

Centro di massa e quantità di moto

9.1 CENTRO DI MASSA

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovrete essere in grado di...

- 9.01 Determinare la posizione del centro di massa di molte particelle disposte su un asse o su un piano, date le loro posizioni.
- 9.02 Localizzare il centro di massa di un corpo esteso dotato di simmetria.
- 9.03 Determinare il centro di massa per un corpo esteso bidimensiona-

le o tridimensionale avente una distribuzione uniforme di massa, procedendo così: (a) dividere mentalmente il corpo in figure geometricamente semplici, ciascuna delle quali può considerarsi come puntiforme e concentrata al suo centro; (b) calcolare il centro di massa dei corpi puntiformi che restano.

Idee chiave

- Il centro di massa di un sistema di n particelle è definito come quel punto di coordinate

$$x_{\text{cdm}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad y_{\text{cdm}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad z_{\text{cdm}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i,$$

ovvero

$$\mathbf{r}_{\text{cdm}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i,$$

in cui M rappresenta la massa totale del sistema.

L'aspetto fisico

I periti chiamati a testimoniare sui sinistri stradali fanno ricorso alla fisica. Gli istruttori che allenano le danzatrici fanno ricorso alla fisica. E infatti, analizzare moti complessi di qualsiasi genere richiede semplificazioni possibili attraverso la comprensione dei principi fisici. Impareremo in questo capitolo come il moto complicato di un sistema di corpi, per esempio di un'automobile o di una danzatrice, si possa semplificare determinando un punto particolare del sistema, il suo *centro di massa*.

Eccone un esempio. Se lanciate una palla in aria senza farla roteare (fig. 9.1a), il suo moto risulta semplice; segue una traiettoria parabolica, come descritto nel capitolo 4, e possiamo assimilare la palla a una particella. Ma se, invece di una palla, si tratta di una mazza da baseball (fig. 9.1b), il suo moto è più complicato. Dato che ogni parte della mazza si muove in modo diverso dalle altre seguendo traiettorie differenti, essa non può essere rappresentata come un corpo puntiforme; al contrario va considerata come un sistema di corpi puntiformi, ognuno dei quali segue un proprio percorso in aria. Esiste però un punto particolare della mazza – il suo *centro di massa* – che segue la semplice traiettoria parabolica. Tutte le altre parti si muovono attorno al centro di massa.

Sarà piuttosto difficile fare del lancio di mazze da baseball la vostra professione, ma potreste fare carriera come consiglieri di saltatori in lungo o di danzatori artistici su come spiccare il balzo in aria muovendo opportunamente gambe, braccia e tronco. La vostra analisi del moto partirebbe dalla determinazione del loro centro di massa, un'analisi particolarmente semplice.

Il centro di massa

Definiamo il **centro di massa** (cdm), o *centro d'inerzia*, di un sistema di punti materiali allo scopo di prevedere il possibile moto dell'intero sistema.

Il centro di massa di un corpo o di un sistema di corpi è il punto che si muove (1) come se tutta la massa fosse ivi concentrata e (2) come se tutte le forze esterne ivi agissero.

Il centro di massa si trova sull'asse della mazza. Lo possiamo localizzare tenendo la mazza in equilibrio su un dito teso: il centro di massa è sull'asse della mazza esattamente sopra al dito. Studieremo ora come determinare la posizione del centro di massa in un sistema di particelle. Cominceremo con semplici sistemi di poche particelle, per poi passare a oggetti più complessi, corpi solidi come le mazze da baseball. Poi vedremo come si muove il centro di massa di un sistema quando su quest'ultimo agiscono forze esterne.

Sistemi di particelle

Due particelle. La figura 9.2a rappresenta due punti materiali di massa m_1 e m_2 separati da una distanza d . Abbiamo scelto arbitrariamente un'origine dell'asse x coincidente con m_1 . Definiamo la posizione del centro di massa x_{cdm} di questo sistema di due punti con l'espressione

$$x_{\text{cdm}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d. \quad (9.1)$$

Supponiamo, per esempio, che sia $m_2 = 0$. In questo caso c'è soltanto una particella, m_1 , e il centro di massa deve trovarsi nella posizione della particella; l'equazione 9.1 si riduce puntualmente a $x_{\text{cdm}} = 0$. Se $m_1 = 0$, di nuovo c'è solo una particella m_2 , e abbiamo, come già ci aspettiamo, $x_{\text{cdm}} = d$. Se $m_1 = m_2$, le masse delle particelle sono uguali e il centro di massa sta a metà strada fra loro; l'equazione 9.1 si riduce a $x_{\text{cdm}} = \frac{1}{2}d$, ancora come previsto. Infine l'equazione 9.1 ci dice che, se m_1 e m_2 sono entrambi diversi da zero, x_{cdm} può soltanto essere compreso fra zero e d , il che significa che il centro di massa è situato in un punto fra le due particelle. Non è necessario far coincidere l'origine delle coordinate con una delle particelle.

La figura 9.2b rappresenta una situazione più generalizzata, in cui il sistema di coordinate è traslato verso sinistra. La posizione del centro di massa è ora definita da

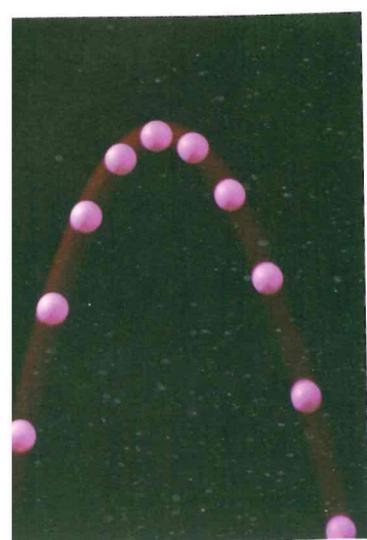
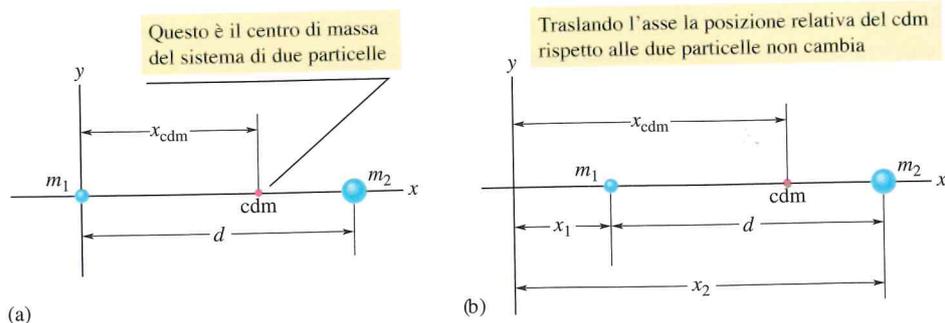
$$x_{\text{cdm}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \quad (9.2)$$

Notiamo che, ponendo $x_1 = 0$, x_2 diventa pari a d e la (9.2) si riduce, necessariamente, alla (9.1). Notiamo anche che, nonostante la traslazione del sistema di coordinate, il centro di massa è ancora alla stessa distanza da ciascuna delle due particelle. Il centro di massa è una proprietà fisica dei punti materiali, non del sistema di coordinate che si abbia l'avventura di usare. Chiamando M la massa totale del sistema, ossia $M = m_1 + m_2$, l'equazione 9.2 si può riscrivere così:

$$x_{\text{cdm}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}. \quad (9.3)$$

Più particelle. Possiamo estendere questa definizione a una situazione più generale, in cui n particelle sono allineate lungo l'asse x . La massa totale è allora $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ e la posizione del centro di massa diventa

$$x_{\text{cdm}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_n x_n}{M} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i. \quad (9.4)$$



hard Megna/Fundamental Photographs.

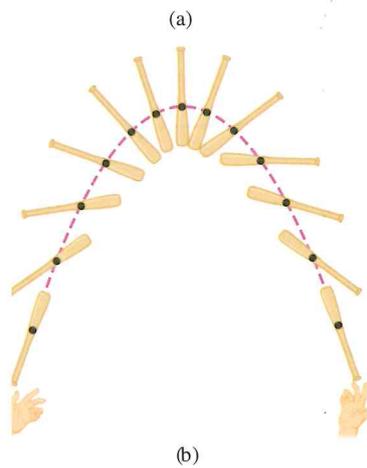


Figura 9.1 (a) Una palla lanciata in aria segue una traiettoria parabolica. (b) Così fa anche il centro di massa segnato da un punto) di una mazza che due giocatori si lanciano fra loro, mentre tutti gli altri punti della mazza descrivono curve più complesse.

Figura 9.2 (a) Due particelle di massa m_1 e m_2 sono separate da una distanza d . Il punto chiamato «cdm» segna la posizione del centro di massa, calcolata con l'equazione 9.1. (b) Come (a), salvo che l'origine degli assi è collocata più lontano rispetto alle due particelle. La posizione del centro di massa è calcolata con la (9.2). La posizione del centro di massa rispetto alle due particelle è identica nei due casi.

Qui il suffisso i è una variabile, o indice, che assume tutti i valori interi da 1 a n . Esso individua, ordinatamente, tutti i punti materiali e le rispettive coordinate.

Tre dimensioni. Se le particelle sono distribuite in uno spazio a tre dimensioni, occorrono tre coordinate per definire il centro di massa. Per estensione dell'equazione 9.4, esse sono:

$$x_{\text{cdm}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad y_{\text{cdm}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad z_{\text{cdm}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i. \quad (9.5)$$

Possiamo anche definire il centro di massa nel linguaggio dei vettori. La posizione di una particella di coordinate x_i, y_i, z_i è data da un vettore posizione:

$$\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}. \quad (9.6)$$

Qui l'indice identifica la particella, mentre \mathbf{i}, \mathbf{j} e \mathbf{k} sono vettori unitari rispettivamente orientati secondo il verso positivo degli assi x, y e z . Analogamente, la posizione del centro di massa di un sistema di particelle è data da un vettore posizione così definito:

$$\mathbf{r}_{\text{cdm}} = x_{\text{cdm}} \mathbf{i} + y_{\text{cdm}} \mathbf{j} + z_{\text{cdm}} \mathbf{k}. \quad (9.7)$$

Al sistema di tre equazioni scalari 9.5 si può sostituire un'unica equazione vettoriale:

$$\mathbf{r}_{\text{cdm}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i, \quad (9.8)$$

ove M rappresenta ancora la massa totale del sistema. Per verificare l'esattezza di questa equazione, si possono sostituire a \mathbf{r}_{cdm} e \mathbf{r}_i rispettivamente le loro espressioni fornite dalle equazioni 9.6 e 9.7, e separare quindi le tre componenti secondo x, y e z . Si ritrovano così le tre espressioni scalari del sistema 9.5.

Corpi rigidi

Un oggetto qualsiasi, come una mazza da baseball, contiene un così gran numero di particelle (atomi) che conviene considerarlo una distribuzione continua di materia. Le «particelle» diventano allora elementi infinitesimi di massa, le somme dell'equazione 9.5 si trasformano in integrali e le coordinate del centro di massa risultano così definite:

$$x_{\text{cdm}} = \frac{1}{M} \int x \, dm, \quad y_{\text{cdm}} = \frac{1}{M} \int y \, dm, \quad z_{\text{cdm}} = \frac{1}{M} \int z \, dm. \quad (9.9)$$

ove M ora è la massa dell'oggetto. Gli integrali ci consentono di usare efficacemente l'equazione 9.5 per un'infinità di punti materiali, evitando così una fatica inaffrontabile. Calcolare questi integrali per oggetti comuni, come un televisore o un gatto, sarebbe alquanto complicato, e quindi noi considereremo soltanto oggetti *uniformi*. Con ciò vogliamo dire che l'oggetto ha massa volumica (densità) ρ uniforme per ogni elemento dell'oggetto e quindi uguale in tutto il corpo; si può così scrivere in base alla (1.8)

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V}, \quad (9.10)$$

ove dV è il volume occupato da un elemento di massa dm e V è l'intero volume del corpo. Sostituendo a dm , nelle tre equazioni 9.9, il suo valore dato dalla (9.10), troviamo

$$x_{\text{cdm}} = \frac{1}{V} \int x \, dV, \quad y_{\text{cdm}} = \frac{1}{V} \int y \, dV, \quad z_{\text{cdm}} = \frac{1}{V} \int z \, dV. \quad (9.11)$$

La scorciatoia della simmetria. Spesso un oggetto possiede un centro, un asse o un piano di simmetria. Il centro di massa dell'oggetto è allora situato in quel centro, su quella linea o in quel piano. Ad esempio, il centro di massa di una sfera omogenea si trova al centro della sfera (suo centro di simmetria). Il centro di massa di un cono omogeneo (il cui asse verticale è una linea di simmetria) giace sul suo asse. Il centro di massa di una banana (che possiede un piano di simmetria che la divide in due parti specularmente uguali) si trova in un punto di quel piano.

Il centro di massa di un corpo può anche non trovarsi all'interno del corpo stesso. Non c'è gomma nel centro di massa di uno pneumatico, né ferro nel centro di massa di un ferro di cavallo.

PROBLEMA SVOLTO 9.1 Cdm di tre particelle

Nella figura 9.3 vediamo tre particelle di massa $m_1 = 1,2 \text{ kg}$, $m_2 = 2,5 \text{ kg}$ ed $m_3 = 3,4 \text{ kg}$, collocate ai vertici di un triangolo equilatero di lato $a = 140 \text{ cm}$. Dove si trova il loro centro di massa?

$$y_{\text{cdm}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^3 m_i y_i = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{M} = \frac{(1,2 \text{ kg})(0) + (2,5 \text{ kg})(0) + (3,4 \text{ kg})(120 \text{ cm})}{7,1 \text{ kg}} = 58 \text{ cm}.$$

SOLUZIONE

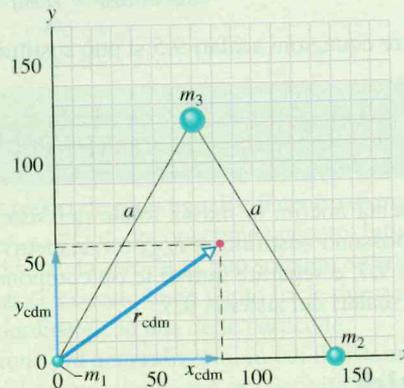
Un'idea chiave notare che si tratta di punti materiali anziché di un corpo esteso, e quindi per trovare il centro di massa possiamo ricorrere alle equazioni 9.5. Le particelle giacciono sul piano del triangolo perché ci bastano le prime due equazioni. Una seconda idea chiave è scegliere gli assi coordinati x e y in modo tale che una particella si trovi sull'origine e l'asse x coincida con uno dei lati. Le coordinate delle tre particelle avranno allora questi valori:

Particella	Massa (kg)	x (cm)	y (cm)
1	1,2	0	0
2	2,5	140	0
3	3,4	70	120

La massa totale del sistema è $M = 7,1 \text{ kg}$. Dalle (9.5) ricaviamo le coordinate x_{cdm} e y_{cdm} del centro di massa:

$$x_{\text{cdm}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^3 m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{M} = \frac{(1,2 \text{ kg})(0) + (2,5 \text{ kg})(140 \text{ cm}) + (3,4 \text{ kg})(70 \text{ cm})}{7,1 \text{ kg}} = 83 \text{ cm}.$$

Nella figura 9.3 il centro di massa è individuato dal vettore posizione \mathbf{r}_{cdm} . Se avessimo fatto un'altra scelta per il sistema di coordinate, queste coordinate sarebbero state differenti, ma la posizione del cdm rispetto alle particelle non sarebbe cambiata.



\mathbf{r}_{cdm} è il vettore posizione del centro di massa (rivolto dall'origine al cdm)

Figura 9.3 Problema svolto 9.1. Tre particelle sono disposte ai vertici di un triangolo equilatero di lato a . Il centro di massa è localizzato dal vettore posizione \mathbf{r}_{cdm} .

PROBLEMA SVOLTO 9.2 Cdm di un piatto senza un pezzo

Questo problema svolto è molto descrittivo, il che dovrebbe consentirci di calcolare un cdm per mezzo di semplici passaggi algebrici invece di affrontare integrali impegnativi. Nella figura 9.4a è rappresentata una piastra metallica P circolare di raggio $2R$ dalla quale è stato tagliato via un disco di raggio R . Il disco è riportato nella figura 9.4b. Localizzare il centro di massa della piastra P rispetto al sistema di riferimento xy rappresentato in figura.

SOLUZIONE

(1) Individuiamo dapprima approssimativamente la posizione del centro di massa di P facendo uso della simmetria. Osserviamo che la piastra è simmetrica rispetto all'asse x . Ruotando infatti la metà inferiore attorno all'asse si ottiene la metà superiore. Il suo centro di massa deve dunque trovarsi su quest'asse. La piastra però non è simmetrica rispetto all'asse y . E dato che esiste più massa a destra dell'asse che a sinistra, il centro di massa deve trovarsi in qualche punto a destra dell'asse y , per esempio nel punto approssimativamente indicato nella figura 9.4a.

(2) Dato che la piastra P è un corpo esteso, per trovare le coordinate del centro di massa potremmo usare le equazioni 9.11. La piastra è sottile e uniforme per cui cerchiamo le sole coordinate xy del centro di

massa. Se vogliamo considerare il suo leggero e uniforme spessore, potremmo affermare che il cdm si trova sul piano intermedio tra le due facce. Malgrado queste semplificazioni, l'uso delle (9.11) resterebbe comunque molto faticoso perché ci occorrerebbe una funzione che descrive la forma della piastra col suo foro e poi dovremmo operare un'integrazione in due dimensioni.

(3) C'è una strada molto più agevole. Nel trattare i centri di massa possiamo assumere che la massa di un corpo omogeneo, come questo, sia concentrata interamente nel suo centro di massa. Ciò permette di considerare i nostri oggetti come particelle ed evitare l'integrazione matematica bidimensionale.

Calcoli. Perciò possiamo considerare l'oggetto originario C , cioè la piastra prima della rimozione del disco S , come formata dalle due masse puntiformi equivalenti ai corpi P e S . La figura 9.4 mostra le posizioni dei centri di massa di questi tre oggetti, che riassumiamo, insieme agli altri dati, nella tabella riportata di seguito.

Ora ricorriamo all'idea chiave della massa concentrata. Assumiamo che la massa del disco S sia concentrata in una particella in posizione $x_S = -R$ e quella del disco P in una particella in posizione x_P (fig. 9.4c). Dall'equazione 9.2 ricaviamo la posizione del centro di massa

Disco	Centro di massa	Posizione cdm	Massa
P	cdm_P	$x_P = ?$	m_P
S	cdm_S	$x_S = -R$	m_S
C	cdm_C	$x_C = 0$	$m_C = m_S + m_P$

risolvendo rispetto a x_P , troviamo

$$x_P = -x_S \frac{m_S}{m_P} \quad (9.13)$$

Non conosciamo le masse da introdurre nell'equazione 9.13. Possiamo però scrivere le relazioni tra il volume dei corpi e la loro massa volumica. Se ρ è la massa volumica del metallo e σ lo spessore della piastra, abbiamo

$$m_S = \pi R^2 \rho \sigma \quad \text{e} \quad m_P = \pi (2R)^2 \rho \sigma - \pi R^2 \rho \sigma.$$

Con queste sostituzioni, e per $x_S = -R$, la (9.13) diventa

$$x_P = -\frac{(-R)(\pi R^2 \rho \sigma)}{\pi (2R)^2 \rho \sigma - \pi R^2 \rho \sigma} = \frac{1}{3} R.$$

x_{S+P} del sistema di due particelle:

$$x_{S+P} = \frac{m_S x_S + m_P x_P}{m_S + m_P}, \quad (9.12)$$

ove x_S e x_P sono, rispettivamente, le posizioni dei centri di massa di S e P e la combinazione di S e P costituisce il disco C. Ponendo $x_C = 0$ e

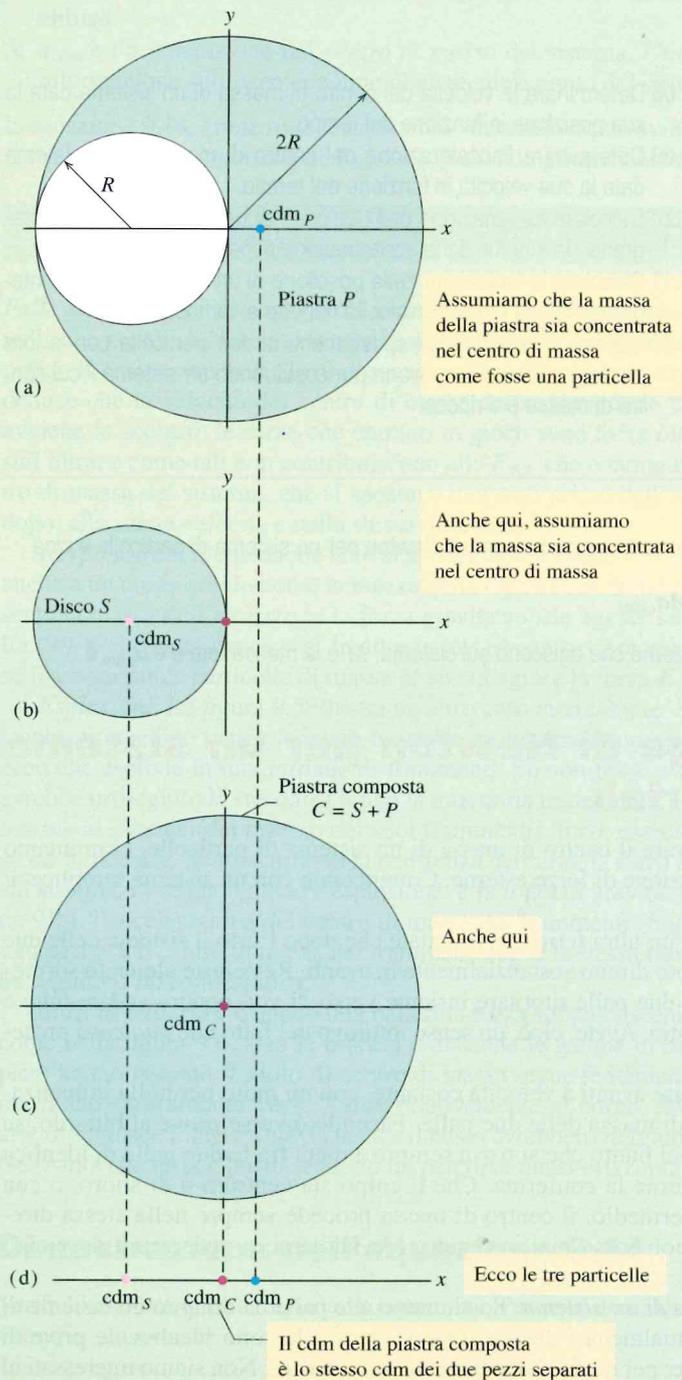
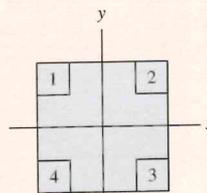


Figura 9.4 Problema svolto 9.2. (a) La piastra P è un disco metallico di raggio $2R$, con un foro circolare di raggio R ; il suo centro di massa si trova nel punto cdm_P . (b) L'oggetto S è un disco metallico di raggio R che riempie esattamente il foro nella piastra P; insieme formano l'oggetto C. Sono indicati i loro centri di massa. (d) I centri di massa dei tre oggetti.



✓ VERIFICA 1

La figura qui accanto presenta una piastra quadrata uniforme da cui verranno rimossi quattro quadratini agli angoli. (a) Dove si trova il centro di massa della piastra originale? Dove si trova una volta rimossi (b) il quadratino 1, (c) i quadratini 1 e 2, (d) i quadratini 1 e 3, (e) i quadratini 1, 2 e 3, (f) tutti e quattro i quadratini? Rispondere facendo riferimento ad assi, quadranti e punti, senza eseguire calcoli.



(a) origine; (b) quad. 3; (c) asse $y < 0$; (d) origine;
(e) quad. 4; (f) origine

2.2 SECONDA LEGGE DI NEWTON PER UN SISTEMA DI PARTICELLE

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovrete essere in grado di...

- 4 Applicare la seconda legge di Newton a un sistema di particelle mettendo in relazione la forza netta risultante (dalla somma delle forze agenti sulle particelle) con l'accelerazione del centro di massa del sistema.
- 5 Applicare le equazioni per accelerazione costante al moto delle singole particelle che costituiscono un sistema e al moto del suo centro di massa.
- 6 Calcolare la velocità del centro di massa di un sistema di cui siano dati massa e velocità per ciascuna particella.
- 7 Calcolare l'accelerazione del centro di massa di un sistema di cui siano dati massa e accelerazione per ciascuna particella.
- 9.08 Determinare la velocità del centro di massa di un sistema data la sua posizione in funzione del tempo.
- 9.09 Determinare l'accelerazione del centro di massa di un sistema data la sua velocità in funzione del tempo.
- 9.10 Calcolare la variazione della velocità di un centro di massa integrando la sua funzione accelerazione rispetto al tempo.
- 9.11 Calcolare la variazione della posizione di un centro di massa integrando la sua funzione velocità rispetto al tempo.
- 9.12 Mettere in relazione gli spostamenti di due particelle con le loro velocità quando si muovono pur costituendo un sistema il cui centro di massa è a riposo.

Parole chiave

Il moto del centro di massa di qualunque sistema di particelle è regolato dalla seconda legge di Newton per un sistema di particelle e cioè

$$F_{\text{net}} = M a_{\text{cdm}}$$

Qui F_{net} rappresenta la forza risultante dalla somma di tutte le forze esterne che agiscono sul sistema, M è la massa totale e a_{cdm} è l'accelerazione del centro di massa del sistema.

Seconda legge di Newton per un sistema di punti materiali

Ora che sappiamo come trovare il centro di massa di un sistema di particelle, esaminiamo come esso si muove sotto l'azione di forze esterne. Cominciamo con un sistema semplice di due palle da biliardo.

Se tirate una palla contro un'altra ferma, vi aspettate che dopo l'urto il sistema delle due palle continui ad avere un moto diretto sostanzialmente in avanti. Restereste alquanto sorpresi al vedere, per esempio, le due palle ritornare insieme verso di voi, oppure andare tutte e due verso destra o verso sinistra. Avete, cioè, un senso intuitivo del fatto che *qualcosa* prosegue nel suo moto diritto.

Ciò che continua ad andare avanti a velocità costante, con un moto per nulla influenzato dallo scontro, è il centro di massa delle due palle. Facendo diverse prove al biliardo, se tenete lo sguardo fisso su quel punto che si trova sempre a metà fra le due palle di identica massa, potete facilmente averne la conferma. Che il colpo sia centrato o di sfioro, o con qualunque disassamento intermedio, il centro di massa procede sempre nella stessa direzione, come se lo scontro non fosse mai avvenuto. Ma andiamo a vedere più da vicino come ciò avvenga.

Moto del centro di massa di un sistema. Sostituiamo alle palle da biliardo un insieme di n particelle, di masse (eventualmente) diverse. Queste particelle sono idealmente prive di volume e quindi di estensione; per questo sono dette *punti materiali*. Non siamo interessati al moto di ogni singola particella, ma *soltanto* del loro centro di massa. Benché questo non sia

altro che un punto, si muove come una particella avente massa uguale alla massa totale del sistema di particelle: possiamo assegnargli una posizione, una velocità e un'accelerazione. Affermiamo (e lo proveremo qui sotto) che l'equazione (vettoriale) che governa il moto del centro di massa di un simile sistema di particelle è

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = M\mathbf{a}_{\text{cdm}}. \quad (9.14)$$

L'equazione 9.14 esprime la seconda legge di Newton che governa il moto del centro di massa di un sistema di punti materiali. È notevole il fatto che essa conservi la stessa forma ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$) valida per il moto di un punto materiale isolato. Nell'uso dell'equazione 9.14 le tre quantità che compaiono devono essere valutate con particolare cura:

1. \mathbf{F}_{net} è la *somma vettoriale di tutte* le forze *esterne* che agiscono sul sistema. Le forze interagenti fra parti del sistema sono chiamate *forze interne*, e bisogna stare molto attenti a non includerle nel calcolo dell'equazione 9.14.
2. M è la *massa totale* del sistema. Si suppone che nessuna massa entri o lasci il sistema durante il moto, in modo che M rimanga costante. Il sistema si definisce in questo caso **chiuso**.
3. \mathbf{a}_{cdm} è l'accelerazione del *centro di massa* del sistema. L'equazione 9.14 non dà alcuna informazione sull'accelerazione di alcun altro punto del sistema.

L'equazione 9.14, come tutte le equazioni vettoriali, si può sviluppare in tre equazioni scalari contenenti le componenti di \mathbf{F}_{net} e \mathbf{a}_{cdm} secondo gli assi coordinati. Esse sono:

$$F_{\text{net},x} = Ma_{\text{cdm},x} \quad F_{\text{net},y} = Ma_{\text{cdm},y} \quad F_{\text{net},z} = Ma_{\text{cdm},z}. \quad (9.15)$$

Palle da biliardo. Passiamo ora a esaminare il comportamento delle palle da biliardo. Una volta che la palla ha lasciato la stecca, nessun'altra forza esterna agisce sul sistema (delle due palle). E così, essendo $\mathbf{F}_{\text{net}} = 0$, l'equazione 9.14 ci assicura che anche $\mathbf{a}_{\text{cdm}} = 0$. E quindi si deduce che la velocità del centro di massa del sistema delle due palle è costante. Quando avviene lo scontro, le forze che entrano in gioco sono *forze interne*, esercitate da una palla sull'altra, e come tali non contribuiscono alla \mathbf{F}_{net} , che continua a restare nulla. E così il centro di massa del sistema, che si spostava in avanti prima dell'urto, continuerà a farlo anche dopo, alla stessa velocità e nella stessa direzione.

Corpo solido. L'equazione 9.14 si applica non soltanto a un sistema di punti materiali, ma anche a un corpo solido come la mazza della figura 9.1b. In tal caso la M della (9.14) rappresenta la massa dell'attrezzo, e la forza gravitazionale agente sulla mazza costituisce la \mathbf{F}_{net} . La (9.14) ci dice che $\mathbf{a}_{\text{cdm}} = \mathbf{g}$. In altre parole, il centro di massa della mazza si muove come se fosse un'unica particella di massa M su cui agisce la forza \mathbf{F}_g .

Esplosioni. La figura 9.5 illustra un altro caso interessante. Supponiamo che in uno spettacolo pirotecnico venga lanciato un razzo su una traiettoria parabolica. A un certo punto, ecco che esplose in una miriade di frammenti. Se non fosse avvenuta l'esplosione, il razzo avrebbe proseguito la sua corsa lungo la traiettoria tratteggiata. Le forze dell'esplosione sono *interne* al sistema (del razzo o dei suoi frammenti): forze esercitate da una parte del sistema su un'altra parte. Se trascuriamo la resistenza dell'aria, la forza *esterna* totale \mathbf{F}_{net} che agisce sul sistema, avvenga o meno l'esplosione, è la forza di gravità. Pertanto, secondo l'equazione 9.14, l'accelerazione del centro di massa dei frammenti (fino a che sono in volo) rimane uguale a \mathbf{g} , e il centro di massa dei frammenti segue la stessa traiettoria parabolica che avrebbe seguito il razzo inesploso.

Balzi di ballerini. Quando una ballerina balza sul palcoscenico eseguendo un *grand jeté*, come nella figura 9.6, alza le braccia e distende le gambe in orizzontale non appena i suoi piedi hanno lasciato il suolo. Il centro di massa segue fedelmente una traiettoria parabolica, ma il suo spostamento verso l'alto, relativamente al corpo, dovuto all'innalzamento degli arti, diminuisce l'altezza che la testa e il busto avrebbero raggiunto in un salto a corpo rigido. Ne risulta che testa e busto seguono un percorso quasi orizzontale.

Dimostrazione dell'equazione 9.14

Verifichiamo ora questa importante equazione. Per un sistema di n particelle, dalla (9.8) ricaviamo

$$M\mathbf{r}_{\text{cdm}} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3 + \dots + m_n\mathbf{r}_n. \quad (9.16)$$

Le forze interne dovute all'esplosione non mutano il percorso del cdm

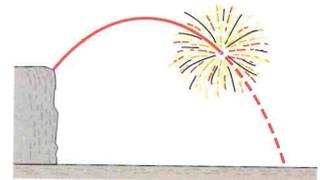


Figura 9.5 Un fuoco artificiale esplose in volo. In assenza di resistenza dell'aria, il centro di massa dei frammenti continuerebbe a seguire la traiettoria parabolica originaria fino all'arrivo a terra dei frammenti.

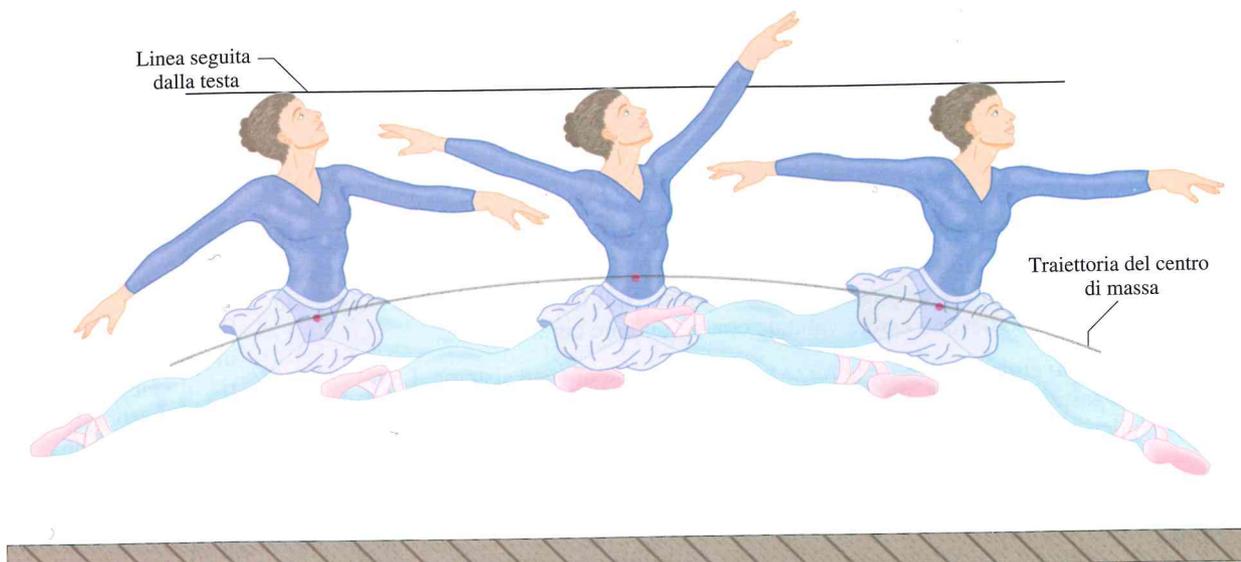


Figura 9.6 Il grand jeté. (Adattato da Laws K., *The Physics of Dance*, Schirmer Books 1984.)

in cui M è la massa totale del sistema e \mathbf{r}_{cdm} è il vettore che localizza la posizione del centro di massa.

Derivando la (9.16) rispetto al tempo si ottiene

$$M\mathbf{v}_{\text{cdm}} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + m_3\mathbf{v}_3 + \dots + m_n\mathbf{v}_n. \quad (9.17)$$

Qui $\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i/dt$ è la velocità della i -esima particella, e così via fino a \mathbf{v}_n , mentre $\mathbf{v}_{\text{cdm}} = d\mathbf{r}_{\text{cdm}}/dt$ è la velocità del centro di massa del sistema.

Derivando ancora rispetto al tempo la (9.17) si giunge a

$$M\mathbf{a}_{\text{cdm}} = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + m_3\mathbf{a}_3 + \dots + m_n\mathbf{a}_n. \quad (9.18)$$

Qui $\mathbf{a}_i = d\mathbf{v}_i/dt$ è l'accelerazione della i -esima particella, e così via fino ad \mathbf{a}_n , mentre $\mathbf{a}_{\text{cdm}} = d\mathbf{v}_{\text{cdm}}/dt$ è l'accelerazione del centro di massa del sistema. Vediamo dunque che il centro di massa, pur essendo soltanto un punto geometrico, possiede una posizione, una velocità e un'accelerazione, proprio come una particella.

Per la seconda legge di Newton, $m_i\mathbf{a}_i$ è la risultante \mathbf{F}_i delle forze agenti sulla i -esima particella, e così via fino a \mathbf{F}_n . Possiamo allora riscrivere così la (9.18):

$$M\mathbf{a}_{\text{cdm}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots + \mathbf{F}_n. \quad (9.19)$$

Fra le forze che contribuiscono a formare il secondo membro della (9.19) vi saranno forze che le particelle del sistema esercitano l'una contro l'altra (forze interne), e forze esercitate sulle particelle dall'esterno del sistema (forze esterne). Ma per la terza legge di Newton le forze interne si annullano in coppie di azione e reazione, e scompaiono nella sommatoria del secondo membro della (9.19). Ciò che resta è la somma vettoriale di tutte le forze esterne agenti sul sistema. L'equazione 9.19 si riduce dunque alla (9.14): ciò che volevamo dimostrare.

✓ VERIFICA 2

Due pattinatori su una lastra di ghiaccio priva di attrito tengono strette le opposte estremità di un'asta di massa trascurabile. Lungo l'asta corre un asse, la cui origine coincide col centro di massa del sistema dei due pattinatori. Il pattinatore, Federico, pesa il doppio della pattinatrice, Ernesta. Dove si incontrano i pattinatori se (a) Federico tira, avanzando una mano dopo l'altra lungo l'asta, in modo da avvicinarsi a Ernesta, (b) Ernesta tira, avanzando una mano dopo l'altra lungo l'asta, in modo da avvicinarsi a Federico, (c) entrambi i pattinatori tirano allo stesso modo?

PROBLEMA SVOLTO 9.3

Moto del centro di massa di tre particelle

La figura 9.7a mostra un sistema di tre particelle, ciascuna soggetta a una differente forza *esterna*, tutte inizialmente a riposo. Le direzioni sono evidenziate in figura e i moduli valgono: $F_1 = 6,0 \text{ N}$; $F_2 = 12 \text{ N}$; $F_3 = 14 \text{ N}$. Qual è l'accelerazione del centro di massa del sistema, e in che direzione si muove?

SOLUZIONE

La posizione del centro di massa nella figura è rappresentata da un punto. Possiamo trattare questo punto come se fosse una particella reale, assegnandogli una massa M uguale alla massa totale del sistema (16 kg) e supponendo che tutte le forze esterne siano applicate ad esso (fig. 9.7b).

Una seconda *idea chiave* è applicare la seconda legge di Newton al centro di massa scrivendo

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = M\mathbf{a}_{\text{cdm}}, \quad (9.20)$$

ossia

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = M\mathbf{a}_{\text{cdm}},$$

e quindi

$$\mathbf{a}_{\text{cdm}} = \frac{\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3}{M}. \quad (9.21)$$

L'equazione 9.20 attribuisce all'accelerazione del centro di massa la stessa direzione della forza risultante esterna \mathbf{F}_{net} agente sul sistema (fig. 9.7b). Dato che le particelle sono inizialmente a riposo, deve esserlo anche il centro di massa. Quando questo comincia a muoversi, deve farlo nella stessa direzione dell'accelerazione e della forza.

Possiamo riscrivere, in mancanza di una calcolatrice vettoriale, l'equazione 9.21 scomponendola nelle sue componenti. Lungo l'asse x abbiamo

$$\begin{aligned} a_{\text{cdm},x} &= \frac{F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}}{M} = \\ &= \frac{-6,0 \text{ N} + (12 \text{ N}) \cos 45^\circ + 14 \text{ N}}{16 \text{ kg}} = 1,03 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

E lungo l'asse :

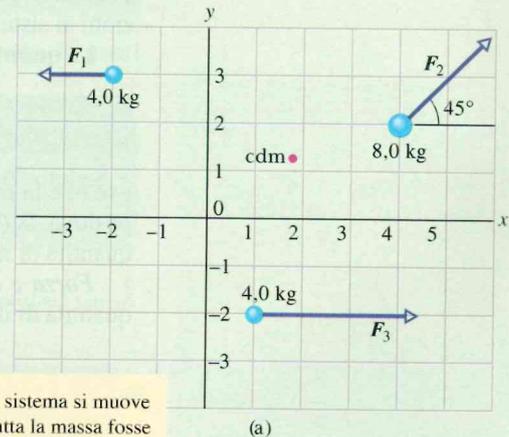
$$\begin{aligned} a_{\text{cdm},y} &= \frac{F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}}{M} = \\ &= \frac{0 + (12 \text{ N}) \sin 45^\circ + 0}{16 \text{ kg}} = 0,530 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

Possiamo quindi trovare il modulo dell'accelerazione del centro di massa:

$$a_{\text{cdm}} = \sqrt{(a_{\text{cdm},x})^2 + (a_{\text{cdm},y})^2} = 1,16 \text{ m/s}^2 \approx 1,2 \text{ m/s}^2,$$

e l'angolo valutato a partire dal semiasse positivo delle x :

$$\theta = \arctan \frac{a_{\text{cdm},y}}{a_{\text{cdm},x}} = 27^\circ.$$



Il cdm del sistema si muove come se tutta la massa fosse lì concentrata e lì agisse la forza netta

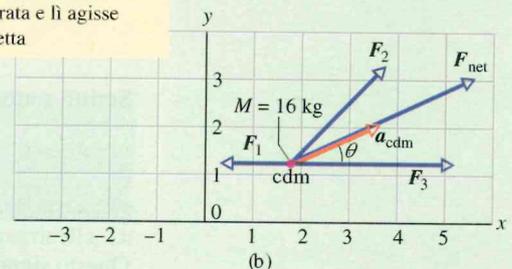


Figura 9.7 Problema svolto 9.3. (a) Tre particelle, nelle posizioni a riposo indicate, sono sollecitate dalle forze esterne riportate in figura. È disegnato anche il centro di massa. (b) Le forze sono ora applicate al centro di massa del sistema, che si comporta come una particella di massa M uguale alla massa totale del sistema. Sono indicate pure la forza netta e l'accelerazione del centro di massa.

9.3 QUANTITÀ DI MOTO

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di...

- 9.13 Rendervi conto che la quantità di moto è una grandezza vettoriale e quindi è dotata di modulo e orientamento oltre a potersi scomporre in componenti.
- 9.14 Calcolare la quantità di moto di una particella moltiplicando la sua massa per la sua velocità vettoriale.
- 9.15 Calcolare la variazione di quantità di moto (modulo e orientamento) quando la particella muta la propria velocità o direzione.

- 9.16 Applicare la relazione tra la quantità di moto di un particella e la forza netta che agisce su di essa.
- 9.17 Calcolare la quantità di moto di un sistema di particelle moltiplicando la loro massa totale per la velocità del centro di massa.
- 9.18 Applicare la relazione tra la quantità di moto del centro di massa di un sistema e la forza netta che agisce su di esso.

ee chiave

Per una particella si definisce una quantità p **quantità di moto** o **momento lineare** come

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v},$$

che è una grandezza vettoriale avente lo stesso orientamento del vettore velocità della particella. La seconda legge del moto di Newton può scriversi in termini di quantità di moto:

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

- Per un sistema di particelle le relazioni diventano

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{\text{cdm}}$$

e

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}.$$

Quantità di moto

In questo paragrafo limitiamo la trattazione al caso di un solo corpo puntiforme anziché a un sistema di corpi, allo scopo di ben definire due importanti grandezze. Estenderemo le definizioni ai sistemi multicorpo nel paragrafo successivo.

La **quantità di moto** di una particella è un vettore \mathbf{p} definito come

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (\text{quantità di moto di una particella}), \quad (9.22)$$

ove m è la massa della particella e \mathbf{v} la sua velocità. Essendo m una quantità scalare sempre positiva, la (9.22) indica che i vettori \mathbf{p} e \mathbf{v} hanno la stessa direzione e lo stesso verso e che la quantità di moto ha per unità di misura il $\text{kg} \cdot (\text{m/s})$.

Forza e quantità di moto. In realtà Newton espresse la sua seconda legge in termini di quantità di moto, o meglio di *momento*:

► La rapidità di variazione del momento di una particella è proporzionale alla forza netta che agisce sulla particella e ha la stessa direzione di quella forza.

Scritto sotto forma di equazione, ciò diventa

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (9.23)$$

Questo significa che, quando una forza esterna risultante \mathbf{F}_{net} agisce su una particella, ne modifica la quantità di moto \mathbf{p} e che, di converso, la quantità di moto può variare solo in presenza di una forza esterna netta non nulla. In caso contrario \mathbf{p} rimane costante. Vedremo nel paragrafo 9.5 che questa conclusione è un potente strumento per la risoluzione di problemi.

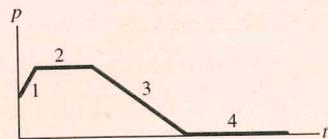
Sostituendo nella (9.23) l'espressione di \mathbf{p} dalla (9.22), si ha

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}.$$

Risulta dunque che le espressioni $\mathbf{F}_{\text{net}} = (d\mathbf{p}/dt)$ e $\mathbf{F}_{\text{net}} = m\mathbf{a}$ sono enunciazioni perfettamente equivalenti della seconda legge del moto di Newton per un punto materiale.

✓ VERIFICA 3

Nella figura è riportato l'andamento della quantità di moto in funzione del tempo per una particella che si muove lungo l'asse x . Su di essa agisce una forza diretta secondo lo stesso asse. (a) Ordinate le regioni indicate secondo i valori decrescenti del modulo della forza. (b) In quali regioni la particella rallenta?



Quantità di moto di un sistema di punti materiali

Prendiamo ora in esame un sistema di n punti materiali, ciascuno con una propria massa, velocità e quantità di moto. I punti materiali possono interagire fra loro e possono anche essere soggetti all'azione di forze esterne al sistema. Quest'ultimo possiede una quantità di moto complessiva \mathbf{P} , definita come la somma vettoriale delle quantità di moto dei singoli punti materiali:

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \dots + \mathbf{p}_n = \\ &= m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + m_3 \mathbf{v}_3 + \dots + m_n \mathbf{v}_n.\end{aligned}\quad (9.24)$$

Se confrontiamo questa equazione con la (9.17), troviamo

$$\mathbf{P} = M \mathbf{v}_{\text{cdm}} \quad (\text{quantità di moto di un sistema di particelle}), \quad (9.25)$$

che consente di dare una precisa definizione della quantità di moto per un sistema di punti materiali:

La quantità di moto di un sistema di particelle è uguale al prodotto della massa totale M del sistema per la velocità del centro di massa del sistema.

Forza e quantità di moto. Derivando la (9.25) rispetto al tempo troviamo (si considera variabile solo la velocità, non la massa)

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M \frac{d\mathbf{v}_{\text{cdm}}}{dt} = M \mathbf{a}_{\text{cdm}}. \quad (9.26)$$

Il confronto fra le equazioni 9.14 e 9.26 ci porta a esprimere la seconda legge di Newton per un sistema di punti materiali nella forma (equivalente)

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad (\text{sistema di particelle}), \quad (9.27)$$

in cui \mathbf{F}_{net} è la forza risultante esterna che agisce sul sistema. Questa equazione è l'espressione più generale, estesa a un sistema di punti materiali, della (9.23) relativa a una sola particella. Di nuovo, questa conclusione ci offre uno strumento potente nella soluzione dei problemi.

9.4 URTO E IMPULSO

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di...

- 9.19 Sapere che l'impulso è una grandezza vettoriale e quindi è dotata di modulo e orientamento, oltre a potersi scomporre in componenti.
- 9.20 Applicare la relazione tra impulso e variazione di quantità di moto.
- 9.21 Applicare la relazione tra impulso, forza media e intervallo di tempo entro il quale si manifesta l'impulso.
- 9.22 Applicare le equazioni per accelerazione costante al fine di correlare l'impulso alla forza media.
- 9.23 Calcolare, data la forza in funzione del tempo, l'impulso (e quindi la variazione di quantità di moto) integrando la funzione.
- 9.24 Calcolare, dato un grafico che descrive la forza in funzione del tempo, l'impulso (e quindi la variazione di quantità di moto) per integrazione grafica.
- 9.25 Calcolare, per una sequenza continua di urti di proiettile, la forza media esercitata sul bersaglio mettendola in relazione con la frequenza degli urti e con la variazione di velocità subita da ciascun proiettile.

Idee chiave

- Applicando la seconda legge di Newton per la quantità di moto a un corpo puntiforme coinvolto in un urto si arriva a definire il teorema dell'impulso:

$$\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \Delta \mathbf{p} = \mathbf{J},$$

ove $\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \Delta \mathbf{p}$ è la variazione di quantità di moto subita dal corpo e \mathbf{J} è l'impulso dovuto alla forza $\mathbf{F}(t)$ esercitata sul corpo da un altro corpo in collisione da un tempo t_i a un tempo t_f :

$$\mathbf{J} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}(t) dt.$$

Se \bar{F} è l'intensità media della forza F durante l'urto e Δt è la durata della collisione, per un moto unidimensionale si ha

$$J = \bar{F} \Delta t.$$

Quando una sequenza continua di corpi di massa m e velocità v colpisce a ripetizione un altro corpo bersaglio fisso, la forza media che si esercita su quest'ultimo è

$$\bar{F} = -\frac{n}{\Delta t} \Delta p = -\frac{n}{\Delta t} m \Delta v,$$

in cui $n/\Delta t$ è la frequenza con cui i proiettili colpiscono il corpo fisso e Δv è la variazione di velocità di ciascun proiettile. La forza media si può anche scrivere come

$$\bar{F} = -\frac{\Delta m}{\Delta t} \Delta v,$$

ove $\Delta m/\Delta t$ è la massa complessiva per unità di tempo che colpisce il bersaglio fisso. La variazione di velocità è $\Delta v = -v$ se i proiettili rimangono conficcati nel bersaglio, mentre è $\Delta v = -2v$ nel caso che rimbazzino con modulo della velocità invariato.

Urto e impulso

La quantità di moto p di qualsiasi corpo puntiforme non può variare se non interviene una forza esterna a farlo. Per esempio, possiamo spingere una palla per cambiarne la quantità di moto o, più violentemente, possiamo colpirla con una mazza, cosa che chiamiamo comunemente *urto*. In una tale *collisione* la forza esterna agisce per breve tempo, è molto intensa e la quantità di moto del corpo colpito varia repentinamente. Gli urti sono comuni nella vita di tutti i giorni e sappiamo quanto siano costosi quelli tra veicoli. Torneremo anche alle collisioni tra automobili, ma per il momento rivolgiamo la nostra attenzione al più semplice urto di una particella in movimento (*proiettile*) contro un altro corpo (*bersaglio*).

Urto singolo

Immaginiamo che il proiettile sia una palla e che il bersaglio sia una mazza. L'urto è di breve durata e la palla risente di una forza in grado di frenarla, arrestarla e anche di invertire il suo moto. La figura 9.8 illustra un istante dell'urto. Sulla palla agisce una forza $F(t)$ variabile nel tempo che modifica la sua quantità di moto p . Tale variazione è legata alla forza dalla seconda legge di Newton scritta nella forma della (9.27). Risistemando tale espressione si vede che, nell'intervallo di tempo dt , la variazione di quantità di moto della palla è

$$dp = F(t) dt. \quad (9.28)$$

La variazione totale di quantità di moto a seguito dell'urto si può trovare integrando la (9.28) da un istante t_i immediatamente prima dell'urto a un istante t_f immediatamente dopo:

$$\int_{t_i}^{t_f} dp = \int_{t_i}^{t_f} F(t) dt. \quad (9.29)$$

L'integrale a sinistra vale $p_f - p_i$, variazione della quantità di moto del corpo. Quello di destra, che dipende dall'intensità e dalla durata di azione della forza d'urto, è detto **impulso** J dell'urto, ed è così definito:

$$J = \int_{t_i}^{t_f} F(t) dt \quad (\text{definizione di impulso}). \quad (9.30)$$

Possiamo dire dunque che la variazione di quantità di moto del corpo è uguale all'impulso che agisce su di esso:

$$\Delta p = J \quad (\text{teorema dell'impulso}). \quad (9.31)$$

Si può anche scrivere dunque

$$p_f - p_i = J \quad (9.32)$$



L'urto tra una palla e una mazza deforma una parte della palla.

oppure esplicitare le componenti, come, per la componente x ,

$$\Delta p_x = J_x \tag{9.33}$$

e

$$p_{f,x} - p_{i,x} = \int_{t_i}^{t_f} F_x dt \tag{9.34}$$

Integrale della forza. Se abbiamo a disposizione la funzione $F(t)$, in generale possiamo valutare J , e quindi la variazione di quantità di moto, integrando la funzione. La stessa cosa possiamo fare se è disponibile un diagramma F in funzione di t , mediante calcolo dell'area sottesa, come in figura 9.9a. Il più delle volte tuttavia non sappiamo come varia la forza, ma conosciamo l'intensità media della forza, \bar{F} , e la durata della collisione $\Delta t = t_f - t_i$. Pertanto l'intensità dell'impulso si può esprimere così:

$$J = \bar{F} \Delta t \tag{9.35}$$

e l'intensità media della forza è riportata nel grafico di figura 9.9b. L'area sottesa dalla curva è uguale all'area sottesa dalla curva di andamento reale della forza $F(t)$ riportata nella figura 9.9a perché entrambe le aree equivalgono al medesimo impulso di modulo J .

Anziché focalizzare l'analisi sulla palla, avremmo potuto fare la stessa cosa per la mazza di figura 9.8. Dalla terza legge di Newton sappiamo però che la forza applicata alla mazza ha la stessa intensità e verso opposto di quella agente sulla palla.

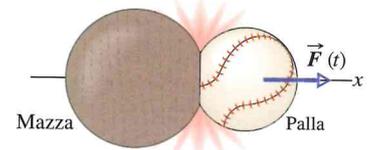


Figura 9.8 Nella collisione tra mazza e palla, su quest'ultima agisce una forza $F(t)$.

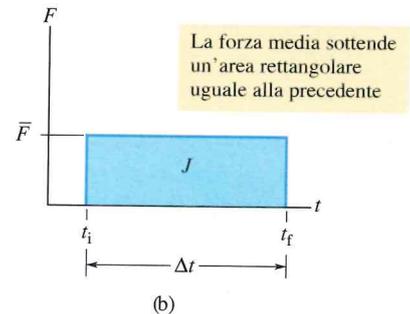
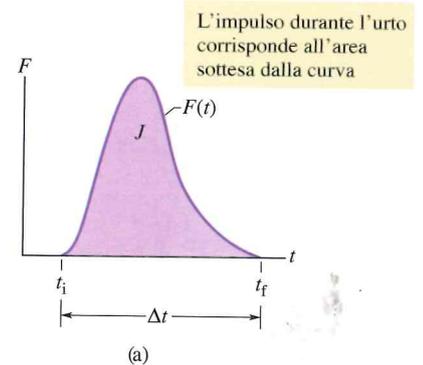


Figura 9.9 (a) La curva rappresenta l'intensità della forza variabile nel tempo $F(t)$ che agisce sulla palla della figura 9.8. L'area sotto la curva rappresenta il modulo dell'impulso J sulla palla. (b) L'altezza del rettangolo equivale al modulo della forza media \bar{F} che agisce durante l'intervallo Δt . L'area sotto la curva $F(t)$ e l'area del rettangolo sono equivalenti, e rappresentano l'intensità dell'impulso J nel corso della collisione.

✓ VERIFICA 4

Un paracadutista, per la mancata apertura del paracadute, atterra nella neve fresca, rimanendo ferito in modo non grave. Se fosse caduto sulla nuda terra il tempo di arresto sarebbe stato 10 volte più corto e l'urto letale. La presenza di neve aumenta, diminuisce o non cambia i valori di (a) variazione di quantità di moto del paracadutista, (b) impulso d'arresto del paracadutista, (c) forza che arresta il paracadutista?

a) non cambia, (b) non cambia; (c) diminuisce

Serie di urti

Consideriamo la forza esercitata su un corpo quando questo subisce una serie di ripetute e identiche collisioni. Potremmo per esempio adattare una di quelle macchinette che sparano per allenamento le palle da tennis, in modo da costringerla a lanciare le palline contro un muro a ritmo elevato. Ciascun urto di una pallina genera una forza applicata al muro, ma non è questa la forza di cui vogliamo occuparci. Siamo ora interessati piuttosto a valutare la forza media \bar{F} esercitata sul muro dal bombardamento di palline, cioè la forza media prodotta da un gran numero di collisioni successive.

Nella figura 9.10 è rappresentata una fila di corpi, dotati di identiche masse m , che urtano a intervalli regolari, muovendosi lungo l'asse x , un corpo bersaglio, che è in posizione fissa. Sia n il numero di corpi che vengono a urtare il bersaglio nell'intervallo Δt . Il moto si svolge lungo l'asse x e quindi possiamo limitarci alle componenti delle quantità di moto lungo quest'asse. Ciascun proiettile ha quantità di moto iniziale mv e subisce una variazione ΔP nella sua quantità di moto in seguito all'urto. Durante l'intervallo Δt la variazione complessiva di quantità di moto dovuta agli n proiettili sarà $n\Delta P$. L'impulso complessivo J che ne risulta nel medesimo intervallo di tempo, diretto anch'esso lungo l'asse x , deve avere lo stesso modulo di $n\Delta P$ ma verso opposto. Possiamo scrivere questa relazione come

$$J = -n\Delta p \tag{9.36}$$

in cui il segno meno indica che J e Δp hanno versi opposti.

Forza media. Combinando la (9.36) con la (9.35) si ricava il modulo della forza media \bar{F} che agisce sul corpo bersaglio durante la collisione:

$$\bar{F} = \frac{J}{\Delta t} = -\frac{n}{\Delta t} \Delta p = -\frac{n}{\Delta t} m\Delta v \tag{9.37}$$

Il rapporto $n/\Delta t$ è la frequenza degli urti dei corpi della fila contro il bersaglio fisso e Δv è la variazione di velocità di ciascun proiettile.

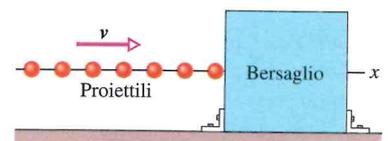


Figura 9.10 Un flusso uniforme di particelle aventi identiche quantità di moto va a urtare un corpo bersaglio fisso. La forza media \bar{F} sul bersaglio è orientata verso destra e ha un'intensità che dipende dalla frequenza con cui avvengono gli urti o, equivalentemente, dal ritmo con cui le masse si scontrano.

Variazione di velocità. Se i corpi della serie si fermano nell'impatto, nell'equazione 9.37 avremo

$$\Delta v = v_f - v_i = 0 - v = -v, \quad (9.38)$$

ove $v_i (= v)$ e $v_f (= 0)$, rispettivamente, sono le velocità prima e dopo l'urto. Se invece i corpi, all'atto dell'urto, rimbalzano indietro dal bersaglio senza variazione di velocità scalare, ecco che $v_f = -v$, e sostituendo si ricava

$$\Delta v = v_f - v_i = -v - v = -2v. \quad (9.39)$$

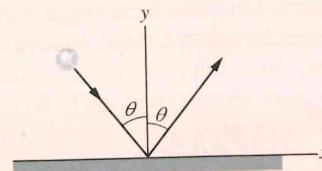
Nell'intervallo di tempo Δt una massa complessiva $\Delta m = nm$ entra in collisione col corpo bersaglio, e possiamo riscrivere la (9.37) come

$$\bar{F} = - \frac{\Delta m}{\Delta t} \Delta v \quad (9.40)$$

ove $\Delta m / \Delta t$ è la massa per unità di tempo che urta il blocco bersaglio. Anche qui per il valore di Δv potremo usare, a seconda dei casi, l'equazione 9.38 o la 9.39.

✓ VERIFICA 5

La figura a fianco presenta una palla vista dall'alto che rimbalza contro un muro senza variazione di velocità scalare. Si consideri la variazione Δp della sua quantità di moto. (a) Δp_x è positivo, negativo o nullo? (b) Δp_y è positivo, negativo o nullo? (c) Qual è la direzione di Δp ?



(a) nullo; (b) positivo; (c) verso pos. di y.

PROBLEMA SVOLTO 9.4

Impulso bidimensionale, auto da corsa contro il muro

Urto di un'auto da corsa contro il muro. Nella figura 9.11a è schematizzata, vista dall'alto, un'auto da corsa che va a sbattere, con angolo di 30° e velocità di 70 m/s, contro la spalletta laterale indeformabile della pista. Subito dopo l'urto l'auto si dirige verso la pista con angolo di 10° alla velocità di 50 m/s. Consideriamo la massa del pilota a bordo, che è $m = 80$ kg.

(a) Quanto vale l'impulso J che subisce il pilota durante la collisione?

SOLUZIONE

Possiamo trattare il pilota come un corpo puntiforme e applicare i principi fisici di questo capitolo. Non possiamo però ricavare J direttamente dall'equazione 9.30 perché non sappiamo nulla della forza $F(t)$ agente su di lui. Non ne abbiamo infatti né la funzione analitica né l'andamento grafico, e quindi non possiamo ottenere J per integrazione.

Calcoli. Possiamo però – ecco l'*idea chiave* – calcolare J a partire dalla variazione della quantità di moto p servendoci della (9.32). La figura 9.11b rappresenta le quantità di moto iniziale e finale. Dall'equazione 9.32, introducendovi la (9.22), abbiamo

$$J = p_f - p_i = mv_f - mv_i = m(v_f - v_i). \quad (9.41)$$

Potremmo eseguire direttamente il calcolo con una calcolatrice con funzioni vettoriali, ma qui seguiamo il procedimento che fa uso delle componenti.

Componente x. La (9.41) per l'asse x vale

$$\begin{aligned} J_x &= m(v_{f,x} - v_{i,x}) = \\ &= (80 \text{ kg})[(50 \text{ m/s})\cos(-10^\circ) - (70 \text{ m/s})\cos 30^\circ] = \\ &= -910 \text{ kg} \cdot \text{m/s}. \end{aligned}$$

Componente y. Per l'asse y si ha

$$\begin{aligned} J_y &= m(v_{f,y} - v_{i,y}) = \\ &= (80 \text{ kg})[(50 \text{ m/s})\sin(-10^\circ) - (70 \text{ m/s})\sin 30^\circ] = \\ &= -3495 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \approx -3500 \text{ kg} \cdot \text{m/s}. \end{aligned}$$

Impulso. L'impulso è quindi

$$J = (-919\mathbf{i} - 3500\mathbf{j}) \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

e il suo modulo vale

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = 3616 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \approx 3600 \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

La direzione di J è data dall'angolo

$$\theta = \arctan \frac{J_y}{J_x},$$

che, dal risultato della calcolatrice, parrebbe essere $75,4^\circ$. Sappiamo però che anche l'angolo $75,4^\circ + 180^\circ$ ha la medesima tangente. Per scegliere il risultato fisicamente corretto tracciamo le componenti di J come in figura 9.11c, cosa che ci consente di verificare come la seconda possibilità sia quella cercata. La possiamo esprimere come

$$\theta = -105^\circ,$$

(b) La durata dell'impulso Δt per l'intero processo d'urto è 14 ms. Qual è l'intensità della forza media che agisce sul pilota?

SOLUZIONE

Applichiamo l'equazione 9.35 per ricavare la forza media, come rapporto tra il modulo dell'impulso J e la durata dell'urto Δt .

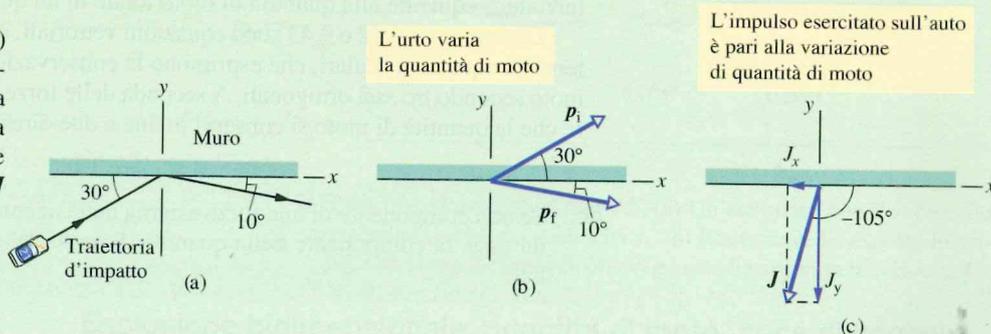
Calcoli. Si ha

$$\bar{F} = \frac{J}{\Delta T} = \frac{3616 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{0,014 \text{ s}} = 2,583 \cdot 10^5 \text{ N} \approx 2,6 \cdot 10^5 \text{ N}.$$

Conoscendo la massa m del pilota potete calcolare che egli è sottoposto durante l'urto a un'accelerazione media di $3,2 \cdot 10^3 \text{ m/s}^2 = 330g$. Quasi impossibile sopravvivere.

Sopravvivenza. Nel progettare le spallette laterali di contenimento delle piste gli ingegneri meccanici si sforzano, per allontanare i rischi di urti mortali, di renderle il più «cedevoli» possibile, il che allunga di molto la durata dell'impulso. Se per esempio questa collisione durasse 10 volte tanto, a parità di altre variabili, l'accelerazione media sarebbe 10 volte minore, un valore sopportabile con molte probabilità di sopravvivenza.

Figura 9.11 Problema svolto 9.4. (a) Vista dall'alto della traiettoria di un'auto da corsa che va a sbattere contro la spalletta di contenimento laterale della pista. (b) Quantità di moto iniziale p_i e finale p_f relative al pilota. (c) Impulso J che agisce sul pilota durante l'urto.



9.5 CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovrete essere in grado di...

9.26 Applicare, per un sistema isolato di particelle, il principio di conservazione della quantità di moto per mettere in relazione la quantità di moto iniziale delle particelle con la medesima grandezza in un momento successivo.

9.27 Rendervi conto che la conservazione della quantità di moto si può applicare su un asse coordinato utilizzando le componenti lungo quell'asse, purché lungo tale asse non agiscano forze esterne.

Idee chiave

- Per un sistema chiuso e isolato su cui, cioè, non agisca una forza esterna netta, la quantità di moto P rimane costante anche se all'interno avvengono mutamenti:

$$P = \text{costante} \quad (\text{sistema chiuso e isolato}).$$

- Si può scrivere il principio anche riferendosi alla quantità di moto iniziale del sistema e a quella di un momento successivo:

$$P_i = P_f \quad (\text{sistema chiuso e isolato}).$$

Conservazione della quantità di moto

Supponiamo che la risultante delle forze esterne agenti su un sistema di particelle sia zero (il sistema sia isolato) e che nessuna particella entri nel sistema o ne esca (il sistema sia chiuso). Per $F_{\text{net}} = 0$ la (9.27) diventa $dP/dt = 0$, ossia

$$P = \text{costante} \quad (\text{sistema chiuso e isolato}). \quad (9.42)$$

Detto in parole, l'espressione afferma:

Quando su un sistema di punti materiali agisce una forza risultante esterna nulla, la quantità di moto totale P del sistema si conserva invariata.

Questo risultato è detto **principio di conservazione della quantità di moto** e costituisce uno strumento potente nella risoluzione dei problemi. Nell'applicazione quotidiana si può anche scrivere come

$$P_i = P_f \quad (\text{ sistema chiuso e isolato}), \quad (9.43)$$

ove gli indici «i» e «f» si riferiscono all'istante iniziale e a un generico istante finale successivo. Le equazioni 9.42 e 9.43 significano che, se su un sistema di particelle chiuso non agisce alcuna forza esterna netta, la quantità di moto totale del sistema in un qualsiasi istante iniziale t_1 equivale alla quantità di moto totale in un qualsiasi istante finale successivo t_2 .

Le equazioni 9.42 e 9.43 sono equazioni vettoriali, e come tali equivalgono ciascuna a una terna di equazioni scalari, che esprimono la conservazione delle componenti della quantità di moto secondo tre assi ortogonali. A seconda delle forze che agiscono sul sistema, può accadere che la quantità di moto si conservi in una o due direzioni, ma non in tutte.

► Se una componente di una forza esterna netta agente su un sistema chiuso è zero lungo un asse, la componente della quantità di moto del sistema lungo quell'asse non cambia.

Nella pratica, come si può riconoscere se si conserva la quantità di moto lungo un asse, ad esempio l'asse x ? Controllate le componenti delle forze lungo tale asse. Se la risultante di tutte le componenti è nulla, allora vale il principio di conservazione della quantità di moto lungo quell'asse.

A titolo di esempio, se lanciamo una palla a una certa distanza, durante il volo l'unica forza esterna che agisce su di essa (il nostro sistema) è la forza di gravità F_g , che è diretta verticalmente verso il basso. In questa situazione varia la componente verticale della quantità di moto della palla, ma, in assenza di forze esterne orizzontali, le componenti orizzontali si conservano.

Notare che si tratta di forze esterne che agiscono su un sistema chiuso. Per quanto le forze interne possano variare la quantità di moto di una porzione del sistema, non possono modificare la quantità di moto totale del sistema stesso. Per esempio, c'è una quantità di forze che agiscono all'interno del nostro corpo, ma esse fortunatamente non ci spostano a destra e a sinistra.

I problemi svolti che seguono riguardano fenomeni di esplosione, che possono essere uni-, bi- o tridimensionali, a seconda del numero di assi su cui si svolgono i moti connessi con le esplosioni stesse. Nei paragrafi a seguire tratteremo gli urti.

✓ VERIFICA 6

Un apparecchio inizialmente fermo che giace sul pavimento privo di attrito a un certo punto esplose spaccandosi in due pezzi, che si allontanano scivolando sul pavimento. Un pezzo corre lungo l'asse x . (a) Qual è la somma della quantità di moto dei due pezzi dopo l'esplosione? (b) Può il secondo pezzo allontanarsi in una direzione diversa dall'asse x ? (c) Qual è la direzione della quantità di moto del secondo pezzo?

(a) zero, (b) no, (c) asse $-x$

PROBLEMA SVOLTO 9.5

Esplosione unidimensionale, velocità relativa, astronave

Esplosione unidimensionale. Un'astronave di massa totale M sta viaggiando nelle profondità dello spazio alla velocità, rispetto al Sole, $v_1 = 2100$ km/h lungo l'asse x (fig. 9.12a). Espelle uno stadio posteriore di massa $0,20 M$ alla velocità relativa $u = 500$ km/h rispetto all'astronave, diretta lungo l'asse x (fig. 9.12b). Qual è in seguito la velocità dell'astronave rispetto al Sole?

SOLUZIONE

L'idea chiave sta nel fatto che, essendo il sistema chiuso e isolato, si ha conservazione della quantità di moto, ossia

$$P_i = P_f, \quad (9.44)$$

in cui gli indici «i» e «f» si riferiscono, rispettivamente, ai valori prima e dopo l'espulsione. Dobbiamo porre attenzione: la quantità di moto del sistema non cambia, ma quelle dell'astronave e del suo stadio espulso certamente sì.

Calcoli. Il moto si svolge lungo l'asse x e quindi possiamo considerare solo queste componenti. Il verso è individuato dal segno algebrico. Prima dell'espulsione abbiamo

$$P_i = Mv_1, \quad (9.45)$$

Sia U la velocità dello stadio espulso, e v_f la velocità dell'astronave dopo l'espulsione, entrambe misurate rispetto al Sole. La quantità di moto totale dopo l'espulsione risulta

$$P_f = (0,20 M)U + (0,80 M)v_f, \quad (9.46)$$

ove il primo termine a secondo membro è la quantità di moto dello stadio e il secondo termine quella dell'astronave.

La velocità relativa u dello stadio espulso è la differenza fra le velocità dell'astronave e dello stadio:

$$u = v_f - U, \quad (9.47)$$

ossia

$$U = v_f - u,$$

Sostituendo l'espressione di U nella (9.46) e combinando poi nell'equazione 9.44 la (9.45) e la (9.46), otteniamo

$$Mv_i = 0,20M(v_f - u) + 0,80M v_f,$$

da cui

$$v_f = v_i + 0,20u,$$

ossia

$$v_f = 2100 \text{ km/h} + (0,20)(500 \text{ km/h}) = 2200 \text{ km/h}.$$

La separazione esplosiva può modificare le quantità di moto delle due parti, ma non quella totale del sistema

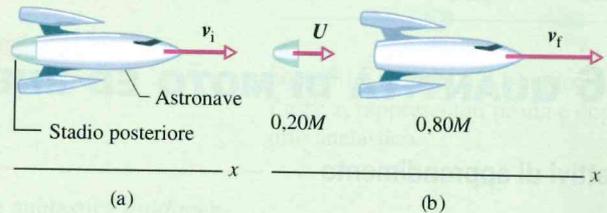


Figura 9.12 Problema svolto 9.5. (a) Un'astronave con il suo stadio posteriore in viaggio a velocità v_i . (b) L'astronave ha espulso lo stadio. Ora si muove con velocità v_f e lo stadio separato ha velocità U .

PROBLEMA SVOLTO 9.6

Esplosione bidimensionale, quantità di moto, noce di cocco

Esplosione bidimensionale. Un fuoco artificiale collocato dentro una noce di cocco di massa M , inizialmente a riposo su un pavimento privo di attrito, spacca il frutto in tre pezzi che si allontanano scivolando sul pavimento, come si vede dall'alto nella figura 9.13a. Il pezzo C, di massa $0,30M$, ha una velocità $v_{f,C} = 5,0 \text{ m/s}^2$. (L'indice «f» sta per «finale».)

(a) Qual è la velocità del pezzo B, di massa $0,20M$?

SOLUZIONE

Per prima cosa dobbiamo controllare se si tratta di un caso in cui la quantità di moto si conserva. Notiamo che (1) il cocco e i suoi tre pezzi formano un sistema chiuso, (2) l'esplosione riguarda solo forze interne al sistema e (3) le forze esterne agenti sul sistema si annullano. La sua quantità di moto dunque si conserva. Dobbiamo porre attenzione: la quantità di moto del sistema non cambia, ma quelle dei frammenti certamente sì.

Calcoli. Per cominciare sovrapponiamo alla figura 9.13a un sistema di coordinate xy , come nella figura 9.13b, con l'asse delle x coincidente e di verso opposto a quello di $v_{f,A}$. L'asse x forma un angolo di 80° con $v_{f,C}$ e un angolo di 50° con $v_{f,B}$.

È una seconda **idea chiave** osservare che le componenti secondo x e y della quantità di moto della noce di cocco (e dei suoi pezzi) si conservano separatamente. Lungo l'asse y possiamo scrivere

$$P_{iy} = P_{fy}, \quad (9.48)$$

ove l'indice «i» si riferisce alle condizioni iniziali (prima dell'esplosione) e l'indice y identifica le componenti secondo y di P_i e P_f .

La componente P_{iy} della quantità di moto iniziale è zero, perché la noce di cocco era in stato di quiete. Per scrivere l'espressione di P_{iy} dobbiamo procurarci le espressioni delle componenti y della quantità di moto finale di ciascun pezzo, mediante l'equazione 9.22:

$$p_{f,Ay} = 0$$

$$p_{f,By} = -0,20M v_{f,By} = -0,20M v_{f,B} \sin 50^\circ$$

$$p_{f,Cy} = 0,30M v_{f,Cy} = 0,30M v_{f,C} \sin 80^\circ.$$

(Si noti che $p_{f,Ay} = 0$ grazie alla scelta degli assi.) L'equazione 9.48 si può ora scrivere così:

$$P_{iy} = P_{fy} = p_{f,Ay} + p_{f,By} + p_{f,Cy}.$$

E per $v_{f,C} = 5,0 \text{ m/s}$ si ha

$$0 = 0 - 0,20 M v_{f,B} \sin 50^\circ + (0,30 M)(5,0 \text{ m/s}) \sin 80^\circ,$$

da cui

$$v_{f,B} = 9,64 \text{ m/s} \approx 9,6 \text{ m/s}.$$

(b) Qual è la velocità del pezzo A?

SOLUZIONE

Calcoli. La quantità di moto lungo l'asse x si conserva perché non ci sono forze esterne che agiscano lungo quest'asse sulla noce di cocco o sui suoi frammenti. Quindi abbiamo

$$P_{ix} = P_{fx}, \quad (9.49)$$

ove $P_{ix} = 0$, perché la noce di cocco era in stato di quiete. Per ottenere P_{fx} , ci procuriamo le componenti secondo x della quantità di moto finale, ricordando che il pezzo A ha massa $0,50 M$:

$$p_{f,Ax} = -0,50 M v_{f,A}$$

$$p_{f,Bx} = 0,20M v_{f,Bx} = 0,20M v_{f,B} \cos 50^\circ$$

$$p_{f,Cx} = 0,30M v_{f,Cx} = 0,30M v_{f,C} \cos 80^\circ.$$

La separazione esplosiva può modificare le quantità di moto delle parti, ma non quella totale del sistema

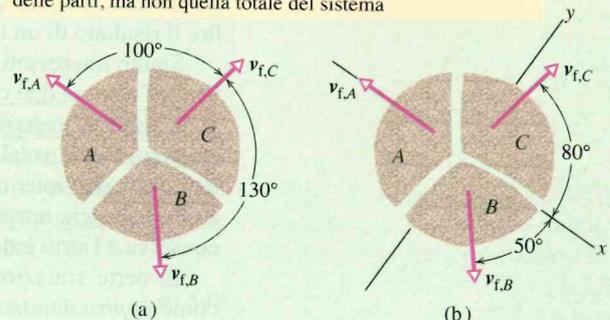


Figura 9.13 Problema svolto 9.6. Tre pezzi di una noce di cocco fatta esplodere si allontanano in tre diverse direzioni su un pavimento privo di attrito. (a) Una vista dall'alto dell'evento. (b) La stessa, con sovrapposto un sistema bidimensionale di assi cartesiani.

L'equazione 9.49 per la conservazione della quantità di moto lungo l'asse x si può ora scrivere così:

$$P_{ix} = P'_{ix} = p_{i,Ax} + p_{i,Bx} + p_{i,Cx}$$

E per $v_{i,C} = 5,0$ m/s e $v_{i,B} = 9,64$ m/s si ha

$$0 = -0,50 M v_{i,A} + 0,20 M (9,64 \text{ m/s}) \cos 50^\circ + 0,30 M (5,0 \text{ m/s}) \cos 81^\circ,$$

da cui infine

$$v_{i,A} = 3,0 \text{ m/s}.$$

9.6 QUANTITÀ DI MOTO ED ENERGIA CINETICA NEGLI URTI

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovrete essere in grado di...

- 9.28 Distinguere tra urti elastici, parzialmente anelastici e totalmente anelastici.
- 9.29 Riconoscere un urto unidimensionale come un urto in cui i corpi si muovono lungo un solo asse sia prima sia dopo la collisione.
- 9.30 Applicare la conservazione della quantità di moto a un urto unidi-

mentale isolato per mettere in relazione le quantità di moto iniziali dei corpi con quelle finali.

- 9.31 Rendervi conto che in un sistema isolato la quantità di moto e la velocità del centro di massa non cambiano anche se i corpi si scontrano.

Idee chiave

- Nell'urto anelastico tra due corpi l'energia cinetica del sistema dei due corpi non si conserva. Se il sistema è chiuso e isolato, la quantità di moto totale *deve* conservarsi. Lo possiamo esprimere in forma vettoriale in questo modo:

$$\mathbf{p}_{1,i} + \mathbf{p}_{2,i} = \mathbf{p}_{1,f} + \mathbf{p}_{2,f}$$

ove i pedici «i» ed «f» si riferiscono ai valori, rispettivamente, subito prima e subito dopo la collisione.

- Quando il moto dei corpi si svolge lungo un solo asse possiamo scrivere tale equazione in termini di componenti della velocità

lungo tale asse:

$$m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f}$$

- Se i due corpi rimangono attaccati uno all'altro, si tratta di un urto completamente anelastico e i due corpi hanno una medesima velocità finale V (si muovono insieme).
- Il centro di massa di un sistema chiuso e isolato di due corpi in collisione non viene modificato dall'urto. In particolare la sua velocità v_{edm} non muta per effetto dell'urto.

Quantità di moto ed energia cinetica negli urti

Nel paragrafo 9.4 abbiamo considerato la collisione tra due corpi puntiformi, focalizzando tuttavia l'attenzione su uno solo dei due. Nei prossimi paragrafi ci concentreremo invece sul sistema nel suo insieme, assumendo che sia chiuso e isolato. Nel paragrafo 9.5 abbiamo stabilito una regola per un sistema siffatto: la quantità di moto totale \mathbf{P} del sistema non può variare perché la forza esterna risultante è nulla. È uno strumento utilissimo che ci consente di stabilire il risultato di un urto *senza* conoscerne i dettagli, ad esempio il danno provocato.

Siamo interessati anche all'energia cinetica totale di un sistema di due corpi in collisione. Se nell'urto tra due corpi l'energia cinetica totale del sistema non cambia, si dice che l'energia cinetica si conserva (è la stessa prima e dopo l'urto). Un urto di questo tipo è chiamato elastico. Negli usuali urti tra oggetti comuni, come tra due auto o tra una palla e una mazza, una certa porzione di energia si trasferisce dall'energia cinetica ad altre forme di energia, come l'energia termica o l'energia acustica. L'energia cinetica dunque in questi casi *non* si conserva e l'urto è detto **anelastico**.

In certe situazioni possiamo tuttavia considerare la collisione tra due oggetti comuni come *approssimativamente* elastica. Supponiamo di far cadere una pallina di gomma su un pavimento duro. Se l'urto tra pallina e pavimento (o la Terra) fosse elastico, la pallina non perderebbe energia cinetica nell'evento e rimbalzerebbe risalendo alla stessa quota da cui era partita. Sappiamo tuttavia che l'altezza di rimbalzo è sempre almeno un poco minore, dimostrando che quantomeno una piccola parte di energia cinetica si perde nell'urto e che quindi la collisione è in qualche misura anelastica. Potremmo però nel nostro caso scegliere di tra-

scurare questa perdita di energia cinetica, se è modesta, e approssimare il fenomeno con un urto elastico.

La collisione anelastica tra due corpi comporta sempre una perdita di energia cinetica del sistema. La massima perdita si ha quando i corpi si incollano insieme, nel qual caso si parla di urto **completamente anelastico**. La collisione tra una pallina e una racchetta da tennis è in parte anelastica, ma se la pallina fosse rappresentata da un pezzo di plastilina, l'urto sarebbe completamente anelastico. Una buona ragione per cui nel tennis non si usano palle di plastilina!

Urti anelastici in una dimensione

Urto anelastico unidimensionale

La figura 9.14 illustra lo stato di due corpi prima e dopo una collisione anelastica *unidimensionale*. Sono indicate le velocità iniziali (prima dell'urto) e finali (dopo l'urto). Il sistema, chiuso e isolato, è formato dai due corpi. Vale il principio della conservazione della quantità di moto, per cui la quantità di moto totale prima e dopo l'urto deve essere uguale; in simboli:

$$p_{1,i} + p_{2,i} = p_{1,f} + p_{2,f} \quad (\text{conservazione della quantità di moto}). \quad (9.50)$$

Dato che il moto è unidimensionale, possiamo limitare l'analisi alle sole componenti lungo la direzione del moto e scrivere l'equazione 9.50 in forma scalare lasciando che il segno algebrico indichi il verso:

$$m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f}. \quad (9.51)$$

Se conosciamo per esempio le masse, le velocità iniziali e una delle velocità finali, possiamo trovare la velocità finale incognita.

Urto completamente anelastico in una dimensione

La figura 9.15 mostra due corpi prima e dopo un urto completamente anelastico (significa che i due corpi si attaccano l'uno all'altro). Il corpo di massa m_2 è inizialmente fermo ($v_{2,i} = 0$). Chiamiamo questo corpo *bersaglio* e diamo all'altro corpo incidente il nome di *proiettile*. Dopo l'urto l'insieme incollato dei due corpi ha velocità V . L'equazione 9.51 si scrive dunque in questo caso

$$m_1 v_{1,i} = (m_1 + m_2) V, \quad (9.52)$$

ossia

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i}. \quad (9.53)$$

Se conosciamo ad esempio i valori delle masse e della velocità iniziale $v_{1,i}$ del proiettile, possiamo trovare la velocità finale $v_{1,f}$. Si noti che V sarà comunque minore di $v_{1,i}$ perché il rapporto $m_1/(m_1 + m_2)$ è sicuramente minore di 1.

Velocità del centro di massa

In un sistema chiuso e isolato la velocità v_{cdm} del centro di massa del sistema non può cambiare a seguito di un urto, perché, essendo il sistema isolato, non vi è alcuna forza esterna netta capace di farlo. Per ricavare un'espressione di v_{cdm} torniamo all'urto unidimensionale tra due corpi descritto nella figura 9.14. Con l'equazione 9.25 ($\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{\text{cdm}}$) possiamo correlare v_{cdm} con la quantità di moto totale \mathbf{P} del sistema di due corpi, scrivendo

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{\text{cdm}} = (m_1 + m_2)\mathbf{v}_{\text{cdm}}. \quad (9.54)$$

La quantità di moto totale durante l'urto si conserva e si può quindi esprimere con uno qualsiasi dei due membri della (9.50). Scegliamo quello di sinistra:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_{1,i} + \mathbf{p}_{2,i}. \quad (9.55)$$

Configurazione generica di un urto anelastico

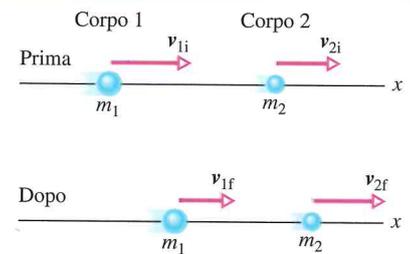


Figura 9.14 I corpi 1 e 2 in moto lungo l'asse x , rappresentati prima e dopo un urto anelastico.

Nell'urto completamente anelastico i corpi restano attaccati insieme

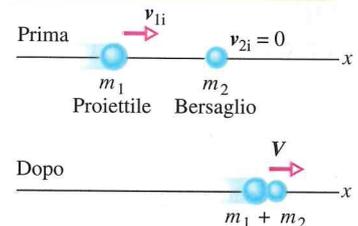


Figura 9.15 Un urto completamente anelastico fra due corpi. Prima dell'urto il corpo m_2 è a riposo e il corpo m_1 è diretto verso di esso. Dopo, i due corpi rimangono attaccati insieme, e si muovono con la stessa velocità V .

Sostituendo nella (9.54) e risolvendo rispetto a v_{cdm} , si ottiene

$$v_{\text{cdm}} = \frac{P}{m_1 + m_2} = \frac{p_{1,i} + p_{2,i}}{m_1 + m_2} \quad (9.56)$$

Il termine a destra di questa equazione è costante e quindi la velocità del centro di massa è sempre la stessa prima e dopo la collisione.

Per esempio, la figura 9.16 mostra, in una serie di «foto istantanee», il moto del centro di massa per l'urto completamente anelastico di figura 9.15. Il corpo 2 fa da bersaglio e la sua quantità di moto iniziale è nulla. Il corpo 1, il proiettile, ha quantità di moto iniziale $m_1 v_{1,i}$. Si noti che al procedere dell'evento il centro di massa avanza verso destra a velocità costante. Dopo l'urto, la velocità finale V comune ai due corpi coincide con v_{cdm} perché il centro di massa coincide coi due corpi incollati.

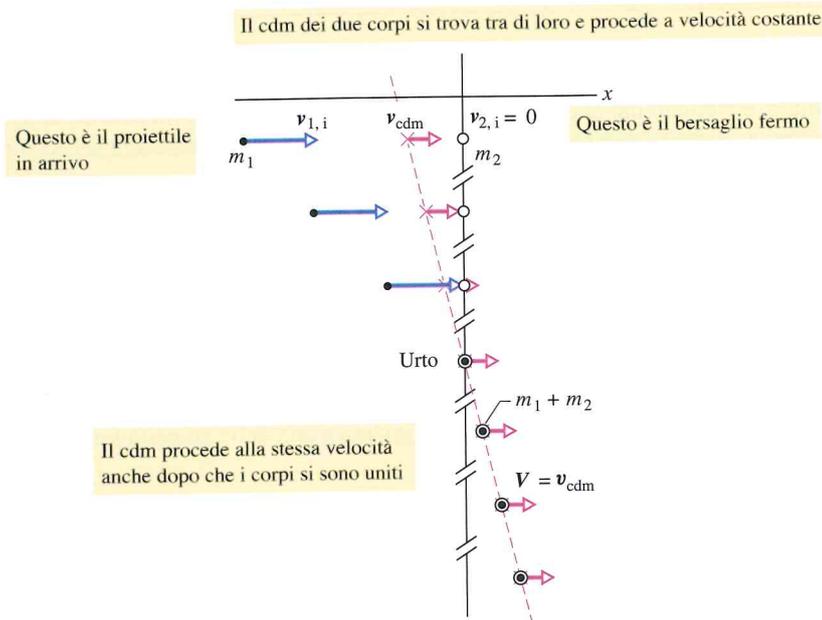


Figura 9.16 I vettori velocità istantanea dei due corpi di figura 9.15 e del loro centro di massa in istanti successivi prima e dopo l'urto anelastico. I due corpi rimangono attaccati fra loro dopo l'urto e proseguono uniti con velocità del centro di massa v_{cdm} . Si noti che il vettore velocità del centro di massa non è influenzato dall'urto, ed è uguale alla velocità finale dell'insieme dei due corpi.

✓ VERIFICA 7

I corpi 1 e 2 subiscono un urto unidimensionale completamente anelastico. Qual è la loro quantità di moto finale, se quella iniziale è rispettivamente (a) $10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ e 0 , (b) $10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ e $4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$, (c) $10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ e $-4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$?

(a) $10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$; (b) $14 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$; (c) $6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$

PROBLEMA SVOLTO 9.7

Conservazione della quantità di moto, pendolo balistico

Diamo qui un esempio di una tecnica usata comunemente in fisica. Abbiamo un fenomeno che non possiamo elaborare matematicamente perché non disponiamo di un'equazione che lo descriva nella sua interezza. Lo separiamo in stadi successivi che possiamo elaborare separatamente grazie alle equazioni che ci sono invece note.

Il *pendolo balistico* è un dispositivo un tempo usato per misurare la velocità dei proiettili prima dell'introduzione dei cronometri elettronici. L'esemplare rappresentato nella figura 9.17 è formato da un voluminoso blocco di legno, di massa $M = 5,4 \text{ kg}$, sospeso a due lunghe funi. Un proiettile di massa $m = 9,5 \text{ g}$ è sparato contro il blocco, nel quale repentinamente si arresta. Il sistema *blocco + proiettile* oscilla quindi verso destra e

il centro di massa del sistema si alza di un tratto verticale $h = 6,3 \text{ cm}$, prima che il pendolo arrivi alla massima escursione. Qual era la velocità v del proiettile immediatamente prima della collisione?

SOLUZIONE

Si vede subito che la velocità del proiettile determina il dislivello h subito dal pendolo. Un'idea chiave ci avverte però che, per trovare il legame tra queste due quantità, non possiamo affidarci al principio di conservazione dell'energia meccanica. Infatti, quando il proiettile penetra nel blocco, certamente una porzione di energia viene convertita in

altre forme (energia termica e anche energia spesa per lo sconquassamento della struttura lineare). Possiamo però - ecco un'altra **idea chiave** - dividere questo processo complicato in due stadi, da analizzare separatamente: (1) l'urto tra proiettile e blocco e (2) l'innalzamento del sistema blocco-proiettile, per i quali l'energia meccanica *si conserva*. Chiamiamo V la velocità del sistema *blocco + proiettile* subito dopo l'urto.

Stadio 1 Considerata la rapidità dell'urto entro il sistema blocco-proiettile, possiamo assumere due importanti ipotesi: (1) Durante l'urto la forza gravitazionale e la forza di tensione delle funi si bilanciano sempre. In questo breve intervallo di tempo, quindi, l'impulso netto esterno sul sistema blocco-proiettile è nullo. Il sistema è dunque isolato e la quantità di moto totale si conserva. (2) La collisione è unidimensionale, nel senso che la direzione del moto del sistema blocco-proiettile *subito dopo l'urto* è praticamente la stessa direzione originaria del proiettile.

Essendo il caso unidimensionale, considerato che il blocco inizialmente è fermo e che il proiettile si incastra nel blocco, per esprimere la conservazione della quantità di moto possiamo ricorrere all'equazione 9.53. Con opportuna sostituzione dei simboli, abbiamo

$$V = \frac{m}{m + M} v. \quad (9.57)$$

Stadio 2 Dall'istante in cui blocco e proiettile cominciano a oscillare insieme, l'energia meccanica del sistema proiettile-blocco-Terra si conserva. Infatti la tensione nelle funi non interviene perché è sempre perpendicolare alla direzione del moto di oscillazione. Assumiamo il livello zero dell'energia potenziale gravitazionale alla quota di riposo del pendolo. Dal principio di conservazione dell'energia meccanica consegue che l'energia cinetica all'inizio dell'oscillazione deve eguagliare l'energia potenziale gravitazionale al culmine dell'escursione. Dato che la velocità iniziale di blocco e proiettile equivale alla velocità V assunta dal sistema subito dopo la collisione, possiamo scrivere il principio di conservazione come

$$\frac{1}{2}(m + M)V^2 = (m + M)gh. \quad (9.58)$$

Combinando i due stadi. Introducendo V dall'equazione 9.57 otteniamo

$$\begin{aligned} v &= \frac{m + M}{m} \sqrt{2gh} = \\ &= \left(\frac{0,0095 \text{ kg} + 5,4 \text{ kg}}{0,0095 \text{ kg}} \right) \sqrt{(2)(9,8 \text{ m/s}^2)(0,063 \text{ m})} = \\ &= 630 \text{ m/s}. \end{aligned} \quad (9.59)$$

Il pendolo balistico è una sorta di «trasformatore» di velocità: l'alta velocità di un corpo leggero (il proiettile) si trasforma nella bassa velocità, quindi misurabile più facilmente, di un corpo pesante (il blocco di legno).

Qui avvengono due fenomeni. La pallottola urta il blocco. Poi il sistema blocco-pallottola dondola elevandosi di un'altezza h

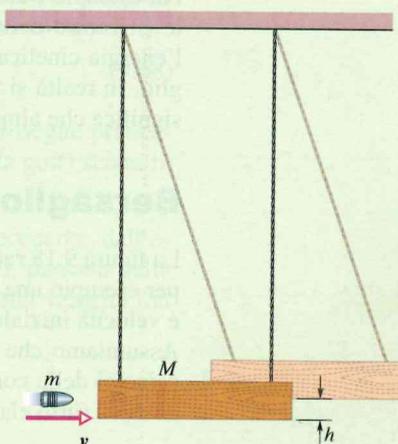


Figura 9.17 Problema svolto 9.7. Un pendolo balistico, un tempo impiegato per misurare la velocità dei proiettili di fucile.

9.7 URTI ELASTICI IN UNA DIMENSIONE

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovrete essere in grado di...

9.32 Applicare, per urti elastici isolati unidimensionali, le leggi di conservazione dell'energia totale e della quantità di moto totale dei corpi in collisione per mettere in relazione i valori iniziali con quelli finali.

9.33 Individuare, per un proiettile che colpisce un bersaglio fisso, il moto che ne consegue nei tre casi: masse uguali, massa del bersaglio maggiore di quella del proiettile, massa del proiettile maggiore di quella del bersaglio.

Idee chiave

- Un urto è elastico quando l'energia cinetica del sistema dei corpi si conserva. Quando il sistema è chiuso e isolato si conserva anche la quantità di moto. In un urto unidimensionale in cui il corpo 2 faccia da bersaglio e il corpo 1 da proiettile, la conservazione dell'energia cinetica e della quantità di moto portano alle seguenti espressioni delle velocità immediatamente dopo l'urto:

$$v_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,i},$$

e

$$v_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i}.$$

Urti elastici in una dimensione

Come abbiamo visto nel paragrafo 9.6, tutti gli urti più comuni sono prevalentemente anelastici, ma possiamo approssimare alcuni urti come se fossero elastici, urti nei quali pressoché tutta l'energia cinetica si conserva senza quindi trasformarsi in altre forme di energia. In un urto elastico dunque

$$\left(\begin{matrix} \text{energia cinetica} \\ \text{totale iniziale} \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} \text{energia cinetica} \\ \text{totale finale} \end{matrix} \right). \quad (9.60)$$

Questo significa che

In un urto elastico l'energia cinetica di ciascun corpo coinvolto può variare, ma l'energia cinetica totale rimane costante.

Per esempio l'urto tra due bocce si può approssimare con un urto elastico. Se l'urto è frontale (il centro della boccia bersaglio giace sulla direzione del moto della boccia proiettile), l'energia cinetica della boccia proiettile si può trasferire quasi per intero alla boccia bersaglio. In realtà si tratta di un'approssimazione: il fatto stesso che nell'urto si emetta rumore significa che almeno una quantità minima di energia si è trasformata in energia acustica.

Bersaglio fisso

La figura 9.18 rappresenta due corpi di massa diversa prima e dopo un urto unidimensionale, per esempio una boccia che colpisce frontalmente il boccino. Il corpo proiettile di massa m_1 e velocità iniziale $v_{1,i}$ colpisce il corpo bersaglio di massa m_2 inizialmente a riposo ($v_{2,i} = 0$). Assumiamo che il sistema dei due corpi sia chiuso e isolato. Applicando quindi all'urto i principi della conservazione della quantità di moto (sistema chiuso e isolato) e dell'energia cinetica (urto elastico), si trova

$$m_1 v_{1,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f} \quad (\text{quantità di moto}), \quad (9.61)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2, \quad (9.62)$$

ove gli indici «i» ed «f» identificano rispettivamente le velocità iniziali e finali. Se sono note le masse dei due corpi e la velocità iniziale del corpo 1, siamo in grado, disponendo di due equazioni, di ricavare le velocità finali $v_{1,f}$ e $v_{2,f}$ dei due corpi.

A questo scopo trasformiamo le equazioni 9.61 e 9.62 nelle due seguenti:*

$$m_1(v_{1,i} - v_{1,f}) = m_2 v_{2,f}, \quad (9.63)$$

$$m_1(v_{1,i} - v_{1,f})(v_{1,i} + v_{1,f}) = m_2 v_{2,f}^2. \quad (9.64)$$

Dividendo l'equazione 9.64 per la 9.63, con qualche ulteriore passaggio otteniamo

$$v_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,i}. \quad (9.65)$$

$$v_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i}. \quad (9.66)$$

Si noti che $v_{2,f}$ è sempre positivo, ossia che il bersaglio di massa m_2 si muove sempre in avanti. Ma dalla (9.65) si vede che la velocità finale $v_{1,f}$ del primo corpo può essere positiva o negativa: il proiettile, di massa m_1 , prosegue se $m_1 > m_2$, e rimbalza se $m_1 < m_2$.

Esaminiamo ora alcune situazioni particolari.

1. Masse uguali Se $m_1 = m_2$, le equazioni 9.65 e 9.66 si riducono a

$$v_{1,f} = 0 \quad \text{e} \quad v_{2,f} = v_{1,i}$$

che potremmo chiamare *regola del giocatore di bocce*. Da essa risulta che in un urto frontale fra due corpi di uguale massa, il corpo 1 (il proiettile, inizialmente in moto) si arresta

* In questo passaggio utilizziamo l'identità $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, semplificando così sensibilmente la soluzione del sistema di equazioni 9.65 e 9.66.

Configurazione generica di un urto elastico in bersaglio fermo

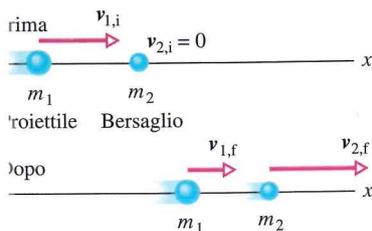


Figura 9.18 Il corpo 1 si muove lungo l'asse x prima di subire un urto elastico col corpo 2 inizialmente fermo. Dopo l'urto entrambi si muovono lungo l'asse x .

nel punto dell'urto, mentre il corpo 2 (il bersaglio, inizialmente fermo) si allontana alla velocità iniziale del corpo 1. Due corpi di uguale massa che si scontrano frontalmente si scambiano semplicemente le velocità. Ciò vale anche se il corpo 2, che abbiamo chiamato «bersaglio», non è inizialmente fermo.

- 2. Bersaglio massiccio** Riferendoci alla figura 9.18, diremo che il bersaglio è «massiccio» quando $m_2 \gg m_1$. Potremmo per esempio sparare una pallina da golf contro una palla di cannone. Le equazioni 9.65 e 9.66 si riducono allora a

$$v_{1,f} \approx -v_{1,i} \quad \text{e} \quad v_{2,f} \approx \left(\frac{2m_1}{m_2}\right)v_{1,i} \quad (9.67)$$

Da queste ultime equazioni risulta che il corpo 1 (la pallina da golf) rimbalza semplicemente all'indietro nella direzione di provenienza a velocità invariata, mentre il corpo 2 (la palla di cannone) si muove lentamente in avanti, perché la quantità fra parentesi nell'equazione 9.67 è molto inferiore all'unità.

- 3. Proiettile massiccio** Questo è il caso opposto: $m_1 \gg m_2$. Questa volta spariamo una palla di cannone contro una pallina da golf. Le equazioni 9.65 e 9.66 si riducono allora a

$$v_{1,f} \approx +v_{1,i} \quad \text{e} \quad v_{2,f} \approx 2v_{1,i}. \quad (9.68)$$

Da quest'ultima equazione risulta che il corpo 1 (la palla di cannone) prosegue praticamente indisturbata nel suo moto in avanti, mentre il corpo 2 (la pallina da golf) scatta in avanti a velocità doppia di quella della palla di cannone.

Potremmo chiederci: «Ma perché doppia?» Proviamo a riflettere: nel caso precedente, dall'equazione 9.67 risultava che il proiettile, molto leggero (la pallina da golf), passava dalla velocità $+v$ a $-v$, con una *variazione* uguale a $2v$. Un'identica variazione della velocità (da zero a $2v$) interviene in questo caso.

Bersaglio mobile

Dopo aver esaminato l'urto elastico di un proiettile contro un bersaglio fermo, passiamo a esaminare il caso di un urto elastico fra due corpi in moto.

Per la disposizione della figura 9.19, il principio di conservazione della quantità di moto ha questa espressione:

$$m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f}, \quad (9.69)$$

mentre per la conservazione dell'energia cinetica si scriverà

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1,i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,f}^2. \quad (9.70)$$

Per ricavare $v_{1,f}$ e $v_{2,f}$ da questo sistema di due equazioni, trasformiamo la (9.69) così:

$$m_1(v_{1,i} - v_{1,f}) = -m_2(v_{2,i} - v_{2,f}), \quad (9.71)$$

e la (9.70) così:

$$m_1(v_{1,i} - v_{1,f})(v_{1,i} + v_{1,f}) = -m_2(v_{2,i} - v_{2,f})(v_{2,i} + v_{2,f}). \quad (9.72)$$

Dividendo la (9.72) per la (9.71), con qualche altro passaggio troviamo

$$v_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1,i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_{2,i}, \quad (9.73)$$

e

$$v_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1,i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_{2,i}. \quad (9.74)$$

Si noti che l'attribuzione degli indici 1 e 2 ai due corpi è arbitraria: scambiando fra loro i due indici nella figura 9.19 e nelle due equazioni 9.73 e 9.74, alla fine si trova esattamente la stessa coppia di equazioni. Se poi poniamo $v_{2,i} = 0$, il corpo 2 diventa un bersaglio fermo come nella figura 9.18, e le equazioni 9.73 e 9.74 si riducono rispettivamente alle (9.65) e (9.66).

Configurazione generica di un urto elastico con bersaglio in moto



Figura 9.19 Due corpi in procinto di subire un urto elastico unidimensionale.

✓ VERIFICA 8

Qual è la quantità di moto finale del bersaglio di figura 9.18 se quelle iniziale e finale del proiettile sono rispettivamente $6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ e (a) $2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ o (b) $-2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$? (c) Qual è l'energia cinetica finale del bersaglio se le energie cinetiche iniziale e finale del proiettile sono rispettivamente 5 J e 2 J ?

PROBLEMA SVOLTO 9.8

Reazione a catena di urti elastici

Nella figura 9.20a il blocco 1 si avvicina con velocità $v_{1,i} = 10 \text{ m/s}$ a un insieme di due blocchi fermi. Urta il blocco 2, che a sua volta va a urtare il blocco 3 di massa $m_3 = 6,0 \text{ kg}$. Dopo questo secondo urto il blocco 2 si trova nuovamente a riposo e il blocco 3 ha velocità $v_{3,f} = 5,0 \text{ m/s}$ (fig. 9.20b). Si assume che gli urti siano elastici. Trovare le masse dei blocchi 1 e 2, nonché la velocità finale $v_{1,f}$ del blocco 1.

SOLUZIONE

Se gli urti sono elastici, l'energia meccanica si conserva (trascurabili le trasformazioni in calore, suoni e oscillazioni dei blocchi). Giacché non si hanno forze esterne orizzontali agenti sui blocchi, anche la quantità di moto si conserva lungo l'asse x . Grazie a queste due considerazioni possiamo applicare le equazioni (9.67) e (9.68) a ciascun urto.

Calcoli. Partendo con il primo urto abbiamo troppe incognite per procedere nel calcolo: non conosciamo infatti le masse finali né le velocità finali dei due blocchi. Consideriamo invece il secondo urto in cui il blocco 2 si arresta a seguito della collisione col blocco 3. Applicando a tale urto la (9.67) con le dovute notazioni, troviamo

$$v_{2,f} = \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} v_{2,i},$$

ove $v_{2,i}$ è la velocità del blocco 2 subito prima dell'urto e $v_{2,f}$ è la velocità immediatamente dopo. Dato che $v_{2,f} = 0$ (il blocco si arresta) e $m_3 = 6,0 \text{ kg}$, otteniamo

$$m_2 = m_3 = 6,0 \text{ kg}.$$

Altrettanto facciamo nella (9.68) per il secondo urto e avremo

$$v_{3,f} = \frac{2m_2}{m_2 + m_3} v_{2,i},$$

ove $v_{3,f}$ è la velocità finale del blocco 3. Sostituendo $m_2 = m_3$ e $v_{3,f} = 5,0 \text{ m/s}$, si giunge a

$$v_{2,i} = v_{3,f} = 5,0 \text{ m/s}.$$

Ora torniamo alla prima collisione facendo attenzione alle notazioni per il blocco 2: ciò che per il secondo urto erano i valori iniziali ora sono i valori finali. Applicando la (9.68) al primo urto e introducendovi $v_{1,i} = 10 \text{ m/s}$, si ottiene

$$v_{1,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i},$$

$$5,0 \text{ m/s} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} (10 \text{ m/s}),$$

che porta a

$$m_1 = \frac{1}{3} m_2 = \frac{1}{3} (6,0 \text{ kg}) = 2,0 \text{ kg}.$$

Applicando infine al primo urto la (9.67) con i dati ottenuti, possiamo scrivere

$$v_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,i} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3} m_2 - m_2}{\frac{1}{3} m_2 + m_2} (10 \text{ m/s}) = -5,0 \text{ m/s}.$$

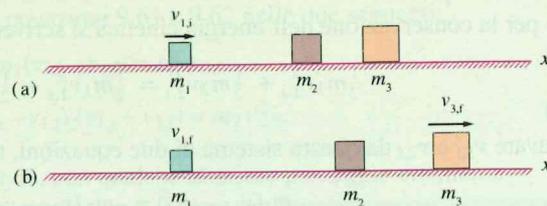


Figura 9.20 Problema svolto 9.8. $v_{1,i} = v_{1,i}$. $v_{3,f} = v_{3,f}$

9.8 URTI IN DUE DIMENSIONI

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovrete essere in grado di...

9.34 Applicare, per un urto bidimensionale in un sistema isolato, il principio di conservazione della quantità di moto lungo ciascun asse del sistema di coordinate per mettere in relazione le componenti della quantità di moto lungo un asse prima dell'urto con quelle dopo l'urto lungo lo stesso asse.

9.35 Applicare, per un urto elastico bidimensionale in un sistema isolato, il principio di conservazione (a) della quantità di moto lungo ciascun asse del sistema di coordinate per mettere in relazione le componenti della quantità di moto lungo un asse prima dell'urto con quelle dopo l'urto lungo lo stesso asse, e (b) dell'energia cinetica totale per mettere in relazione le energie cinetiche prima e dopo l'urto.

Idee chiave

- Quando due corpi in collisione non si muovono lungo lo stesso asse, l'urto è bidimensionale. Posto che il sistema dei due corpi sia chiuso e isolato, si applica all'urto il principio di conservazione della quantità di moto scrivendo

$$P_{1,i} + P_{2,i} = P_{1,f} + P_{2,f}$$

In termini di componenti la legge dà luogo a due equazioni, per le due dimensioni. Nel caso che l'urto sia anche elastico – un caso particolare – la conservazione dell'energia cinetica durante l'urto fornisce una terza equazione:

$$K_{1,i} + K_{2,i} = K_{1,f} + K_{2,f}$$

Urti in due dimensioni

Quando due corpi collidono, gli impulsi applicati dall'uno sull'altro determinano le direzioni che essi assumono dopo l'urto. In particolare quando l'urto non è frontale (centri di massa allineati con la direzione del moto), i corpi non finiscono col muoversi lungo lo stesso asse iniziale. Anche in urti bidimensionali di un sistema chiuso e isolato la quantità di moto totale si conserva:

$$P_{1,i} + P_{2,i} = P_{1,f} + P_{2,f} \tag{9.75}$$

Se l'urto è anche elastico (un caso particolare), si conserva anche l'energia cinetica totale:

$$K_{1,i} + K_{2,i} = K_{1,f} + K_{2,f} \tag{9.76}$$

L'equazione 9.75 spesso diventa utile nell'analisi degli urti bidimensionali se la separiamo nelle due componenti x e y . Per esempio, nella figura 9.21 vediamo un urto disassato tra un corpo proiettile e un corpo bersaglio inizialmente a riposo. Dopo l'urto i due oggetti si allontanano fra loro e dalla direzione iniziale del proiettile secondo gli angoli θ_1 e θ_2 rispettivamente. L'equazione vettoriale 9.75 della conservazione della quantità di moto è equivalente alle due equazioni scalari delle componenti x e y :

$$m_1 v_{1,i} = m_1 v_{1,f} \cos \theta_1 + m_2 v_{2,f} \cos \theta_2, \tag{9.77}$$

per la componente x , e

$$0 = -m_1 v_{1,f} \sin \theta_1 + m_2 v_{2,f} \sin \theta_2. \tag{9.78}$$

per la componente y . Se la collisione è elastica, è valida anche la (9.76), che, scritta in termini di velocità, diventa

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2 \quad (\text{energia cinetica}). \tag{9.79}$$

Queste tre equazioni contengono sette variabili: due masse, m_1 e m_2 ; tre velocità, $v_{1,i}$, $v_{1,f}$ e $v_{2,f}$; e due angoli, θ_1 e θ_2 . Conoscendo i valori di una quaterna qualsiasi di queste tre grandezze, da queste tre equazioni possiamo ricavare le tre incognite rimanenti.

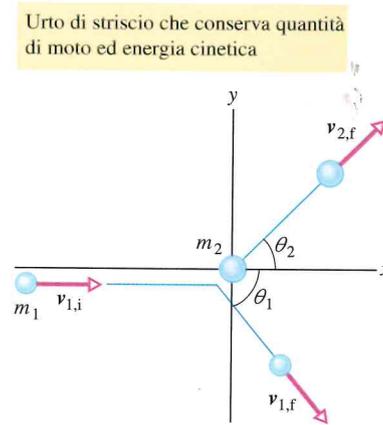


Figura 9.21 Una collisione elastica fra due corpi, nella quale l'urto non è frontale. Il corpo di massa m_2 (bersaglio) è inizialmente a riposo.

✓ VERIFICA 9

Con riferimento alla figura 9.21, si supponga che il proiettile abbia quantità di moto iniziale di $6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$, la componente x della quantità di moto finale sia pari a $4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ e la componente y della quantità di moto finale sia di $-3 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$. Riguardo al bersaglio, quali saranno (a) la componente x della quantità di moto finale e (b) la componente y della quantità di moto finale?

(a) $2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$
(b) $3 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$

9.9 SISTEMI A MASSA VARIABILE: I RAZZI

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovrete essere in grado di...

- 9.36** Applicare la prima equazione del razzo per mettere in relazione la perdita temporale di massa da parte del razzo, la velocità relativa tra razzo e gas espulsi, la massa del razzo e la sua accelerazione.
- 9.37** Applicare la seconda equazione del razzo per mettere in relazione la variazione di velocità del razzo con la velocità relativa dei gas espulsi e le masse iniziale e finale del razzo.

- 9.38** Mettere in relazione il rapporto temporale di perdita di massa da parte di un corpo in moto a massa variabile con la variazione di quantità di moto.

Lee chiave

In assenza di forze esterne un razzo accelera con intensità istantanea data da

$$Ru = Ma \text{ (prima equazione del razzo),}$$

in cui M è la massa istantanea del razzo (che comprende il propellente rimasto), R è il consumo di carburante nell'unità di tempo e u è la velocità relativa di espulsione dei gas combusti. Il termine Ru è la spinta del motore a reazione.

- Se R e u in un razzo sono costanti, la variazione di velocità da quella iniziale v_i a quella finale v_f , mentre la massa varia da M_i a M_f , è data dall'espressione

$$v_f - v_i = u \ln \frac{M_i}{M_f} \text{ (seconda equazione del razzo).}$$

Sistemi a massa variabile: i razzi

Nei sistemi finora considerati abbiamo supposto che la massa totale del sistema rimanga invariata. Talvolta ciò non accade: esempio tipico, un razzo. La massa di un razzo sulla rampa di lancio è costituita per la maggior parte dal combustibile, che sarà bruciato in fase di accelerazione ed espulso dall'ugello del propulsore.

Trattiamo la variazione di massa del razzo durante l'accelerazione applicando la seconda legge di Newton, non al solo razzo, ma all'insieme del razzo e dei prodotti di combustione da esso espulsi. È la massa di *questo* sistema che *non varia* durante l'accelerazione del razzo.

l'espulsione di una massa dall'ugello del razzo ne accresce la velocità

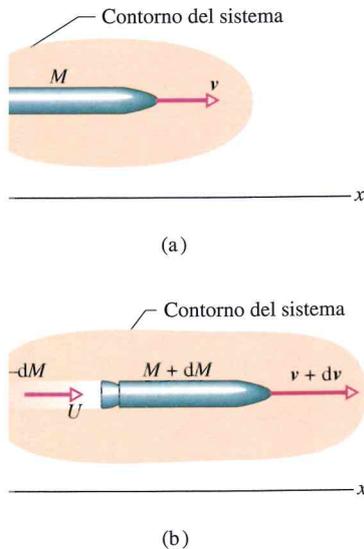


figura 9.22 (a) Un razzo di massa M in accelerazione, visto al tempo t da un sistema di riferimento inerziale. (b) Lo stesso razzo all'istante $t + dt$. Sono indicati i gas di scarico emessi durante l'intervallo dt .

Calcolo dell'accelerazione

Supponete di essere in un sistema di riferimento inerziale e di osservare un razzo che accelera nello spazio senza che su di esso agiscano forze gravitazionali o di resistenza dell'aria. A un istante arbitrario t (vedi fig. 9.22a), sia M la massa e v la velocità del razzo in questo moto unidimensionale.

La figura 9.22b mostra come vanno le cose dopo un intervallo di tempo dt . Il razzo ha ora velocità $v + dv$ e massa $M + dM$, ove la variazione di massa dM è una *quantità negativa*. I gas di scarico emessi dal razzo nell'intervallo dt hanno massa $-dM$ e velocità U rispetto al nostro sistema di riferimento inerziale.

Conservazione della quantità di moto. Il sistema in esame comprende il razzo e i prodotti di scarico emessi durante l'intervallo dt . Il sistema, essendo chiuso e isolato, dovrà conservare la propria quantità di moto durante l'intervallo dt , ossia:

$$P_i = P_f, \tag{9.80}$$

ove gli indici «i» ed «f» identificano i valori all'inizio e alla fine dell'intervallo dt . Possiamo riscrivere così l'equazione 9.80:

$$Mv = -dM U + (M + dM)(v + dv), \tag{9.81}$$

ove il primo termine del secondo membro è la quantità di moto dei prodotti di scarico emessi durante l'intervallo dt , e il secondo termine quella del razzo alla fine dello stesso intervallo.

Velocità relative. Possiamo semplificare la (9.81) introducendo la velocità u dei prodotti di scarico rispetto al razzo, che si ottiene sottraendo la velocità U dalla velocità $v + dv$ del razzo alla fine dell'intervallo dt :

$$u = (v + dv) - U.$$

Otteniamo

$$U = (v + dv) - u, \tag{9.82}$$

e sostituendo a U nella (9.81) quest'espressione, con semplici passaggi si giunge a

$$-dM u = M dv. \tag{9.83}$$

Dividendo la (9.83) per dt si ottiene

$$-\frac{dM}{dt} u = M \frac{dv}{dt}. \tag{9.84}$$

Chiamando R (positivo e istantaneo) il consumo temporale di combustibile (massa nell'unità di tempo), possiamo sostituire $-R$ all'espressione dM/dt ; inoltre sappiamo che dv/dt è l'accelerazione a del razzo. La (9.84) diventa

$$Ru = Ma \quad (\text{prima equazione del razzo}). \quad (9.85)$$

La (9.85) è valida per ogni istante t .

Il primo membro della (9.85) ha le dimensioni di una forza ($\text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N}$) e dipende soltanto da alcuni parametri di dimensionamento del razzo: il ritmo R di consumo del combustibile e la velocità di emissione u dei gas relativa al propulsore. Questo termine Ru è detto **spinta** (generata dal propulsore) e può essere sostituito dal simbolo S . Risulta evidente l'identità della (9.85), scritta come $S = Ma$, con la seconda legge di Newton.

Calcolo della velocità

Come varierà la velocità del razzo con il consumo di propellente? Dalla (9.83) si ha

$$dv = -u \frac{dM}{M}.$$

Integrando otteniamo

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -u \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M},$$

ove M_i è la massa iniziale ed M_f la massa finale del razzo. Dal calcolo dell'integrale otteniamo

$$v_f - v_i = u \ln \frac{M_i}{M_f}. \quad (9.86)$$

È questa l'espressione dell'aumento di velocità del razzo corrispondente alla diminuzione della massa da M_i a M_f . Risulta evidente la convenienza di adottare razzi a molti stadi, che consentono una forte riduzione della massa finale M_f , grazie all'eliminazione dei serbatoi dei diversi stadi via via che esauriscono la loro scorta di propellente. Di un razzo ideale dovrebbe arrivare a destinazione soltanto il carico utile.

PROBLEMA SVOLTO 9.9

Motore del razzo, spinta, accelerazione

In tutti i precedenti problemi svolti la massa di un sistema era costante. Questo è un esempio di sistema (un razzo con motore a reazione) che perde massa col passare del tempo. Un razzo di massa iniziale $M_i = 850 \text{ kg}$ consuma carburante in ragione di $R = 2,3 \text{ kg/s}$. La velocità di espulsione dei gas combusti rispetto al razzo è $u = 2800 \text{ m/s}$. (a) Calcolare la spinta fornita dal motore.

SOLUZIONE

La spinta T è uguale al prodotto del consumo unitario R e del modulo della velocità relativa u , come recita l'equazione 9.85.

Calcoli. Nel nostro caso abbiamo

$$T = Ru = (2,3 \text{ kg/s})(2800 \text{ m/s}) = 6440 \text{ N} \approx 6400 \text{ N}.$$

(b) Qual è l'accelerazione iniziale del razzo?

SOLUZIONE

La spinta T del razzo è legata al modulo a della sua accelerazione dalla relazione $T = Ma$, in cui M è la massa del razzo. Tuttavia quest'ultima

diminuisce col consumarsi del propellente e quindi l'accelerazione simultaneamente cresce. Se desideriamo il valore iniziale di a , inseriamo il valore iniziale M_i della massa.

Calcoli. Troviamo

$$a = \frac{T}{M_i} = \frac{6440 \text{ N}}{850 \text{ kg}} = 7,6 \text{ m/s}^2.$$

Per staccarsi verticalmente dalla superficie terrestre un razzo deve avere un'accelerazione iniziale maggiore di $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Deve cioè vincere l'accelerazione di gravità alla superficie. La spinta iniziale dev'essere dunque maggiore del peso iniziale del razzo, che è $M_i g$ e vale

$$(850 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2) = 8330 \text{ N}.$$

Dato che nel nostro caso T vale circa 6400 N , il requisito non è soddisfatto e il lancio verticale non può avvenire se non con un motore più potente.