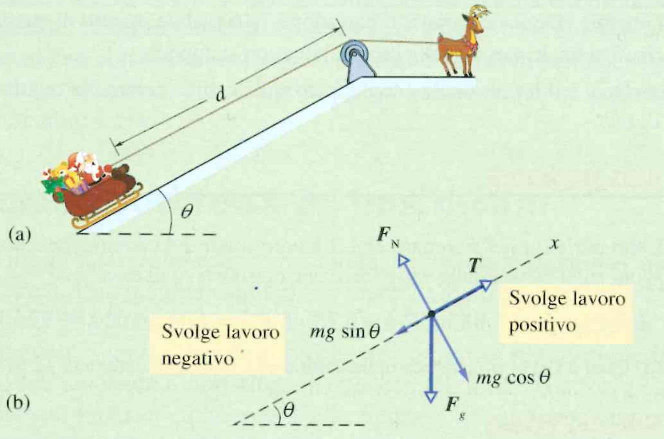


Figura 7.8 Problema svolto 7.4. (a) Una slitta tirata su per un pendio privo d'attrito. (b) Il diagramma delle forze relativo alla slitta.

SOLUZIONE

(1) Le forze rimangono costanti in modulo e orientamento durante tutto il moto, ragion per cui ci basta l'equazione 7.7 per calcolare il lavoro svolto da ciascuna: $L = Fd \cos \phi$, in cui ϕ è l'angolo compreso tra le direzioni della forza e dello spostamento. Arriveremmo allo stesso risultato attraverso l'equazione 7.8 ($L = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{d}$), cioè il prodotto scalare tra la forza e lo spostamento. (2) Possiamo mettere in relazione il lavoro netto totale compiuto dalle forze con la variazione di energia cinetica tramite il teorema dell'energia cinetica, equazione 7.10.

Calcoli. La prima cosa da fare coi problemi di fisica sulle forze è disegnare un diagramma delle forze per ordinare le idee. Nella figura 7.8b abbiamo il diagramma delle forze per la slitta, con la forza di gravità $\boldsymbol{F}_g$, la forza $\boldsymbol{T}$ applicata dalla fune e la forza normale $\boldsymbol{F}_N$ applicata dalla rampa.

Lavoro L_N svolto dalla forza normale. Partiamo da questo facile calcolo. La forza normale è perpendicolare al piano inclinato e quindi anche al vettore spostamento. Pertanto non può influenzare il moto della slitta e non compie lavoro. Formalmente, dall'equazione 7.7,

$$L_N = F_N d \cos 90° = 0.$$

Lavoro L_g svolto dalla forza di gravità. Abbiamo due modi per trovare il lavoro compiuto dalla forza di gravità; scegliete quello che preferite. Da un precedente problema svolto coi piani inclinati (probl. 5.4 e fig. 5.15) sappiamo che la componente lungo il piano inclinato della forza di gravità ha modulo $mg \sin\theta$ ed è diretta verso il basso. L'intensità dunque è

$$F_{g,x} = mg \sin\theta = (200 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2) \sin 30° = 980 \text{ N}.$$

L'angolo ϕ tra lo spostamento e questa componente della forza è 180°. Possiamo quindi applicare l'equazione 7.7 per scrivere

$$L_g = F_{g,x} d \cos 180° = (980 \text{ N})(20 \text{ m})(-1) = -1{,}96 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

Il segno meno indica che la forza di gravità toglie energia alla slitta.

Il secondo modo di arrivare al risultato consiste nel considerare il vettore forza di gravità $\boldsymbol{F}_g$ anziché una sua componente. L'angolo compreso tra $\boldsymbol{F}_g$ e $\boldsymbol{d}$ è di 120°, di modo che l'equazione 7.7 dà

$$\begin{aligned} L_g &= F_g d \cos 120° = mgd \cos 120° \\ &= (200 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2)(20 \text{ m}) \cos 120° \\ &= -1{,}96 \cdot 10^4 \text{ J}. \end{aligned}$$

Lavoro L_T svolto dalla tensione della fune. Di nuovo abbiamo due modi di calcolarlo. Il più rapido è ricorrere al teorema dell'energia cinetica, equazione 7.10, in cui osserviamo che il lavoro netto totale L svolto dalle forze, $L_N + L_g + L_T$, e la variazione di energia cinetica ΔK sono uguali a zero perché l'energia cinetica finale è uguale a quella iniziale. Dunque l'equazione 7.10 dà

$$0 = L_N + L_g + L_T = 0 - 1{,}96 \cdot 10^4 \text{ J} + L_T,$$

da cui

$$L_T = 1{,}96 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

In alternativa possiamo applicare la seconda legge di Newton al moto lungo l'asse x per trovare il modulo F_T della tensione della fune. Assumendo che l'accelerazione della slitta sia nulla (trascuriamo gli istanti di avvio e di arresto), possiamo scrivere

$$F_{\text{net},x} = ma_x,$$

$$F_T - mg \sin 30° = m(0),$$

per trovare

$$F_T = mg \sin 30°.$$

Dato che questa forza e lo spostamento sono paralleli entrambi al piano inclinato, i loro vettori formano un angolo nullo e così possiamo scrivere l'equazione 7.7 per trovare il lavoro svolto dalla fune:

$$\begin{aligned} L_T &= F_T d \cos 0° = (mg \sin 30°) d \cos 0° = \\ &= (200 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2)(\sin 30°)(20 \text{ m}) \cos 0° = \\ &= 1{,}96 \cdot 10^4 \text{ J}. \end{aligned}$$

ISBN 978-88-08-18229-6

ROBLEMA SVOLTO 7.5 Lavoro svolto su un ascensore in accelerazione

:abina di un ascensore di massa m = 500 kg sta scendendo con velo- di modulo v_i = 4,0 m/s, quando il sistema di argani che ne controlla iscesa comincia a slittare, lasciandola cadere con un'accelerazione ante $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}/5$ (fig. 7.9a).

Durante la sua caduta per una distanza d = 12 m, qual è il lavoro L_g uppato sulla cabina dalla forza gravitazionale $\boldsymbol{F}_g$?

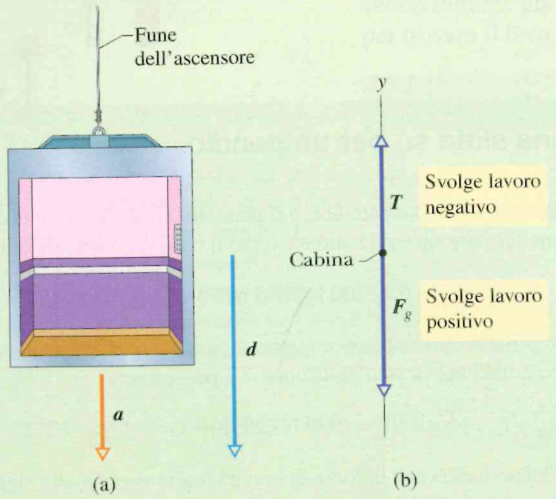


Figura 7.9 Problema svolto 7.5. La cabina di un ascensore che sta scendendo con velocità di modulo v_i comincia improvvisamente ad accelerare la sua corsa verso il basso. (a) Compie uno spostamento $\boldsymbol{d}$ ad accelerazione costante $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}/5$. (b) Diagramma vettoriale relativo alla cabina, in cui è indicato anche lo spostamento.

OLUZIONE

dea chiave sta ancora una volta nel trattare la cabina come un corpo ntiforme e nell'applicare l'equazione 7.12 per trovare il lavoro svolto lla gravità. Nella figura 7.9b un diagramma delle forze rappresenta la luta di 12 m dell'ascensore. Tenendo conto che l'angolo tra lo spostaento $\boldsymbol{d}$ della cabina e la forza $\boldsymbol{F}_g$ è di 0°, per l'equazione 7.12 troviamo

$$_g = mgd \cos 0° = (500 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2)(12 \text{ m})(1) = 5{,}88 \cdot 10^4 \text{ J} \approx 59 \text{ kJ}.$$

) Durante la caduta di 12 m qual è stato il lavoro L_T sviluppato sulla bina dalla forza di trazione $\boldsymbol{T}$ diretta verso l'alto esercitata dal cavo ll'ascensore?

SOLUZIONE

Possiamo applicare l'equazione 7.7 scrivendo dapprima $F_{\text{net},y} = ma_y$ per le componenti che compaiono nella figura 7.9b.

$$T - F_g = ma. \qquad (7.18)$$

Risolvendo rispetto a T, sostituendo mg a F_g e introducendo il risultato nella (7.7) si ottiene

$$L_T = Td \cos \phi = m(a + g)\, d \cos \phi. \qquad (7.19)$$

Ponendo ora la componente scalare dell'accelerazione pari a $-g/5$ (verso il basso) e l'angolo pari a 180°, troviamo

$$L_T = m\left(-\frac{g}{5} + g\right) d \cos\phi = \frac{4}{5} mgd \cos\phi =$$
$$= \frac{4}{5}(500 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2)(12 \text{ m}) \cos 180° = -4{,}70 \cdot 10^4 \text{ J} \approx -47 \text{ kJ}.$$

Attenzione. Si noti che L_T non è uguale all'opposto di L_g, calcolato nella risposta (a). Questo perché, a causa dell'accelerazione subita durante la caduta, la velocità si è modificata in questo processo e quindi anche l'energia cinetica è variata. L'equazione 7.16 (valida in caso di energia cinetica finale pari a quella iniziale) qui *non* si applica.

(c) Qual è il lavoro totale L sviluppato sulla cabina durante la caduta di 12 m?

SOLUZIONE

L'idea chiave sta nel ricordare che il lavoro totale è la somma dei lavori svolti sulla cabina dalle varie forze che agiscono su di essa:

$$L = L_g + L_T = 5{,}88 \cdot 10^4 \text{ J} - 4{,}70 \cdot 10^4 \text{ J} = 1{,}18 \cdot 10^4 \text{ J} \approx 12 \text{ kJ}.$$

(d) Qual è l'energia cinetica della cabina alla fine della caduta di 12 m?

SOLUZIONE

L'idea chiave sta nel considerare la variazione di energia cinetica come *dovuta* al lavoro totale compiuto sulla cabina, secondo l'equazione 7.11. L'energia cinetica K_i all'inizio della caduta, quando la velocità ha modulo v_i = 4,0 m/s, è data da $K_i = \frac{1}{2}mv_i^2$. Possiamo quindi scrivere l'equazione 7.11 come

$$K_f = K_i + L = \tfrac{1}{2}mv_i^2 + L =$$
$$= \tfrac{1}{2}(500 \text{ kg})(4{,}0 \text{ m/s})^2 + 1{,}18 \cdot 10^4 \text{ J} = 1{,}58 \cdot 10^4 \text{ J} \approx 16 \text{ kJ}.$$

7.4 LAVORO SVOLTO DA UNA FORZA ELASTICA

Obiettivi di apprendimento

opo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di…

09 Applicare la relazione, detta legge di Hooke, che intercorre tra la forza agente su un corpo attaccato a una molla, l'allungamento o la compressione della molla e la costante della molla.
10 Sapere che la forza applicata da una molla è una forza variabile.
11 Calcolare il lavoro svolto da una forza elastica applicata a un corpo integrando la forza dalla posizione iniziale a quella finale del corpo o utilizzando il noto risultato generico di tale integrazione.
7.12 Calcolare il lavoro per integrazione su un grafico che descrive la forza in funzione della posizione di un oggetto.
7.13 Applicare il teorema dell'energia cinetica al caso di un corpo in moto per effetto di una forza elastica.

Idee chiave

- La forza di richiamo F_m applicata da una molla è
$$F_m = -kd \qquad \text{(legge di Hooke)},$$
in cui d è lo spostamento del capo libero della molla a partire dalla sua posizione iniziale, cioè quando si trova in stato di riposo, e k è la costante della molla, una misura della sua rigidità. Disponiamo l'asse x parallelo all'asse della molla e l'origine nella posizione della sua estremità libera quando si trova in condizioni di riposo. Si può dunque scrivere
$$F_x = -kx \qquad \text{(legge di Hooke)}.$$
- La forza elastica è una forza variabile: varia con lo spostamento del capo libero della molla.
- Per un corpo fissato al capo libero di una molla, il lavoro compiuto su di esso dalla forza elastica per uno spostamento dalla posizione iniziale x_i a quella finale x_f è dato da
$$L_m = \tfrac{1}{2}kx_i^2 - \tfrac{1}{2}kx_f^2.$$
Ponendo $x_i = 0$ e $x_f = x$, si ha
$$L_m = -\tfrac{1}{2}kx^2.$$

Lavoro svolto da una forza elastica

Prenderemo in esame il lavoro compiuto su una particella da un particolare tipo di forza variabile, la **forza elastica**, esercitata per esempio da una molla. Molte forze in natura presentano un comportamento che ha la stessa forma matematica della forza elastica. In questo modo, studiando il caso della molla, possiamo acquisire conoscenze sul comportamento di molte altre forze.

Forza esercitata da una molla

La figura 7.10a rappresenta una molla nel suo **stato di riposo**, quando cioè non è compressa né tirata. Uno dei due capi è fisso, mentre all'altro capo, che è libero, è attaccato un oggetto assimilabile a una particella, come per esempio un blocco rigido. Nella figura 7.10b abbiamo allungato la molla tirando il blocco verso destra. Per reazione la molla tira il blocco verso sinistra, tendendo a ripristinare il suo stato di riposo. (La forza esplicata dalla molla è spesso chiamata *forza di richiamo*). Nella figura 7.10c abbiamo compresso la molla spingendo il blocco verso sinistra. Ora la molla spinge il blocco verso destra, per ripristinare anche questa volta il suo stato di riposo.

Per molte molle si può ritenere, con una buona approssimazione, che la forza $\vec{F}$ esercitata dalla molla sia *proporzionale allo spostamento* $\vec{d}$ del capo libero della molla rispetto al punto in cui si trova quando la molla è in stato di riposo. La forza elastica della molla è data da

$$\vec{F} = -k\vec{d} \qquad \text{(legge di Hooke)}, \tag{7.20}$$

che è nota come **legge di Hooke**, dal nome di Robert Hooke, scienziato inglese della fine del '600. Il segno meno nell'equazione 7.20 indica che la forza elastica della molla è sempre orientata in verso opposto rispetto allo spostamento del suo capo libero dalla posizione di riposo. La costante k è chiamata **costante elastica** (o anche, nel caso specifico di una molla, *costante della molla*) ed è una misura della rigidità della molla. Maggiore è k, più rigida è la molla: cioè maggiore è k, maggiore sarà la forza per uno stesso valore dello spostamento. L'unità SI per k è il newton al metro (N/m).

Nella figura 7.10 l'asse x è orientato parallelamente all'asse della molla, con l'origine ($x = 0$) nella posizione in cui si trova il capo libero quando la molla è in stato di riposo. In questa, che è la configurazione usuale, l'equazione 7.20 diventa

$$F_x = -kx \qquad \text{(legge di Hooke)}. \tag{7.21}$$

Se x è positivo (molla tirata verso destra sull'asse x), F_x è negativo (la forza è diretta verso sinistra); viceversa se x è negativo.

Notiamo che la forza della molla è una *forza variabile*, perché modulo e verso dipendono dalla posizione x del capo libero: F_x si può scrivere come $F(x)$. La legge di Hooke è una funzione *lineare* tra F_x e x.

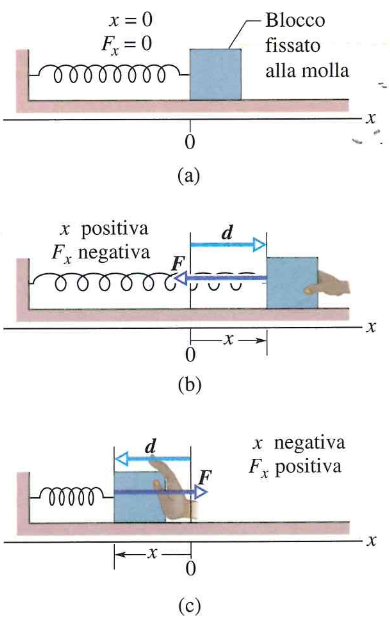


Figura 7.10 (a) Una molla nel suo stato di riposo. L'origine dell'asse x è stata collocata all'estremità libera della molla attaccata al blocco. (b) Il blocco viene spostato di $\vec{d}$, e la molla viene stesa per una lunghezza x positiva. Notare la forza di richiamo $\vec{F}$ esercitata dalla molla. (c) La molla viene schiacciata per una lunghezza x negativa. Anche qui, notare la forza di richiamo.

ISBN 978-88-08-18229-6

Lavoro svolto da una forza elastica

Per trovare un'espressione del lavoro svolto dalla forza elastica al muoversi del blocco di figura 7.10a, facciamo due ipotesi semplificative sulla molla. (1) La molla sia *priva di massa*; come dire che la sua massa è trascurabile rispetto alla massa del blocco. (2) Sia una *molla ideale*, cioè che obbedisce perfettamente alla legge di Hooke. Assumiamo anche che il contatto tra blocco e pavimento sia privo d'attrito e che il blocco si comporti come un corpo puntiforme.

Supponiamo di spostare il blocco verso destra con un colpo brusco mettendolo in moto e poi lasciandolo andare. Man mano che il blocco si sposta verso destra, la forza di richiamo $\boldsymbol{F}$ compie lavoro sul blocco, lo rallenta e ne riduce l'energia cinetica. *Non* possiamo tuttavia servirci dell'equazione 7.7, $L = Fd \cos \phi$, perché questa forza non è costante e quindi non abbiamo un unico valore di F.

Abbiamo a disposizione una soluzione elegante per affrontare il problema. (1) Suddividiamo il tratto percorso dal blocco in piccoli segmenti, tanto minuti che ci permettano di attribuire, per ciascuno di essi, un valore a F praticamente costante su tutto il segmento. (2) A questo punto possiamo ricorrere all'equazione 7.7 applicata a ciascun segmento per calcolare il contributo al lavoro compiuto durante la percorrenza di quel segmento. (3) Alla fine sommiamo tutti i contributi al lavoro relativi a ciascun segmento e otteniamo il lavoro totale. Questo è il nostro piano, ma naturalmente non intendiamo passare le nostre prossime giornate a calcolare e sommare un numero così enorme di contributi, che comunque poi alla fine ci darebbero un risultato approssimato. Piuttosto, scegliamo di ridurre la dimensione dei segmenti a un valore *infinitesimo*, in modo che l'errore per l'assunzione di un valore costante tenda ad annullarsi. Poi, anziché eseguire una somma algebrica di un'infinità di termini, operiamo un'integrazione matematica. Con gli strumenti del calcolo infinitesimale arriveremo al risultato esatto in pochi minuti invece che a uno approssimato in lunghi giorni di fatiche.

Per trovare il lavoro svolto dobbiamo ricorrere all'analisi matematica. Sia x_i la posizione iniziale del blocco e x_f quella finale. Dividiamo la distanza tra queste due posizioni in molti segmenti, ciascuno di lunghezza Δx. Chiamiamoli 1, 2, ecc. a partire da x_i. Nel moto del blocco per l'intera lunghezza di un segmento la forza elastica varia di così poco, essendo questa lunghezza estremamente piccola, da poter essere considerata costante lungo ciascun segmento. Chiamiamo le forze relative a ciascun segmento F_1, F_2, ecc., ove il pedice si riferisce al segmento.

Ora, poiché si considera costante la forza, *possiamo* applicare la (7.7) a ciascun segmento per trovare il lavoro. Nel nostro caso ϕ è sempre uguale a 0 e quindi cos ϕ vale sempre 1. Perciò il lavoro svolto nel segmento 1 è $F_1 \Delta x$, quello relativo al segmento 2 è $F_2 \Delta x$ e così via. Il lavoro complessivo L_m svolto dalla molla sull'intero percorso da x_i a x_f è la somma di tutti questi lavori elementari:

$$L_m = \sum -F_j \Delta x, \tag{7.22}$$

ove il pedice j rappresenta un generico segmento. Facendo tendere Δx a zero, la (7.22) assume la forma

$$L_m = \int_{x_i}^{x_f} -F \, dx. \tag{7.23}$$

Sostituendo a F l'espressione data dalla (7.21), si ottiene

$$\begin{aligned} L &= \int_{x_i}^{x_f} (-kx)\, dx = -k \int_{x_i}^{x_f} x\, dx = \\ &= \left(-\tfrac{1}{2}k\right)\left[x^2\right]_{x_i}^{x_f} = \left(-\tfrac{1}{2}k\right)(x_f^2 - x_i^2), \end{aligned} \tag{7.24}$$

ovvero

$$L_m = \tfrac{1}{2}kx_i^2 - \tfrac{1}{2}kx_f^2 . \tag{7.25}$$

Il lavoro risulta di segno positivo se $x_i^2 > x_f^2$ e negativo se $x_i^2 < x_f^2$. Vale a dire che dipende dal verso di trasferimento dell'energia al blocco o dal blocco durante lo spostamento da x_i a x_f. *Attenzione*: la posizione finale x_f è nel *secondo* dei termini che compaiono a destra nell'equazione 7.25. Dunque l'equazione 7.25 afferma:

> Il lavoro compiuto L_m è positivo quando il blocco si avvicina alla posizione di riposo ($x = 0$) ed è negativo quando se ne allontana. Il lavoro è nullo se la distanza finale da $x = 0$ non è mutata.

ISBN 978-88-08-18229-6

Se $x_i = 0$ e se chiamiamo x la posizione finale, l'equazione 7.25 diventa

$$L_m = -\tfrac{1}{2}kx^2. \quad (7.26)$$

Lavoro svolto da una forza applicata

Ora supponiamo di spostare il blocco lungo l'asse x applicandogli invece una forza $\boldsymbol{F}_a$. Durante lo spostamento la forza applicata compie il lavoro L_a sul blocco, mentre la forza di richiamo della molla compie il lavoro L_m. Dall'equazione 7.10, la variazione di energia cinetica ΔK del blocco dovuta a questi due trasferimenti di energia è

$$\Delta K = K_f - K_i = L_a + L_m, \quad (7.27)$$

in cui K_f è l'energia cinetica al termine dello spostamento e K_i è quella all'inizio dello spostamento. Se il blocco è a riposo prima e dopo questo spostamento, sia K_f sia K_i sono nulli e l'equazione 7.27 si riduce a

$$L_a = -L_m. \quad (7.28)$$

Quando un blocco attaccato a una molla è a riposo sia prima sia dopo uno spostamento, il lavoro sviluppato sul blocco dalla forza applicata è l'opposto del lavoro svolto su di esso dalla molla.

Attenzione: se il blocco non è fermo né prima né dopo lo spostamento, la precedente affermazione *non* è valida.

VERIFICA 2

Le posizioni iniziale e finale del blocco lungo l'asse x per i tre casi della figura 7.10 siano (a) –3 cm, 2 cm; (b) 2 cm, 3 cm; (c) –2 cm, 2 cm. Per ciascun caso, il lavoro svolto dalla molla sul blocco è positivo, negativo o nullo?

(a) positivo ; (b) negativo ; (c) nullo

PROBLEMA SVOLTO 7.6 Lavoro svolto da una molla per variare l'energia cinetica

Quando è una forza elastica a compiere lavoro su un corpo, *non* possiamo calcolarlo moltiplicando semplicemente la forza per lo spostamento. Non abbiamo infatti un valore costante della forza, dato che esso varia con la posizione del corpo. Possiamo però suddividere lo spostamento in un numero infinito di tratti elementari e attribuire a ciascuno di essi un valore di forza come costante. Con un'integrazione infine sommiamo tutti i contributi. Qui utilizzeremo il risultato generico dell'integrazione. Un blocco di massa m = 0,40 kg scivola, con una velocità costante di modulo v pari a 0,50 m/s, sul piano orizzontale privo di attrito di un tavolo. Il blocco si arresta comprimendo una molla collocata sul suo percorso (fig. 7.11). La costante elastica della molla è k = 750 N/m. Per quale distanza massima d è compressa la molla?

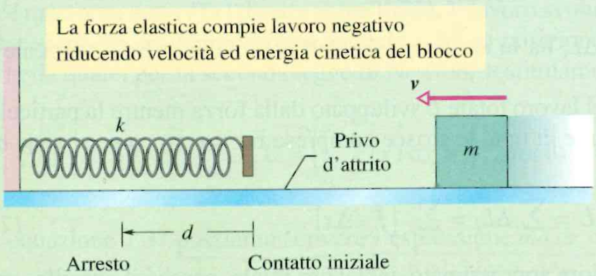


Figura 7.11 Problema svolto 7.6. Un blocco di massa m si muove con velocità v verso una molla di costante elastica k.

SOLUZIONE

Abbiamo tre idee chiave.

1. Il lavoro svolto dalla forza elastica sul blocco è legato alla distanza cercata mediante l'equazione 7.26, ove d prende il posto di x.
2. Questo lavoro è anche in relazione con l'energia cinetica del blocco tramite l'equazione 7.10.
3. L'energia cinetica del blocco ha un valore iniziale $K = \frac{1}{2}mv^2$ e vale zero quando il blocco si arresta.

Mettendo insieme le prime due idee, scriviamo il teorema dell'energia cinetica per il blocco come

$$K_f - K_i = -\tfrac{1}{2}kd^2.$$

La sostituzione conseguente alla terza idea porta a

$$0 - \tfrac{1}{2}mv^2 = -\tfrac{1}{2}kd^2.$$

Semplificando, introducendo i dati e risolvendo rispetto a d, otteniamo

$$d = v\sqrt{\frac{m}{k}} = (0{,}50\ \text{m/s})\sqrt{\frac{0{,}40\ \text{kg}}{750\ \text{N/m}}} =$$

$$= 1{,}2 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 1{,}2\ \text{cm}.$$

 ISBN 978-88-08-18229-6

.5 LAVORO SVOLTO DA UNA GENERICA FORZA VARIABILE

iettivi di apprendimento

)o aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di…

4 Calcolare, data una forza variabile in funzione della posizione, il lavoro da essa svolto su un corpo integrando la funzione dalla posizione iniziale a quella finale, in una o più dimensioni.

5 Calcolare, dato un grafico della forza in funzione della posizione, il lavoro svolto mediante un'integrazione grafica dalla posizione iniziale a quella finale di un corpo.

7.16 Ricavare il grafico della forza in funzione della posizione a partire da quello dell'accelerazione in funzione della posizione.

7.17 Applicare il teorema dell'energia cinetica ai casi in cui un corpo è soggetto a una forza variabile nel tempo.

›e chiave

- Se la forza $\boldsymbol{F}$ applicata a un corpo puntiforme dipende dalla posizione del corpo, per trovare il lavoro svolto dalla forza mentre il corpo si sposta dalla posizione iniziale r_i di coordinate (x_i, y_i, z_i) alla posizione finale r_f di coordinate (x_f, y_f, z_f) occorre calcolare l'integrale della forza. Se si può assumere che la componente F_x dipenda solo da x ma non da y o da z, che la componente F_y dipenda solo da y e non da x o da z e che la componente F_z dipenda solo da z e non da x o da y, il lavoro è dato da

$$L = \int_{x_i}^{x_f} F_x\, dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y\, dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z\, dz\,.$$

- Qualora $\boldsymbol{F}$ sia completamente descritta dalla sola componente x, l'equazione si riduce a

$$L = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx\,.$$

Lavoro svolto da una generica forza variabile

Analisi unidimensionale

Ritorniamo ora alla situazione della figura 7.2, ma consideriamo la forza come diretta lungo l'asse x e il suo modulo variabile in funzione della posizione x. In questo modo, man mano che la particella si muove, cambia l'intensità della forza che su di essa svolge lavoro. Ed è solo il modulo di questa forza variabile a cambiare, giacché la sua direzione rimane costante. Imponiamo inoltre che questo valore sia funzione solo della posizione e non del tempo.

La figura 7.12a mostra un grafico di questa *forza variabile in una sola dimensione*. Quale lavoro viene svolto sulla particella da questa forza mentre la particella si sposta da un punto iniziale x_i a un punto finale x_f? Non possiamo usare l'equazione 7.7 perché è applicabile solo a una forza $\boldsymbol{F}$ costante. Adottando ancora l'approccio infinitesimale, dividiamo lo spostamento totale della particella in un certo numero di intervalli di lunghezza Δx, scegliendo Δx abbastanza piccolo da poter ipotizzare che la forza $F(x)$ sia abbastanza costante entro quell'intervallo. Chiameremo $\overline{F(x)}$ il valore medio di $F(x)$ all'interno dell'intervallo j. Nella figura 7.12b $\bar{F}_j$ è l'altezza del j-esimo intervallo.

Considerando $\bar{F}_j$ costante, l'incremento di lavoro ΔL_j sviluppato dalla forza in un particolare intervallo è dato approssimativamente dall'equazione 7.7, ovvero

$$\Delta L_j = \bar{F}_j \Delta x. \tag{7.29}$$

Nel grafico della figura 7.12b, ΔL_j ha lo stesso valore dell'area della striscia verticale alla quale si riferisce.

Per approssimare il valore del lavoro totale L sviluppato dalla forza mentre la particella si sposta da x_i a x_f, sommiamo le aree di tutte le strisce comprese fra x_i e x_f, come si vede nella figura 7.12b, ottenendo:

$$L = \sum \Delta L_j = \sum \left[\bar{F}_j\, \Delta x\right]. \tag{7.30}$$

L'equazione 7.30 fornisce un valore approssimato del lavoro totale, perché il «profilo» spezzato costituito dalle sommità delle strisce rettangolari della figura 7.12b rappresenta soltanto un'approssimazione della curva reale rappresentata in quella figura.

Possiamo migliorare l'approssimazione riducendo la larghezza Δx della striscia e creando così più strisce, come vediamo nella figura 7.12c. Al limite possiamo far tendere a zero l'ampiezza della striscia; il numero delle strisce diventa in questo caso infinitamente grande. Abbiamo quindi, come risultato esatto

$$L = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \left[\bar{F}_j \Delta x \right]. \tag{7.31}$$

Questo limite è esattamente ciò che si definisce come l'integrale della funzione $F(x)$ tra gli estremi x_i e x_f. Quindi l'equazione 7.31 si scrive

$$L = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx\,. \tag{7.32}$$

Se conosciamo la funzione $F(x)$, la possiamo sostituire nell'equazione 7.32, possiamo introdurre gli estremi appropriati nell'integrazione, e così trovare il lavoro. (Vedi l'appendice E che contiene una lista degli integrali più comuni). Geometricamente il lavoro è uguale all'area sottostante alla curva $F(x)$ e compresa fra gli estremi x_i e x_f, come indicato nella figura 7.12d.

Analisi tridimensionale

Consideriamo una particella sulla quale agisce una forza

$$\boldsymbol{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}, \tag{7.33}$$

e poniamo che alcune o tutte le sue componenti, F_x, F_y e F_z, dipendano dalla posizione della particella. Introduciamo ora una tripla semplificazione: F_x dipenda solo da x, ma non da y o da z; F_y dipenda solo da y, e analogamente dicasi per F_z. Supponiamo inoltre che la particella compia uno spostamento infinitesimo

$$d\boldsymbol{r} = (dx)\mathbf{i} + (dy)\mathbf{j} + (dz)\mathbf{k}. \tag{7.34}$$

L'incremento di lavoro dL sviluppato sulla particella da $\boldsymbol{F}$ durante lo spostamento $d\boldsymbol{r}$ è, per l'equazione 7.8:

$$dL = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \tag{7.35}$$

Il lavoro L sviluppato da $\boldsymbol{F}$ mentre la particella si sposta da una posizione iniziale r_i di coordinate (x_i, y_i, z_i) a una posizione finale r_f di coordinate (x_f, y_f, z_f) è quindi

$$L = \int_{r_i}^{r_f} dL = \int_{x_i}^{x_f} F_x\, dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y\, dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z\, dz\,. \tag{7.36}$$

Se $\boldsymbol{F}$ ha solo la componente x diversa da zero, l'equazione 7.36 si riduce all'equazione 7.32.

Teorema dell'energia cinetica per una forza variabile

L'equazione 7.32 fornisce l'espressione del lavoro compiuto da una forza variabile su un corpo nel caso unidimensionale. Dimostreremo ora che il lavoro è uguale alla variazione di energia cinetica del corpo, come stabilisce il teorema dell'energia cinetica.

Consideriamo una particella di massa m che si sta muovendo lungo l'asse x e sulla quale agisce una forza netta $F(x)$ diretta come l'asse. Il lavoro svolto sulla particella da questa forza mentre si muove da una posizione iniziale x_i a una posizione finale x_f è dato dall'equazione 7.32 nella quale, per la seconda legge di Newton, sostituiamo ma a $F(x)$:

$$L = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx = \int_{x_i}^{x_f} ma\, dx\,. \tag{7.37}$$

Nell'equazione 7.37 possiamo scrivere l'espressione $ma\, dx$ come

$$ma\, dx = m\frac{dv}{dt}dx\,, \tag{7.38}$$

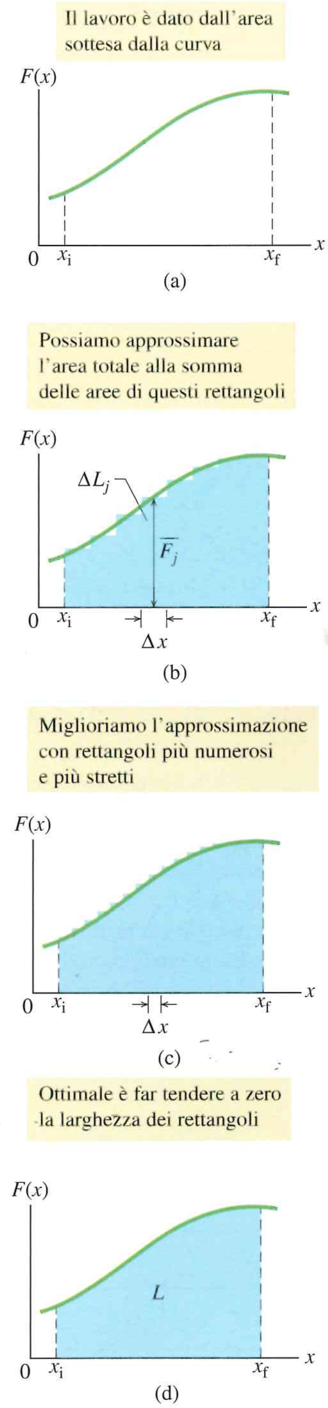


Figura 7.12 (a) Curva che descrive l'andamento di una generica forza unidimensionale in funzione dello spostamento della particella sulla quale agisce. La particella si sposta da x_i a x_f. (b) Come (a), ma con l'area sotto la curva suddivisa in strisce. (c) Come (b), ma con l'area sotto la curva suddivisa in strisce più sottili. (d) Il caso limite. Il lavoro compiuto dalla forza è dato dall'equazione 7.32 ed è rappresentato geometricamente dall'area ombreggiata sotto la curva e compresa tra gli estremi.

ISBN 978-88-08-18229-6

nella quale possiamo sostituire:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v, \tag{7.39}$$

ottenendo

$$ma\ \mathrm{d}x = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v\ \mathrm{d}x = mv\ \mathrm{d}v. \tag{7.40}$$

Sostituendo a $ma\ \mathrm{d}x$ nell'equazione 7.37 la sua espressione data dalla (7.40), otteniamo

$$L = \int_{v_\mathrm{i}}^{v_\mathrm{f}} mv\ \mathrm{d}v = m\int_{v_\mathrm{i}}^{v_\mathrm{f}} v\ \mathrm{d}v = \tfrac{1}{2}mv_\mathrm{f}^2 - \tfrac{1}{2}mv_\mathrm{i}^2. \tag{7.41}$$

Notiamo che quando sostituiamo alla variabile x la variabile v, siamo obbligati a esprimere gli estremi dell'integrale in termini della nuova variabile. Notiamo anche che la massa m, essendo una costante, può essere portata fuori dal segno di integrale.

I termini di destra dell'equazione 7.41 sono energie cinetiche e quindi possiamo scrivere questa equazione semplicemente come

$$L = K_\mathrm{f} - K_\mathrm{i} = \Delta K,$$

che è il teorema dell'energia cinetica.

ROBLEMA SVOLTO 7.7 Lavoro calcolato per integrazione grafica

lla figura 7.13b vediamo un blocco di massa 8,0 kg scivolare su un ıno privo d'attrito per effetto di una forza, partendo dal punto $x_1 = 0$ e minando al punto $x_3 = 6{,}5$ m. Durante il moto il modulo e il verso la forza variano come descritto dal grafico di figura 7.13a. Per esem-), da $x = 0$ a $x = 1$ m la forza è positiva (cioè orientata come l'asse x sitivo) e cresce in intensità da 0 a 40 N. Tra $x = 4$ m e $x = 5$ m la forza ıegativa e il suo modulo cresce da 0 a 20 N. Si noti che quest'ultimo to è espresso come −20 N. L'energia cinetica del blocco nel punto x_1 è = 280 J. Qual è la velocità del blocco nelle posizioni $x_1 = 0$, $x_2 = 4{,}0$ e $x_3 = 6{,}5$ m?

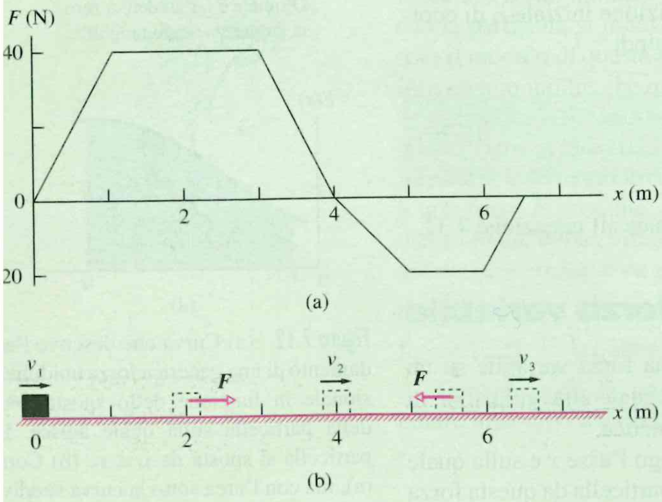


Figura 7.13 Problema svolto 7.7. (a) Grafico che descrive l'intensità e il verso di una forza variabile che agisce su un blocco in moto sul pavimento lungo l'asse x. (b) Posizione del blocco in diversi istanti.

OLUZIONE

) In qualunque punto possiamo mettere in relazione la velocità del locco con la sua energia cinetica mediante l'equazione 7.1. (2) Il teore-ıa dell'energia cinetica dell'equazione 7.10 lega l'energia cinetica fina-K_f a quella iniziale K_i e al lavoro L svolto sul blocco. (3) Il lavoro L volto da una forza variabile $F(x)$ si può ottenere per integrazione della forza rispetto alla posizione x. Dall'equazione 7.32 abbiamo

$$L = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\ dx.$$

Non conosciamo analiticamente la funzione $F(x)$ su cui condurre l'integrazione, ma abbiamo a disposizione il grafico che ce la descrive e che possiamo integrare misurando l'area sottesa dalla curva. Se quest'ultima giace al di sopra dell'asse x, il lavoro è positivo. Viceversa è negativo.

Calcoli. Facile ottenere la velocità a $x = 0$, perché già conosciamo l'energia cinetica in questo punto:

$$K_1 = \tfrac{1}{2}mv_1^2,$$
$$280\ \mathrm{J} = \tfrac{1}{2}(8{,}0\ \mathrm{kg})\,v_1^2,$$

e dunque

$$v_1 = 8{,}37\ \mathrm{m/s} \approx 8{,}4\ \mathrm{m/s}.$$

Nel tratto tra $x = 0$ e $x = 4{,}0$ m il grafico della funzione in figura 7.13a giace nel 1° quadrante ed è positivo, il che significa che il lavoro viene svolto sul blocco. Suddividiamo l'area sotto la curva in tre parti: un triangolo a sinistra, un rettangolo al centro e un altro triangolo a destra. La loro area totale è

$$\tfrac{1}{2}(40\ \mathrm{N})(1\ \mathrm{m}) + (40\ \mathrm{N})(2\ \mathrm{m}) + \tfrac{1}{2}(40\ \mathrm{N})(1\ \mathrm{m}) =$$
$$= 120\ \mathrm{N \cdot m} = 120\ \mathrm{J}.$$

Ciò vuol dire che in questo tratto la forza compie un lavoro di 120 J sul blocco, aumentandone la velocità e l'energia cinetica. Di conseguenza, quando il blocco raggiunge il punto $x = 4{,}0$ m, per il teorema dell'energia cinetica deduciamo che l'energia cinetica posseduta dal blocco è

$$K_2 = K_1 + L = 280\ \mathrm{J} + 120\ \mathrm{J} = 400\ \mathrm{J}.$$

E anche qui otteniamo dalla definizione di energia cinetica

$$K_2 = \tfrac{1}{2}mv_2^2,$$
$$400\ \mathrm{J} = \tfrac{1}{2}(8{,}0\ \mathrm{kg})\,v_2^2,$$

ISBN 978-88-08-18229-6

e dunque

$$v_2 = 10 \text{ m/s}.$$

Qui abbiamo la massima velocità raggiunta dal blocco perché d'ora innanzi, fino a $x = 6{,}5$ m, la forza è negativa, significando che si oppone al moto del corpo, che compie lavoro negativo su di esso e ne diminuisce sia l'energia cinetica sia la velocità. In questo tratto l'area compresa tra la curva e l'asse x è

$$\tfrac{1}{2}(20 \text{ N})(1 \text{ m}) + (20 \text{ N})(1 \text{ m}) + \tfrac{1}{2}(20 \text{ N})(0{,}5 \text{ m}) = \\ = 35 \text{ N} \cdot \text{m} = 35 \text{ J}.$$

Il lavoro svolto in tale tratto è -35 J. Nel punto $x = 4{,}0$ m il blocco aveva $K = 400$ J. Nel punto $x = 6{,}5$ m dal teorema dell'energia cinetica ricaviamo che l'energia cinetica è

$$K_3 = K_2 + L = 400 \text{ J} - 35 \text{ J} = 365 \text{ J}.$$

Di nuovo, dalla definizione di energia cinetica otteniamo

$$K_3 = \tfrac{1}{2}mv_3^2,$$
$$365 \text{ J} = \tfrac{1}{2}(8{,}0 \text{ kg})\, v_3^2,$$

e dunque

$$v_3 = 9{,}55 \text{ m/s} \approx 9{,}6 \text{ m/s}.$$

Il blocco sta ancora muovendosi concordemente al verso positivo dell'asse x a una velocità di poco maggiore a quella iniziale.

PROBLEMA SVOLTO 7.8 Lavoro, integrazione in due dimensioni

Quando una forza applicata a un corpo dipende dalla posizione di quest'ultimo, *non* possiamo calcolare il lavoro svolto su di esso moltiplicando semplicemente la forza per lo spostamento. La forza infatti non è costante e varia. Dobbiamo dunque trovare il lavoro svolto in piccoli tratti dello spostamento per poi sommare i contributi di tutti i tratti. Si può obiettare che la forza varia anche all'interno di ogni singolo tratto, ma la variazione è così piccola che possiamo considerare la forza come costante su tutto il tratto. L'approssimazione che ne consegue si può ridurre ed eliminare riducendo i tratti a dimensioni infinitesime. La fatica dell'operazione di somma cresce, è vero, però possiamo ricorrere ai servigi del calcolo infinitesimale, che con un'integrazione matematica ci porta al risultato in pochi minuti.

Quanto lavoro viene sviluppato da una forza $\boldsymbol{F} = (3x^2 \text{ N})\mathbf{i} + (4 \text{ N})\mathbf{j}$, che agisce su una particella variandone solo l'energia cinetica, mentre si muove dal punto (2 m, 3 m) al punto (3 m, 0 m)? La sua velocità in modulo aumenta, diminuisce o resta uguale?

SOLUZIONE

Idea chiave è riconoscere che si tratta di una forza variabile, giacché la sua componente lungo l'asse x dipende da x. Pertanto, per trovare il lavoro, non ci servono le equazioni 7.7 o 7.8. Ricorriamo invece all'equazione 7.36 con la quale integriamo la forza.

Calcoli. Scriviamo due integrali, uno per ciascun asse:

$$L = \int_2^3 3x^2\, dx + \int_3^0 4\, dy = 3\int_2^3 x^2\, dx + 4\int_3^0 dy = \\ = 3[\tfrac{1}{3}x^3]_2^3 + 4[y]_3^0 = [3^3 - 2^3] + 4[0 - 3] = 7{,}0 \text{ J}.$$

Il risultato ~~negativo~~ positivo indica che l'energia viene fornita alla particella per mezzo della forza $\boldsymbol{F}$. Poiché l'energia cinetica della particella aumenta, lo stesso deve fare la sua velocità. Se il lavoro fosse stato negativo, l'energia cinetica e la velocità sarebbero diminuite.

7.6 POTENZA

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di…

7.18 Applicare la relazione tra la potenza media, il lavoro svolto da una forza e l'intervallo di tempo in cui è stato svolto.

7.19 Trovare la potenza istantanea quando si conosce il lavoro compiuto in funzione del tempo.

7.20 Determinare la potenza istantanea attraverso il prodotto scalare del vettore forza e del vettore velocità di un corpo, operando sia con i versori sia in termini di modulo e orientamento.

Idee chiave

- La potenza sviluppata da una forza è data dal rapporto del lavoro svolto dalla forza nell'unità di tempo.
- Se una forza compie il lavoro L in un intervallo di tempo Δt, la potenza media sviluppata dalla forza in quell'intervallo è

$$\overline{P} = \frac{L}{\Delta t}.$$

- La potenza istantanea è la derivata del lavoro rispetto al tempo:

$$P = \frac{dL}{dt}.$$

- Se la forza $\boldsymbol{F}$ forma un angolo ϕ con la direzione della velocità istantanea $\boldsymbol{v}$, la potenza istantanea è data da

$$P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = Fv \cos\phi.$$

ISBN 978-88-08-18229-6

…/ZUMA

7.14 Un veicolo sviluppa una certa …a per rimorchiare un carico molto …e.

Potenza

Un impresario edile vuole portare un carico di mattoni dal marciapiede alla sommità di un edificio. È facile calcolare quanto lavoro è richiesto per questa operazione. L'impresario, tuttavia, è molto più interessato a conoscere la rapidità con cui l'argano può svolgere questo lavoro. L'operazione richiederà 5 minuti (tempo più che accettabile) oppure 1 settimana (inaccettabile)?

La rapidità con cui viene sviluppata una certa quantità di lavoro è una grandezza chiamata **potenza**. Se un lavoro L è svolto da una forza in un intervallo di tempo Δt, la **potenza media** riferita a quell'intervallo di tempo si definisce

$$\bar{P} = \frac{L}{\Delta t}. \qquad (7.42)$$

La **potenza istantanea** P è la rapidità istantanea con la quale viene svolto un lavoro, che si può scrivere

$$P = \frac{dL}{dt}. \qquad (7.43)$$

Supponete di conoscere il lavoro in funzione del tempo $L(t)$ compiuto da una forza. Per conoscere la potenza istantanea P all'istante, poniamo, $t = 3{,}0$ s, dobbiamo prima operare la derivata di $L(t)$ e poi calcolarla per il valore $t = 3{,}0$ s.

L'unità di misura SI della potenza è il joule al secondo. Questa unità si usa così spesso che ha un proprio nome: il **watt** (W), in onore di James Watt, che migliorò grandemente la potenza con cui le macchine a vapore potevano erogare lavoro. Spesso è usato ancora il cavallo-vapore (CV), che all'incirca corrisponde all'unità inglese *horsepower* (hp). Il rapporto fra queste unità di misura è

$$1 \text{ watt} = 1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$$

$$1 \text{ cavallo-vapore} = 1 \text{ CV} = 735{,}5 \text{ W}. \qquad (7.44)$$

Un'analisi dell'equazione 7.42 mostra che il lavoro si può esprimere come una potenza moltiplicata per un tempo, da cui si giustifica, per il lavoro, l'uso della familiare unità di misura *wattora* (Wh), e dei suoi multipli, come il kilowattora. Quindi

$$1 \text{ wattora} = 1 \text{ Wh} = (1 \text{ W})(3600 \text{ s}) = 3{,}60 \cdot 10^3 \text{ J} = 3{,}60 \text{ kJ}. \qquad (7.45)$$

Grazie forse alle bollette della luce, il watt e il kilowattora si identificano spesso come unità di misura elettriche. Si possono certo usare altrettanto bene per altri tipi di potenza e di energia. Quindi, se solleviamo questo libro dal pavimento e lo posiamo sul piano di un tavolo, siamo liberi di dichiarare il lavoro che abbiamo fornito come $4 \cdot 10^{-6}$ kWh (o più comodamente come 4 mWh).

Possiamo anche esprimere la rapidità con cui una forza sviluppa lavoro su un corpo in funzione di questa forza e della velocità del corpo. Per una particella che si sposta in una dimensione e sulla quale agisce una forza costante $\boldsymbol{F}$ diretta secondo un certo angolo ϕ, l'equazione 7.43 diventa

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{F \cos\phi \, dx}{dt} = F \cos\phi \left(\frac{dx}{dt}\right).$$

Possiamo scrivere in modo più semplice

$$P = Fv \cos\phi, \qquad (7.46)$$

in cui P è la potenza istantanea e v è la velocità della particella. L'espressione a destra dell'equazione 7.46 non è altro che il prodotto scalare tra $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{v}$, quindi si può scrivere

$$P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}. \qquad (7.47)$$

Per esempio, il pickup della figura 7.14 sta esercitando una forza $\boldsymbol{F}$ sul suo carico, che ha a un certo istante una velocità $\boldsymbol{v}$. La potenza del veicolo in ogni istante è data dalle equazioni 7.46 e 7.47.

VERIFICA 3

Un blocco, trattenuto al centro da una corda, si muove di moto circolare uniforme. La potenza relativa alla forza esercitata dalla corda sul blocco è positiva, negativa o nulla?

nulla

ISBN 978-88-08-18229-6

PROBLEMA SVOLTO 7.9 Potenza, forza e velocità

In questo esercizio calcoliamo un lavoro istantaneo, ossia il lavoro riferito a un istante anziché mediato su un intervallo di tempo. La figura 7.15 mostra le forze $\boldsymbol{F}_1$ ed $\boldsymbol{F}_2$ che agiscono su una scatola, che scivola verso destra su un pavimento privo di attrito. La forza $\boldsymbol{F}_1$ è orizzontale e ha intensità 2,0 N. La forza $\boldsymbol{F}_2$ forma un angolo di 60° rispetto al piano orizzontale e ha intensità 4,0 N. La velocità v della scatola in un certo istante è di 3,0 m/s.

(a) Qual è la potenza dovuta a ciascuna delle due forze in quell'istante e quant'è la potenza complessiva? La potenza complessiva è costante?

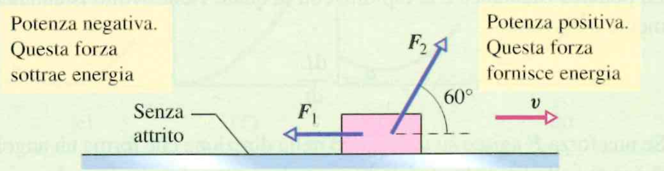


Figura 7.15 Problema svolto 7.9. Due forze, $\boldsymbol{F}_1$ ed $\boldsymbol{F}_2$, agiscono su una scatola che scivola verso destra su un terreno privo di attrito. La velocità della scatola è $\boldsymbol{v}$.

SOLUZIONE

L'idea chiave sta qui nel capire che vogliamo una potenza istantanea e non una potenza media su un certo intervallo di tempo. Poi osserviamo che è data la velocità del corpo puntiforme (piuttosto che il lavoro compiuto su di esso). Serviamoci dunque dell'equazione 7.47 per trovare la potenza associata a ciascuna forza. Per la forza $\boldsymbol{F}_1$, posto l'angolo $\phi_1 = 180°$ rispetto alla velocità $\boldsymbol{v}$, abbiamo

$$P_1 = F_1 v \cos \phi_1 = (2{,}0 \text{ N})(3{,}0 \text{ m/s})\cos 180° = -6{,}0 \text{ W}.$$

Cioè la forza $\boldsymbol{F}_1$ sta trasferendo energia *a spese* della scatola in ragione di 6,0 J/s.
Per la forza $\boldsymbol{F}_2$ e l'angolo $\phi_2 = 60°$ rispetto alla direzione di $\boldsymbol{v}$, si ha

$$P_2 = F_2 v \cos \phi_2 = (4{,}0 \text{ N})(3{,}0 \text{ m/s})\cos 60° = 6{,}0 \text{ W}.$$

Questo indica che la forza $\boldsymbol{F}_2$ sta trasferendo energia *a favore* della scatola in ragione di 6,0 J/s.
La seconda idea chiave sta nel considerare che la potenza complessiva è la somma delle due potenze (tenendo conto dei segni):

$$P_{\text{compl}} = P_1 + P_2 = -6{,}0 \text{ W} + 6{,}0 \text{ W} = 0{,}0 \text{ W},$$

che indica la potenza complessiva come nulla. L'energia cinetica di conseguenza non cambia e la velocità rimane costante a 3,0 m/s. Dato che non variano né le forze né la velocità, dall'equazione 7.47 deduciamo che non cambiano nemmeno P_1 e P_2 e pertanto la potenza complessiva resta sempre la stessa.

RIEPILOGO & SOMMARIO

Energia cinetica L'**energia cinetica** K associata al moto di una particella di massa m e di velocità v, purché v sia ben al di sotto della velocità della luce, è

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2. \tag{7.1}$$

Lavoro Il **lavoro** L è l'energia trasferita da o a un corpo per mezzo di una forza applicata su di esso. Quando è trasferita *verso* il corpo, il lavoro è positivo. Quando è trasferita *dal* corpo, il lavoro è negativo.

Lavoro svolto da una forza costante Il lavoro compiuto su una particella da una forza costante $\boldsymbol{F}$ durante uno spostamento $\boldsymbol{d}$ della particella è

$$L = Fd\cos\phi = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{d}. \qquad (7.7, 7.8)$$

in cui ϕ rappresenta l'angolo costante tra $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{d}$. Solo la componente di $\boldsymbol{F}$ lungo la direzione dello spostamento $\boldsymbol{d}$ compie lavoro sul corpo. Quando sul corpo agisce più di una forza, il **lavoro totale** è la somma dei singoli lavori svolti da ciascuna forza, oppure è il lavoro compiuto dalla somma risultante F_{net} di tutte le forze.

Lavoro ed energia cinetica La relazione tra la variazione ΔK di energia cinetica di un corpo e il lavoro totale svolto su di esso è

$$\Delta K = K_f - K_i = L \quad \text{(teorema dell'energia cinetica)}, \tag{7.10}$$

in cui K_i è l'energia cinetica iniziale del corpo e K_f è l'energia cinetica dopo che è stato esercitato il lavoro. Dall'equazione 7.10 si ottiene

$$K_f = K_i + L. \tag{7.11}$$

Lavoro svolto dalla forza gravitazionale Il lavoro L_g svolto dalla forza di gravità $\boldsymbol{F}_g$ relativa a un corpo di massa m durante lo spostamento $\boldsymbol{d}$ del corpo stesso è dato da

$$L_g = mgd\cos\phi, \tag{7.12}$$

in cui ϕ rappresenta l'angolo tra $\boldsymbol{F}_g$ e $\boldsymbol{d}$.

Lavoro svolto nel sollevamento e abbassamento di un corpo Il lavoro L_a esercitato da una forza applicata durante il sollevamento o l'abbassamento di un corpo è legato al lavoro L_g dovuto alla forza gravitazionale e alla variazione dell'energia cinetica da

$$\Delta K = K_f - K_i = L_a + L_g. \tag{7.15}$$

Se l'energia cinetica all'inizio del sollevamento eguaglia l'energia cinetica alla fine, l'equazione 7.15 si riduce a

$$L_a = -L_g, \tag{7.16}$$

da cui si vede che la forza applicata trasferisce tanta energia al corpo quanta ne viene sottratta dalla forza di gravità.

Forza elastica La forza $\boldsymbol{F}$ esercitata da una molla è data da

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{d} \quad \text{(legge di Hooke)}, \tag{7.20}$$

in cui $\boldsymbol{d}$ è lo spostamento dell'estremità libera della molla dalla posizione che corrisponde allo **stato di riposo** della molla (non compressa né stirata), e k è la **costante elastica della molla** (una misura della sua rigidità). Se l'origine di un asse x coincide con l'estremità libera della molla allo stato di riposo, la (7.20) si può scrivere

$$F_x = -kx \quad \text{(legge di Hooke)}. \tag{7.21}$$

La forza elastica come quella di una molla è dunque una forza variabile: varia in funzione dello spostamento del suo capo libero.