



# Equilibrio ed elasticità

## 12.1 EQUILIBRIO

### Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di...

**12.01** Distinguere l'equilibrio statico dagli altri stati di equilibrio.

**12.02** Specificare le quattro condizioni necessarie per l'equilibrio statico.

**12.03** Spiegare il significato di baricentro e il suo legame col centro di massa.

**12.04** Calcolare le coordinate del baricentro e del centro di massa per un dato sistema di particelle.

### Idee chiave

- Un corpo rigido a riposo si trova in equilibrio statico. In tal caso la somma vettoriale delle forze esterne che agiscono su di esso è nulla:

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = 0 \quad (\text{equilibrio delle forze}).$$

Quando le forze giacciono sul piano  $xy$  questa equazione vettoriale si può esprimere mediante le equazioni per le due componenti

$$F_{\text{net},x} = 0 \quad \text{e} \quad F_{\text{net},y} = 0 \quad (\text{equilibrio delle forze}).$$

- L'equilibrio statico richiede anche che sia nulla la risultante dei momenti torcenti esterni esercitati sul corpo rispetto a *qualunque* punto, ovvero

$$\tau_{\text{net}} = 0 \quad (\text{equilibrio dei momenti torcenti}).$$

Quando le forze giacciono tutte sul piano  $xy$  i loro momenti torcenti sono sempre paralleli all'asse  $z$  e l'equazione del loro bilancio si può esprimere mediante le equazioni per la componente

$$\tau_{\text{net},z} = 0 \quad (\text{equilibrio dei momenti torcenti}).$$

- La forza di gravità agisce su ogni elemento di un corpo esteso. L'effetto complessivo di tutti i contributi si assimila a una forza di gravità totale equivalente  $\mathbf{F}_g$  applicata al baricentro del corpo. Se l'accelerazione di gravità  $\mathbf{g}$  è uguale per tutti gli elementi del corpo, il baricentro coincide col suo centro di massa.

## L'aspetto fisico

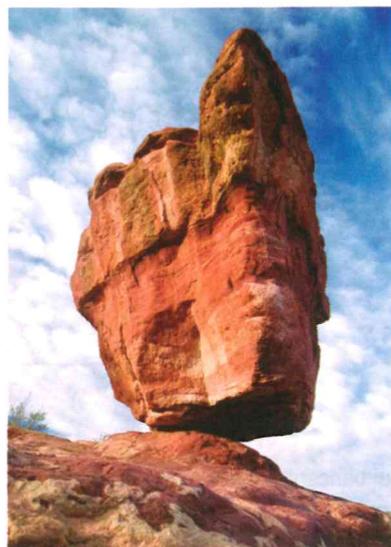
In generale, si suppone che le opere costruite dall'uomo siano stabili, malgrado su di esse agiscano molte forze. Un edificio, ad esempio, deve reggersi a dispetto della forza di gravità e dei venti che lo investono; un ponte deve resistere, oltre che alla gravità, anche al continuo logorio che gli infliggono i veicoli che vi transitano.

La fisica pone attenzione alle condizioni che permettono a un oggetto di rimanere stabile anche quando è sottoposto a più forze. Esamineremo in questo capitolo i due aspetti più importanti che influiscono sulla stabilità: l'*equilibrio* delle forze e dei loro momenti che agiscono su un corpo rigido, e l'*elasticità* dei corpi non perfettamente rigidi, la proprietà che regola il modo in cui tali corpi possono deformarsi. Questi principi, applicati bene, sono il tema di innumerevoli articoli sulle riviste di fisica e ingegneria. I medesimi principi, applicati male, sono l'argomento di innumerevoli articoli sui giornali e sui periodici giuridici.

## Equilibrio

Consideriamo questi oggetti: (1) un libro appoggiato sul tavolo, (2) un disco da hockey che scivola sul ghiaccio a velocità costante, (3) le pale rotanti di un ventilatore da soffitto e (4) la ruota di una bicicletta che sta viaggiando su un rettilineo a velocità costante. Per ciascuno di questi oggetti:

- La quantità di moto  $\mathbf{P}$  del centro di massa è costante.
- Il momento angolare  $\mathbf{L}$  rispetto al proprio centro di massa, o rispetto a qualsiasi altro punto di riferimento, è costante.



Kanwarjit Singh Boparai/Shutterstock

**Figura 12.1** Una roccia in bilico. Anche se il suo appoggio può sembrare precario, la roccia è in equilibrio statico.

Possiamo dire che questi oggetti sono in **equilibrio**. I due requisiti per l'equilibrio sono infatti:

$$P = \text{costante} \quad \text{e} \quad L = \text{costante}. \quad (12.1)$$

In questo capitolo ci occuperemo soltanto di situazioni particolari, in cui entrambe le costanti dell'equazione 12.1 sono uguali a zero. Ciò significa che tratteremo soltanto casi di oggetti che non si muovono in alcun modo, né con traslazione, né con rotazione, rispetto al sistema di riferimento dal quale li osserviamo; oggetti, cioè, che sono in **equilibrio statico**. Dei quattro esempi citati all'inizio di questo paragrafo, soltanto uno, il libro appoggiato sul tavolo, è in equilibrio statico.

La roccia in bilico della figura 12.1 è un altro esempio di oggetto che, almeno per ora, è in equilibrio statico. Ha in comune questa proprietà con un'infinità di altre strutture, come cattedrali, case, armadi e cabine telefoniche, che rimangono ferme per lungo tempo.

Come già abbiamo visto nel paragrafo 8.3, se un corpo ritorna spontaneamente allo stato di equilibrio statico dopo esserne stato spostato da una forza, si dice che è in **equilibrio statico stabile**: un esempio è dato dalla biglia posta sul fondo di un recipiente emisferico. Se invece una piccola forza è in grado di spostarlo e interrompere il suo stato di equilibrio, il corpo è in **equilibrio statico instabile**.

Supponete per esempio di porre in equilibrio una tessera del domino come nella figura 12.2a, disposta con il centro di massa situato verticalmente al di sopra di uno spigolo di appoggio. Il momento torcente rispetto al punto di appoggio dovuto alla forza di gravità  $F_g$  agente sulla tessera è nullo, giacché la direzione della forza passa per quel punto.

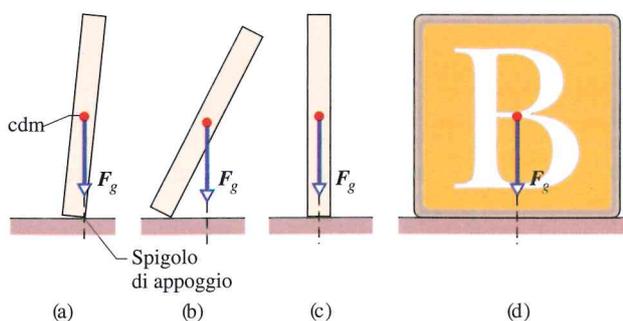
La tessera quindi si trova in equilibrio. Ma è ovvio che anche un'infinitesima forza di disturbo dovuta a fattori casuali rompe l'equilibrio: non appena la linea di azione della forza peso si discosta dall'uno o dall'altro lato rispetto allo spigolo d'appoggio, il suo momento, non più nullo, induce una rotazione della tessera (fig. 12.2b). Per questo si dice che la tessera della figura 12.2a è in equilibrio instabile.

La tessera di figura 12.2c invece non è altrettanto instabile. Per farla cadere, una forza dovrebbe intervenire a ruotarla fino a portarla nella posizione instabile di figura 12.2a e oltre. Quindi se questa forza non ha intensità sufficiente, non rovescia la tessera, ma un colpo un po' più vigoroso col dito certamente la farebbe cadere. (Disponendo molte tessere di domino a catena una a fianco all'altra, questo stesso colpetto provocherebbe il crollo di tutta la catena.)

**Il cubo.** Il cubo giocattolo di figura 12.2d è ancora più stabile perché il suo centro di massa deve subire uno spostamento molto più consistente per raggiungere e superare la posizione di equilibrio dell'appoggio su spigolo. (Questo è il motivo per cui non avete esperienza di una catena di cubi che crolla!) Il carpentiere di figura 12.3 è in una condizione simile sia alla tessera di domino sia al cubo giocattolo: se si dispone col busto trasversale rispetto alla trave, la sua stabilità ne guadagna, rispetto a un orientamento più longitudinale, che lo lascerebbe maggiormente alla mercé di un improvviso colpo di vento.

L'analisi dell'equilibrio statico è molto importante nella pratica dell'ingegneria. Il progettista deve individuare e valutare tutte le forze e i momenti torcenti che agiscono dall'esterno su una struttura e adottare, nel dimensionamento e nella scelta dei materiali, soluzioni adatte a garantire che la struttura possa sopportare quelle sollecitazioni con un buon margine di sicurezza. Questo tipo di analisi deve accertare, ad esempio, che un ponte resista a tutti i carichi dovuti al traffico e al vento, e che il carrello di atterraggio di un aereo sopporti senza danno l'ingiuria di un atterraggio fuori pista.

Per ribaltare la tessera il centro di massa deve sporgere rispetto allo spigolo d'appoggio



**Figura 12.2** (a) Una tessera di domino in equilibrio su un suo spigolo ha il centro di massa verticalmente al di sopra dell'appoggio. La direzione della forza gravitazionale  $F_g$  passa per il punto d'appoggio. (b) Se la tessera ruota anche di pochissimo dalla posizione di equilibrio, la forza di gravità esercita un momento che amplifica la rotazione. (c) La tessera sta in piedi su una faccia stretta ed è in qualche modo più stabile che nel primo caso. (d) Un cubo giocattolo è ancora più stabile.

## Le condizioni per l'equilibrio

Il moto di traslazione di un corpo è governato dalla seconda legge di Newton nella sua forma lineare, così espressa nell'equazione 9.27:

$$F_{\text{net}} = \frac{dP}{dt} \quad (12.2)$$

Se il corpo è in equilibrio di traslazione, ossia se  $P$  è costante, è  $dP/dt = 0$ , e perciò

$$F_{\text{net}} = 0 \quad (\text{equilibrio delle forze}). \quad (12.3)$$

Il moto rotatorio di un corpo è governato ancora dalla seconda legge di Newton, ma nella sua forma angolare data dalla (11.29):

$$\tau_{\text{net}} = \frac{dL}{dt} \quad (12.4)$$

Se il corpo è in equilibrio rotatorio, ossia  $L$  è costante, è  $dL/dt = 0$ , e perciò

$$\tau_{\text{net}} = 0 \quad (\text{equilibrio dei momenti torcenti}). \quad (12.5)$$

Le due condizioni necessarie affinché un corpo sia in equilibrio sono dunque:

1. La somma vettoriale di tutte le forze esterne che agiscono sul corpo deve essere nulla.
2. La somma vettoriale di tutti i momenti torcenti esterni che agiscono sul corpo, rispetto a *qualsiasi* punto possibile, deve essere nulla.

Questi requisiti sono ovviamente validi non soltanto per l'equilibrio *statico*, ma per i casi più generali di equilibrio in cui  $P$  ed  $L$  sono costanti ma differenti da zero.

Le equazioni 12.3 e 12.5, essendo equazioni vettoriali, sono equivalenti ciascuna a tre equazioni scalari fra loro indipendenti, una per ciascuna direzione degli assi coordinati:

Equilibrio delle forze	Equilibrio dei momenti torcenti	
$F_{\text{net},x} = 0$	$\tau_{\text{net},x} = 0$	
$F_{\text{net},y} = 0$	$\tau_{\text{net},y} = 0$	(12.6)
$F_{\text{net},z} = 0$	$\tau_{\text{net},z} = 0$	

**Le equazioni base.** Al fine di semplificare la trattazione considereremo soltanto situazioni in cui le forze agenti sul corpo appartengono al piano  $xy$ . Ciò significa che gli unici momenti di forze che agiscono sul corpo tenderanno a provocare rotazioni intorno ad assi paralleli all'asse  $z$ . Questo presupposto ci consente di eliminare tre delle equazioni 12.6, una per le forze e due per i momenti, lasciando soltanto le seguenti:

$$F_{\text{net},x} = 0 \quad (\text{equilibrio delle forze}), \quad (12.7)$$

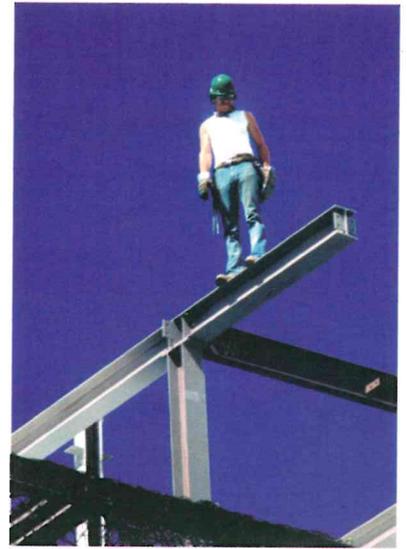
$$F_{\text{net},y} = 0 \quad (\text{equilibrio delle forze}), \quad (12.8)$$

$$\tau_{\text{net},z} = 0 \quad (\text{equilibrio dei momenti torcenti}). \quad (12.9)$$

Qui  $\tau_z$  rappresenta il momento che queste forze esercitano rispetto all'asse  $z$ , o rispetto a *qualsiasi* asse parallelo all'asse  $z$ .

Il disco che scivola sul ghiaccio a velocità costante soddisfa le equazioni 12.7, 12.8 e 12.9 ed è quindi in equilibrio, *ma non in equilibrio statico*. Per essere in equilibrio statico, il disco deve avere quantità di moto  $P$  non soltanto costante, ma in particolare uguale a zero: deve essere fermo sul ghiaccio. Abbiamo quindi un terzo requisito necessario all'equilibrio statico:

3. La quantità di moto  $P$  del corpo deve essere nulla.



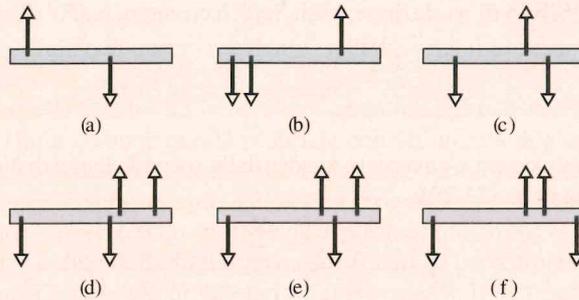
Robert-Brenner/PhotoEdit

**Figura 12.3** Un carpentiere è in equilibrio statico tanto più stabile quanto più il suo busto è ruotato trasversalmente alla trave.

(c), (e), (f)

**✓ VERIFICA 1**

La figura che segue presenta sei configurazioni diverse di una barra omogenea vista dall'alto su cui agiscono due o più forze normali (la lunghezza dei vettori è arbitraria). Assegnando opportunamente i moduli delle forze (escluso il valore zero), in quali situazioni la barra può trovarsi in equilibrio statico?



**Centro di gravità**

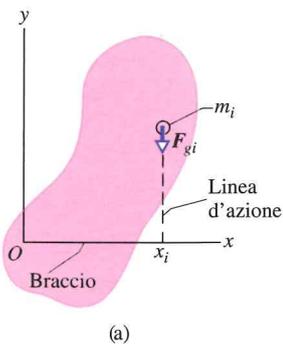
La forza di gravità che agisce su un corpo esteso è il vettore somma delle forze gravitazionali che agiscono sui suoi elementi costitutivi (gli atomi). Anziché considerare tutti questi elementi possiamo dire che:

- Una singola forza di gravità  $F_g$  agisce in modo rappresentativo su un singolo punto del corpo detto **centro di gravità** o **baricentro** (bc) del corpo.

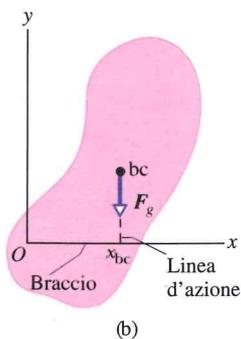
Dicendo "in modo rappresentativo" vogliamo dire che, se per ipotesi tutte le forze di gravità agenti sui singoli elementi venissero in qualche modo a mancare e venissero simultaneamente sostituite da una forza di gravità  $F_g$  applicata al baricentro, la forza netta e il suo momento torcente netto (rispetto a qualsiasi punto) non cambierebbero.

Finora non abbiamo esitato a individuare questo unico vettore  $F_g$  e ad applicare questo vettore al centro di massa (cdm) del corpo, che equivale a supporre che il baricentro sia situato nel centro di massa. Ricordiamo che, per un corpo di massa  $M$ , la forza di gravità è uguale a  $Mg$ , ove  $g$  è il vettore accelerazione che questa forza imprime. Vogliamo ora dimostrare che:

- Se il vettore  $g$ , l'accelerazione di gravità, presenta lo stesso valore di intensità e direzione per tutti i punti dello spazio occupati dal corpo, allora il baricentro del corpo coincide col suo centro di massa.



(a)



(b)

**Figura 12.4** (a) Un elemento di massa  $m_i$  in un corpo esteso è sottoposto alla forza di gravità  $F_{gi}$ , con braccio  $x_i$  rispetto all'origine  $O$  del sistema di coordinate. (b) La forza di gravità  $F_g$  del corpo è applicata al suo baricentro (bc). Il suo braccio rispetto a  $O$  è  $x_{bc}$ .

Per gli oggetti comuni questo è sempre approssimativamente vero, perché  $g$  non cambia che di pochissimo spostandosi da un punto all'altro in prossimità della superficie terrestre, e anche variando l'altitudine il suo modulo decresce molto lentamente. Quindi per qualsiasi corpo ordinario, come uno scoiattolo o una casa, siamo pienamente autorizzati ad affermare che la forza di gravità agisce sul centro di massa. Dopo la dimostrazione che ci prefiggevamo, torneremo su questo argomento.

**Dimostrazione**

Fissiamo l'attenzione dapprima sui singoli elementi di massa del corpo. Si consideri un corpo esteso di forma arbitraria, con massa  $M$  e uno dei suoi elementi con massa  $m_i$ , come rappresentato nella figura 12.4a. Ciascuno degli elementi subisce la forza gravitazionale  $F_{gi}$ , pari a  $m_i g_i$ , ove  $g_i$  è l'accelerazione dovuta alla gravità nella *posizione dell'elemento* (per gli altri elementi potrebbe avere un altro valore).

Nella figura 12.4a ciascuna forza  $F_{gi}$  produce un momento torcente di modulo  $\tau_i$  sull'elemento rispetto all'origine  $O$ , con braccio  $x_i$ . Tramite l'equazione 10.34 ( $\tau = r_{\perp} F$ ) possiamo scrivere genericamente questo momento come

$$\tau_i = x_i F_{gi} \tag{12.10}$$

Il momento torcente complessivo netto riferito a tutti gli elementi del corpo è allora

$$\tau_{\text{net}} = \sum \tau_i = \sum x_i F_{gi}. \quad (12.11)$$

Veniamo ora al corpo intero. La figura 12.4b indica la forza  $F_g$  che agisce nel baricentro. Dalla (10.34) il momento di questa forza rispetto a  $O$  è

$$\tau = x_{\text{bc}} F_g, \quad (12.12)$$

dove  $x_{\text{bc}}$  è il braccio di  $F_g$ . La forza di gravità complessiva sul corpo  $F_g$  è pari alla somma di tutte le forze  $F_{gi}$  dei suoi elementi. Possiamo quindi sostituirla nell'equazione 12.12:

$$\tau = x_{\text{bc}} \sum F_{gi}. \quad (12.13)$$

Per definizione il momento torcente di gravità che agisce nel baricentro è uguale al momento torcente di gravità complessivo netto di tutti gli elementi del corpo (per come abbiamo definito il baricentro). Sicché  $\tau$  dell'equazione 12.13 è uguale a  $\tau_{\text{net}}$  dell'equazione 12.11, e possiamo scrivere

$$x_{\text{bc}} \sum F_{gi} = \sum x_i F_{gi}.$$

Sostituendo  $m_i g_i$  a  $F_{gi}$  si ottiene

$$x_{\text{bc}} \sum m_i g_i = \sum x_i m_i g_i. \quad (12.14)$$

Ecco ora il passaggio chiave: se i valori di  $g_i$  sono tutti uguali per tutti gli elementi, li possiamo eliminare da entrambi i membri dell'equazione 12.14:

$$x_{\text{bc}} \sum m_i = \sum x_i m_i. \quad (12.15)$$

Sostituendo la massa totale  $M$  alla somma delle masse elementari e risistemando, si ottiene

$$x_{\text{bc}} = \frac{1}{M} \sum x_i m_i. \quad (12.16)$$

Dalla (9.4) si riconosce che il termine a destra è proprio la coordinata del centro di massa  $x_{\text{cdm}}$ , come volevamo dimostrare. Se quindi l'accelerazione di gravità è identica per tutti gli elementi del corpo, le coordinate del centro di massa coincidono con quelle del baricentro:

$$x_{\text{bc}} = x_{\text{cdm}}. \quad (12.17)$$

## 12.2 ALCUNI ESEMPI DI EQUILIBRIO STATICO

### Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di...

**12.05** Applicare le condizioni per la forza e per il momento torcente all'equilibrio statico.

**12.06** Capire che una scelta accorta del punto di origine, rispetto al quale calcolare i momenti torcenti, può semplificare i calcoli eliminando una o più forze incognite nell'equazione del momento torcente.

### Idee chiave

- Un corpo rigido a riposo si trova in equilibrio statico. In tal caso la somma vettoriale delle forze esterne che agiscono su di esso è nulla:

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = 0 \quad (\text{equilibrio delle forze}).$$

Quando le forze giacciono sul piano  $xy$  questa equazione vettoriale si può esprimere mediante le equazioni per le due componenti

$$F_{\text{net},x} = 0 \quad \text{e} \quad F_{\text{net},y} = 0 \quad (\text{equilibrio delle forze}).$$

- L'equilibrio statico richiede anche che sia nulla la risultante dei momenti torcenti esterni esercitati sul corpo rispetto a *qualunque* punto, ovvero

$$\tau_{\text{net}} = 0 \quad (\text{equilibrio dei momenti torcenti}).$$

Quando le forze giacciono tutte sul piano  $xy$  i loro momenti torcenti sono sempre paralleli all'asse  $z$  e l'equazione del loro bilancio si può esprimere mediante le equazioni per la componente

$$\tau_{\text{net},z} = 0 \quad (\text{equilibrio dei momenti torcenti}).$$

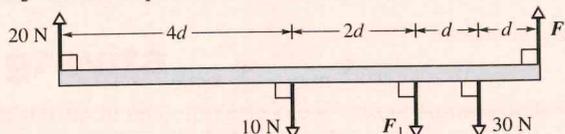
## Alcuni esempi di equilibrio statico

Sviluppiamo ora la risoluzione di alcuni problemi riguardanti l'equilibrio statico. In ognuno scegliamo un sistema formato da uno o più oggetti e applichiamo le equazioni dell'equilibrio 12.7, 12.8 e 12.9. Le forze che intervengono sono tutte contenute nel piano  $xy$ ; ciò implica che i vettori dei momenti corrispondenti sono paralleli all'asse  $z$ . Nell'applicare la (12.9) per l'equilibrio dei momenti torcenti, questi sono calcolati rispetto a un asse parallelo all'asse  $z$ . E anche se è vero che l'equazione 12.9 deve essere verificata per *qualsiasi* sistema di assi, vedremo come certe scelte ne semplifichino l'utilizzo eliminando una o più incognite.

(a) no  
(b) parallelo a  $F_1$   
(c) 45 N

### ✓ VERIFICA 2

La figura fornisce una vista dall'alto di una barra omogenea in equilibrio statico. (a) Si possono trovare i moduli delle forze incognite  $F_1$  e  $F_2$  bilanciando le forze? (b) Se volesse trovare il modulo della forza  $F_2$  usando l'equazione di bilancio dei momenti torcenti, come dovrete scegliere la posizione dell'asse di rotazione per eliminare  $F_1$  dall'espressione? (c) Se il modulo di  $F_2$  vale 65 N, qual è il modulo di  $F_1$ ?



## PROBLEMA SVOLTO 12.1 Equilibrio di una trave orizzontale

Una trave omogenea di lunghezza  $L$  e massa  $m = 1,8$  kg è appoggiata agli estremi di due bilance a lettura digitale, come nella figura 12.5a. Un blocco omogeneo di massa  $M = 2,7$  kg è appoggiato sulla trave, col centro a una distanza  $L/4$  dall'estremità sinistra della trave. Quali sono le letture delle due bilance?

### SOLUZIONE

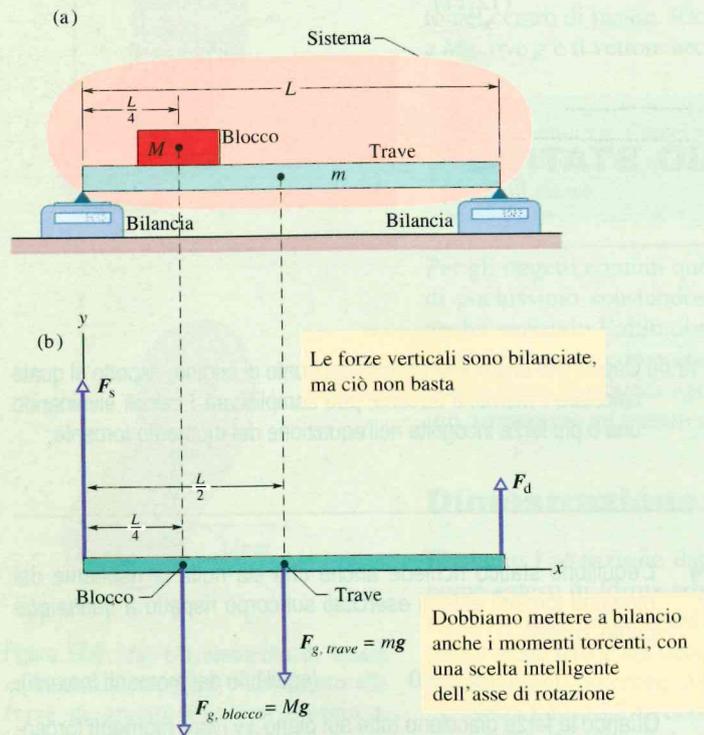
In *tutti* i problemi di equilibrio statico si richiedono queste prime considerazioni. Si definisca chiaramente il sistema da analizzare e si disegni un diagramma delle forze, indicando tutte le forze che agiscono sul sistema. Nel nostro caso scegliamo come sistema l'insieme della trave e del blocco. La figura 12.5b è un diagramma delle forze agenti sul sistema. (La scelta del sistema da considerare richiede esperienza e spesso abbiamo a disposizione più di una scelta soddisfacente.) Dato che il sistema è in equilibrio statico, possiamo applicare le equazioni di bilancio delle forze (12.7 e 12.8) nonché quella di bilancio dei momenti torcenti (12.9).

Le bilance spingono verso l'alto le estremità della trave con le due forze  $F_s$  e  $F_d$ , le cui intensità sono appunto le letture delle bilance che dobbiamo trovare. La forza di gravità sulla trave,  $F_{g, trave}$ , agisce al centro di massa della trave ed è pari a  $mg$ . E analogamente  $Mg$  è l'espressione della forza di gravità sul blocco,  $F_{g, blocco}$ , applicata al suo centro di massa. Nella figura 12.5b il blocco è rappresentato da un puntino all'interno della zona che rappresenta la trave, e il vettore  $Mg$  è applicato a quel punto. (Nel ridisegnare la figura 12.5b dalla 12.5a, il vettore  $Mg$  è stato fatto scorrere lungo la sua linea d'azione nella direzione verso cui è rivolto, ciò non fa variare né  $Mg$  né il momento prodotto da  $Mg$  rispetto a qualsiasi asse perpendicolare alla figura.)

Il sistema è in equilibrio statico: *idea chiave* è quindi applicare le equazioni dell'equilibrio delle forze 12.7 e 12.8 e dei loro momenti (eq. 12.9). Le forze hanno componenti nulle secondo  $x$ , e pertanto la (12.7) non fornisce alcuna informazione utile. La (12.8) dà, per le componenti secondo  $y$ ,

$$F_s + F_d - Mg - mg = 0. \quad (12.18)$$

Abbiamo due forze incognite ( $F_s$  ed  $F_d$ ), ma non possiamo ricavarne il valore separatamente perché disponiamo di una sola equazione fra le forze. Ricorriamo dunque alla (12.9), che riguarda l'equilibrio dei momenti torcenti, applicabile a *qualsiasi* asse perpendicolare al piano



**Figura 12.5** Problema svolto 12.1. (a) Una trave di massa  $m$  regge un blocco di massa  $M$ . (b) Un diagramma delle forze che agiscono sul sistema *trave + blocco*.

della figura 12.5. Scegliamo un asse passante per l'estremo sinistro della trave. Quanto al segno dei momenti utilizziamo la regola già vista: consideriamo positivi i momenti che, se agissero da soli, imprimerebbero alla trave una rotazione in senso antiorario rispetto a quest'asse. Stabiliamo infine di scrivere i momenti nella forma che contiene il prodotto del braccio per la forza, sapendo che il braccio vale 0 per  $F_s$ ,  $L$  per  $F_d$ ,  $L/4$  per  $Mg$  e  $L/2$  per  $mg$ . Dalla (12.9) ricaviamo il bilancio dei momenti:

$$(F_s)(0) + (F_d)(L) - (mg)(L/2) - (Mg)(L/4) = 0,$$

da cui

$$\begin{aligned} F_d &= (g/4)(2m + M) = \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)(9,8 \text{ m/s}^2)(2 \cdot 1,8 \text{ kg} + 2,7 \text{ kg}) \approx 15 \text{ N}. \end{aligned}$$

Se risolviamo la (12.18) rispetto a  $F_s$ , sostituendo i valori noti si ottiene

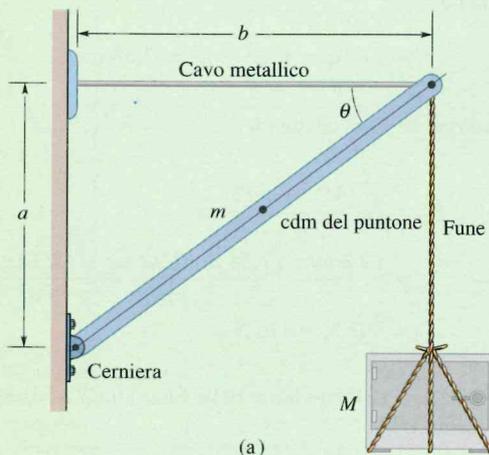
$$F_s = (M + m)g - F_d = (2,7 \text{ kg} + 1,8 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2) - 15 \text{ N} = 29 \text{ N}.$$

**Attenzione alla strategia risolutiva.** Quando abbiamo scritto l'equazione di equilibrio per le componenti delle forze, ci siamo trovati di fronte a un'equazione con due incognite. Se avessimo scritto un'equazione per l'equilibrio dei momenti torcenti attorno a un asse *qualunque*, avremmo ancora trovato un'equazione nelle medesime due incognite ottenendo un sistema di due equazioni con due incognite più complicate da determinare. Abbiamo superato l'ostacolo grazie alla scelta di un asse che passa attraverso il punto di applicazione di una delle forze incognite,  $F_s$ , consentendo di eliminarla dalla (12.9) e di risolvere l'equazione direttamente per l'altra forza. Alla fine siamo tornati all'equazione di equilibrio delle forze componenti per trovare l'incognita rimasta.

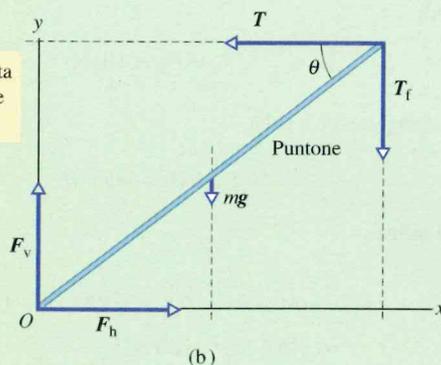
## PROBLEMA SVOLTO 12.2 Equilibrio di un braccio meccanico sporgente

Una cassaforte, avente massa  $M = 430 \text{ kg}$ , è sospesa a una fune fissata all'estremità della struttura rappresentata nella figura 12.6a, avente dimensioni  $a = 1,9 \text{ m}$  e  $b = 2,5 \text{ m}$ , formata da un puntone omogeneo, di massa  $m = 85 \text{ kg}$ , incernierato in  $O$  a una parete verticale e tenuto in posizione inclinata da un cavo d'acciaio orizzontale di massa trascurabile.

(a) Trovate la tensione  $T$  nel cavo.



Questa è una scelta avveduta dell'asse di rotazione



**Figura 12.6** Problema svolto 12.2. (a) Una pesante cassaforte è appesa a una struttura formata da un braccio omogeneo inclinato trattenuto da un cavo d'acciaio orizzontale. (b) Un diagramma delle forze per il solo puntone.

### SOLUZIONE

Il sistema in questo caso è costituito dal solo puntone, e la figura 12.6b è un diagramma delle forze che agiscono su di esso. Esse sono la forza di gravità propria del puntone  $mg$ , agente sul suo baricentro, la forza di tensione  $T$  esercitata dal cavo, le componenti orizzontale  $F_h$  e verticale  $F_v$  della forza esercitata dalla cerniera fissata al muro e infine la tensione della fune  $T_f$  che regge la cassaforte. Dato che quest'ultima è ferma,  $T_f$  equivale a  $Mg$ . Collochiamo l'origine  $O$  delle coordinate  $xy$  in corrispondenza della cerniera.

Siccome il sistema è in equilibrio statico, si applicano le equazioni di bilancio.

Cominciamo con la (12.9) per i momenti torcenti. Dato che ci viene richiesta la tensione  $T$  e non le forze agenti sulla cerniera, che agiscono nell'origine, è una buona *idea chiave* eliminare dal numero delle incognite queste ultime, scegliendo l'asse di rotazione passante per  $O$  e perpendicolare al piano della figura: i bracci di  $F_h$  e  $F_v$  sono così nulli. Nella figura 12.6b sono disegnate tratteggiate le linee d'azione di  $T$ ,  $T_f$  e  $mg$ : i loro bracci valgono rispettivamente  $a$ ,  $b$  e  $b/2$ . Considerando positivi i momenti che tendono a provocare rotazioni antiorarie, possiamo scrivere il bilancio dei momenti come

$$(a)(T) - (b)(T_f) - (b/2)(mg) = 0. \quad (12.19)$$

Risolvendo l'equazione rispetto a  $T$ , e sostituendo  $Mg$  al posto di  $T_f$ , si ottiene

$$\begin{aligned} T &= \frac{gb(M + \frac{1}{2}m)}{a} = \\ &= \frac{(9,8 \text{ m/s}^2)(2,5 \text{ m})(430 \text{ kg} + 85/2 \text{ kg})}{1,9 \text{ m}} = \\ &= 6093 \text{ N} \approx 6100 \text{ N}. \end{aligned}$$

(b) Trovate l'intensità della forza  $F$  netta esercitata sul puntone dalla cerniera.

### SOLUZIONE

Ci occorrono le componenti  $F_h$  e  $F_v$  in modo da combinarle per ottenere  $F$ . Conoscendo  $T$  possiamo applicare le equazioni di bilancio delle forze al puntone.

**Calcoli.** Per il bilancio orizzontale riscriviamo  $F_{\text{net},x} = 0$  come

$$F_h - T = 0. \quad (12.20)$$

da cui

$$F_h = T = 6093 \text{ N.}$$

Per la componente verticale, dalla (12.8) scriviamo

$$F_v - mg - Mg = 0.$$

Risolviendo rispetto a  $F_v$  si ottiene

$$F_v = g(m + M) = (9,8 \text{ m/s}^2)(85 \text{ kg} + 430 \text{ kg}) = 5047 \text{ N.}$$

Con il teorema di Pitagora troviamo infine

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_h^2 + F_v^2} = \\ &= \sqrt{(6093 \text{ N})^2 + (5047 \text{ N})^2} \approx 7900 \text{ N.} \end{aligned}$$

Si noti che  $F$  è decisamente maggiore sia della somma dei pesi della cassaforte e del puntone, 5000 N, sia della tensione nel cavo orizzontale, 6100 N.

## PROBLEMA SVOLTO 12.3 Equilibrio di una scala appoggiata

Nella figura 12.7a vediamo una scala da pompieri di lunghezza  $L = 12 \text{ m}$  e massa  $m = 45 \text{ kg}$  appoggiata con l'estremità superiore a un muro (privo d'attrito), a un'altezza dal suolo  $h = 9,3 \text{ m}$ . Il suo centro di massa si trova a un terzo della sua lunghezza. Un vigile del fuoco con massa  $M = 72 \text{ kg}$  si arrampica per la scala fino a che il suo centro di massa si trova a metà della scala. Quali forze, in modulo, esercitano sulla scala il muro e il terreno?

### SOLUZIONE

Dapprima scegliamo come sistema quello formato dal pompiere e dalla scala; poi tracciamo come in figura 12.7b un diagramma delle forze del sistema *pompieri + scala*. Poiché il sistema è in equilibrio statico si possono applicare le equazioni di bilancio sia delle forze sia dei momenti torcenti (eq. 12.7, 12.8 e 12.9). Il pompiere è rappresentato da un puntino all'interno della zona che corrisponde alla scala, e il vettore  $Mg$ , ossia la forza gravitazionale esercitata sul pompiere, è applicato in quel punto. (Nel ridisegnare la figura 12.7b dalla 12.7a, il vettore  $Mg$  è stato fatto scorrere lungo la sua linea d'azione in modo concorde con il suo verso, cioè non fa variare né  $Mg$  né il momento torcente prodotto da  $Mg$  rispetto a qualsiasi asse perpendicolare alla figura.)

Il muro esercita sulla scala una forza orizzontale  $F_m$ ; non può esercitare alcuna forza verticale perché si è ammesso che il contatto fra muro e scala sia privo di attrito. Il terreno esercita sulla scala una forza  $F_t$  avente una componente orizzontale  $F_{tx}$ , dovuta all'attrito, e una verticale  $F_{ty}$ , uguale alla forza normale.

Nell'applicare le equazioni di bilancio cominciamo con quella dei momenti torcenti (eq. 12.9). Per scegliere l'asse attorno a cui calcolare i momenti torcenti osserviamo che due sono le forze incognite ( $F_m$  e  $F_t$ ), applicate alle due estremità della scala. Per poterle eliminare una, diciamo  $F_t$ , scegliamo l'asse in corrispondenza del punto  $O$  e perpendicolare al piano della figura. Scegliamo inoltre gli assi coordinati come risulta dalla figura, con l'origine in  $O$ . Possiamo trovare i momenti torcenti utilizzando una qualsiasi delle equazioni da 10.32 a 10.34. Quest'ultima è la più conveniente in questo caso.

*Una scelta ragionata dell'origine rende il calcolo dei momenti torcenti molto più facile.*

Per conoscere il braccio  $r_{\perp}$  della forza orizzontale  $F_m$  tracciamo la linea d'azione del vettore (linea tratteggiata in figura 12.7c). Il braccio è la distanza di questa linea dall'origine. Dalla figura 12.7c vediamo che è parallela all'asse  $y$  ed è pari all'altezza  $h$ . In modo simile troviamo i bracci di  $Mg$  e  $mg$  lungo l'asse  $x$ . Essi valgono,

fissata in figura 12.7a la distanza  $a$  dal muro al piede della scala, rispettivamente  $a/2$  e  $a/3$  (perché il pompiere è a metà altezza sulla scala e il centro di massa della scala si trova a un terzo della sua lunghezza). I bracci delle componenti di  $F_t$  sono nulli perché la forza è applicata nell'origine.

L'equazione di equilibrio dei momenti torcenti ( $\tau_{\text{net}, z} = 0$ , diventa dunque

$$-(F_m)(h) + (Mg)(a/2) + (mg)(a/3) = 0. \quad (12.21)$$

Col teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo di figura 12.7a calcoliamo

$$a = \sqrt{L^2 - h^2} = 7,58 \text{ m.}$$

L'equazione 12.21 ci dà quindi

$$\begin{aligned} F_m &= \frac{ga(M/2 + m/3)}{h} = \\ &= \frac{(9,8 \text{ m/s}^2)(7,58 \text{ m})(72/2 \text{ kg} + 45/3 \text{ kg})}{9,3 \text{ m}} = \\ &= 407 \text{ N} \approx 410 \text{ N.} \end{aligned}$$

Dalle equazioni dell'equilibrio delle forze (fig. 12.7d) otteniamo, per la componente  $x$

$$F_m - F_{tx} = 0,$$

e quindi

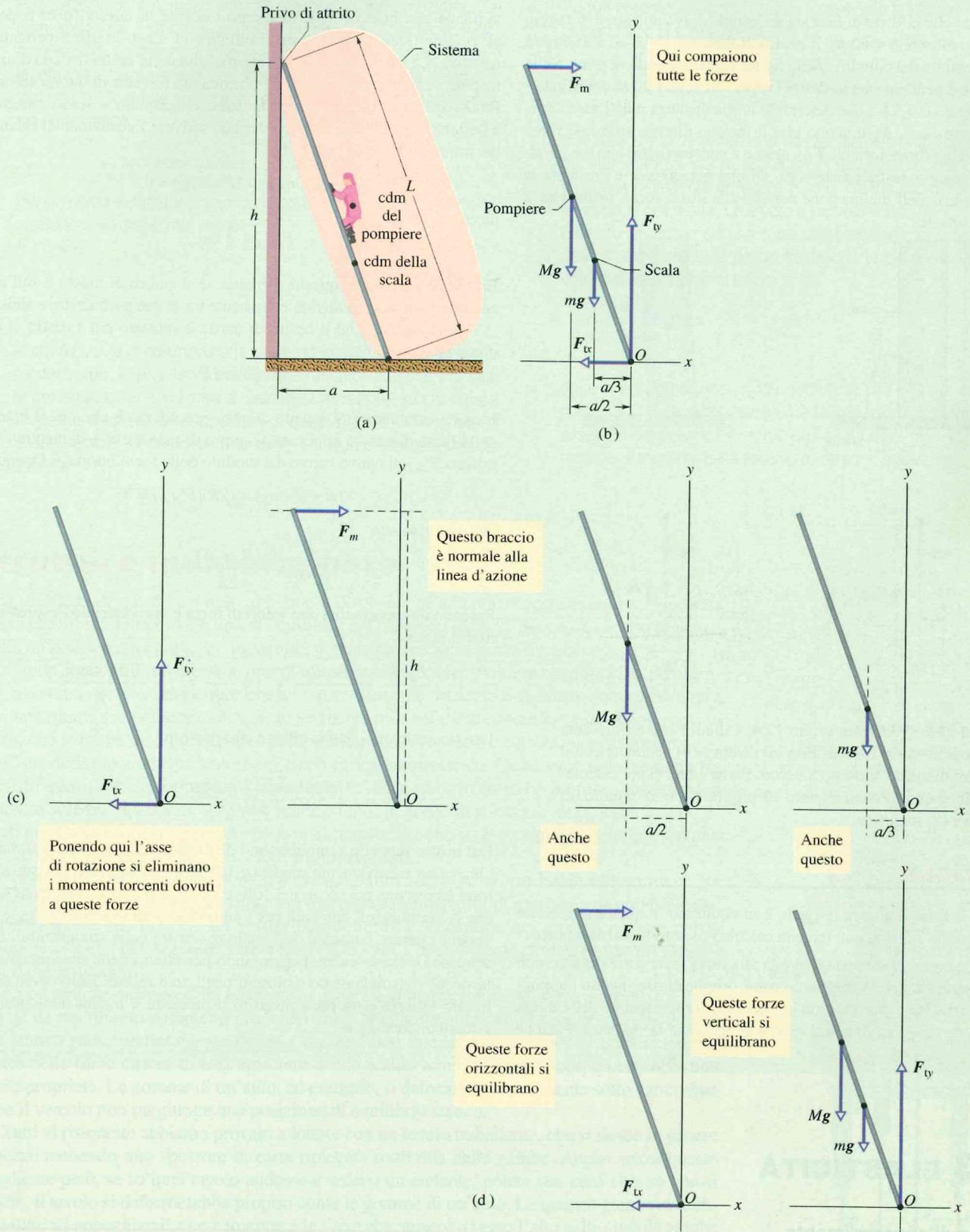
$$F_{tx} = F_m = 410 \text{ N.}$$

Per la componente  $y$  si ha

$$F_{ty} - Mg - mg = 0,$$

da cui infine

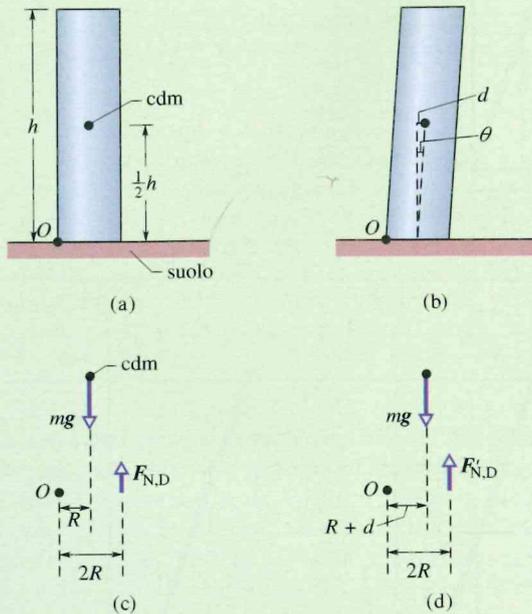
$$\begin{aligned} F_{ty} &= g(M + m) = (9,8 \text{ m/s}^2)(72 \text{ kg} + 45 \text{ kg}) = \\ &= 1146,6 \text{ N} \approx 1100 \text{ N.} \end{aligned}$$



**Figura 12.7** Problema svolto 12.3. (a) Un pompiere sale fino a metà di una scala appoggiata contro una parete priva di attrito. Il terreno invece non è privo di attrito. (b) Un diagramma che indica (in scala) le forze agenti sul sistema. L'origine  $O$  delle coordinate è scelto al punto di applicazione della forza incognita  $F_1$  (di cui sono segnate le componenti orizzontale e verticale). (c) Calcolo dei momenti torcenti. (d) Bilancio delle forze.

## PROBLEMA SVOLTO 12.4 Equilibrio della Torre Pendente di Pisa

Supponiamo che la Torre di Pisa sia un cilindro cavo uniforme di raggio  $R = 9,8$  m e altezza  $h = 60$  m. Il centro di massa si trova ad altezza  $h/2$  sull'asse centrale del cilindro. Nella figura 12.8a il cilindro è retto. Nella figura 12.8b è pendente verso destra (verso sud nella Piazza dei Miracoli) di un angolo  $\theta = 5,5^\circ$ , che determina la sua distanza  $d$  dall'asse verticale di centro base. Assumiamo che il terreno eserciti solo due forze sulla torre. Una forza normale  $F_{N,S}$  agisce a sinistra (parte nord) e un'altra,  $F_{N,D}$  agisce a destra (parte sud). Di che percentuale è cresciuta la seconda a causa dell'inclinazione rispetto alla stessa forza, prima che la torre si inclinasse?



**Figura 12.8** Problema svolto 12.4. Cilindro che rappresenta il modello della Torre di Pisa (a) diritta e (b) pendente con il centro di massa spostato a destra. Forze e bracci per calcolare i momenti torcenti rispetto all'origine O per il cilindro (c) retto e (d) inclinato.

### SOLUZIONE

Dato che la torre è ancora in piedi, è in equilibrio, e quindi dev'essere nulla la somma dei momenti torcenti calcolati rispetto a qualsiasi punto.

**Calcoli.** La nostra attenzione è rivolta alla forza sulla parte destra e non su quella sinistra; perciò scegliamo come origine di riferimento l'appoggio di sinistra. Per la torre diritta le forze sono rappresentate nella figura 12.8c. La forza  $mg$  applicata al centro di massa ha la sua retta d'azione

verticale con braccio  $R$ . Il momento torcente di questa forza rispetto all'origine tende a far ruotare il cilindro in senso orario e pertanto è negativo. La forza normale  $F_{N,D}$  relativa alla parte destra ha retta d'azione pure verticale con braccio  $2R$ . Il momento torcente di questa seconda forza rispetto all'origine tende a far ruotare il cilindro in senso antiorario e pertanto è positivo. Possiamo dunque scrivere l'equazione di bilancio dei momenti torcenti ( $\tau_{\text{net},z} = 0$ ):

$$-(R)(mg) + (2R)(F_{N,D}) = 0,$$

da cui si ricava

$$F_{N,D} = \frac{1}{2} mg.$$

Era facile indovinare questo risultato: se il centro di massa è sull'asse centrale, il peso si suddivide equamente tra le due parti destra e sinistra.

Nella figura 12.8d il centro di massa è spostato più a destra di una distanza

$$d = \frac{1}{2} h \tan \theta.$$

L'unico cambiamento rispetto al caso precedente è che ora il braccio della forza di gravità applicata al centro di massa è  $R + d$ , mentre chiamiamo  $F'_{N,D}$  il nuovo valore del modulo della forza normale. Dunque

$$-(R + d)(mg) + (2R)(F'_{N,D}) = 0,$$

che dà il risultato

$$F'_{N,D} = \frac{(R + d)}{2R} mg.$$

Facendo il rapporto tra i due valori di forza e introducendo l'espressione di  $d$  si ottiene

$$\frac{F'_{N,D}}{F_{N,D}} = \frac{R + d}{R} = 1 + \frac{d}{R} = 1 + \frac{0,5 h \tan \theta}{R}.$$

Introducendo ora i dati si giunge alla risposta:

$$\frac{F'_{N,D}}{F_{N,D}} = 1,29.$$

Dal nostro modello semplicissimo deduciamo che, a dispetto di un'inclinazione relativamente modesta, la forza normale sul lato sud della torre è cresciuta nei secoli del 30% circa. Il pericolo sta nell'eventualità che la struttura sul lato sud, per l'aumentato carico, ceda ed "esplosa" verso l'esterno. La causa dell'inclinazione sta nella comprimibilità del sottosuolo, che è andata peggiorando per effetto delle precipitazioni. I lavori di consolidamento realizzati negli anni recenti hanno però stabilizzato la torre e un poco invertito il processo d'inclinazione grazie a sistemi di drenaggio.

## 12.3 ELASTICITÀ

### Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di...

**12.07** Spiegare che cosa si intende per problema indeterminato.

**12.08** Applicare l'equazione che lega lo sforzo alla deformazione e il modulo di Young, sia per la tensione sia per la compressione.

**12.09** Distinguere tra carico di snervamento e carico di rottura.

**12.10** Applicare l'equazione che lega lo sforzo alla deformazione e il modulo di taglio per gli sforzi trasversali di scorrimento.

**12.11** Applicare l'equazione che lega lo sforzo alla deformazione e il modulo di comprimibilità per gli sforzi di compressione idraulica.

## Idee chiave

- Per descrivere il comportamento elastico, o deformazione, dei corpi sottoposti a sforzi, si usano tre *moduli* (coefficienti dimensionali) elastici. La deformazione (variazione relativa di lunghezza) è legata linearmente allo sforzo applicato (forza per unità di superficie) tramite il modulo appropriato secondo la legge generale deformazione-sforzo:

$$\text{sforzo} = \text{modulo} \cdot \text{deformazione}.$$

- Per un corpo in tensione o sotto compressione, la relazione deformazione-sforzo si scrive come

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L},$$

in cui  $\Delta L / L$  è la deformazione di allungamento o di compressione del corpo,  $F$  è l'intensità della forza  $F$  applicata che provoca la deformazione,  $A$  è l'area di sezione trasversale su cui agisce  $F$  (perpendicolare alla superficie di area  $A$ ) ed  $E$  è il modulo di Young relativo al corpo in questione. Lo sforzo è rappresentato da  $F/A$ .

- Per un corpo sottoposto a sforzo trasversale la relazione deformazione-sforzo si scrive come

$$\frac{F}{A} = G \frac{\Delta x}{L},$$

ove  $\Delta x / L$  è la deformazione trasversale subita dal corpo,  $\Delta x$  è lo spostamento (in valore assoluto) di un'estremità del corpo nella direzione della forza applicata  $F$ , e  $G$  è il modulo di taglio relativo al corpo in questione. Lo sforzo è rappresentato da  $F/A$ .

- Quando un corpo subisce una compressione idraulica a causa dello sforzo esercitato da un fluido che lo circonda, la relazione deformazione-sforzo si scrive come

$$p = B \frac{\Delta V}{V},$$

dove  $p$  è la pressione (sforzo idraulico) che il fluido esercita sul corpo,  $\Delta V/V$  (la deformazione) è la variazione relativa (in valore assoluto) del volume del corpo provocata dalla pressione, e  $B$  è il modulo di comprimibilità relativo al corpo in questione.

## Strutture indeterminate

Per i problemi di questo capitolo abbiamo a disposizione soltanto tre equazioni indipendenti: due di equilibrio delle forze e una di equilibrio dei momenti torcenti intorno a un asse prefissato. Se un problema ha più di tre incognite, non siamo perciò in grado di risolverlo.

Capita spesso di imbattersi in uno di questi problemi. Nel problema svolto 12.3, ad esempio, avremmo potuto ammettere che vi fosse attrito fra la scala e il muro. Avremmo avuto così una quarta forza incognita, agente verticalmente nel punto in cui la scala si appoggia al muro, che avrebbe reso indeterminato il problema con le sole tre equazioni a disposizione.

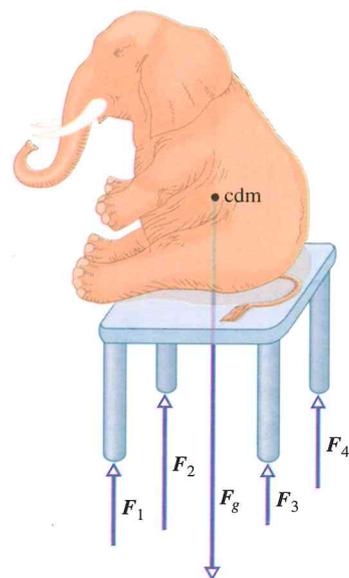
Consideriamo anche un'automobile con carico asimmetrico. Quali sono le forze, tutte fra loro differenti, che agiscono sugli pneumatici? Anche qui troveremmo infinite soluzioni con le nostre sole tre equazioni. Analogamente, siamo in grado di risolvere un problema di equilibrio per un tavolo a tre gambe, ma non a quattro. Problemi di questo tipo, che presentano più incognite che equazioni, sono detti **indeterminati**.

Nel mondo reale esistono però sempre soluzioni anche per i problemi indeterminati. Se mettete un'auto con le quattro ruote appoggiate ciascuna sulla piattaforma di una bilancia, potrete leggere su ciascuna un valore ben definito, e la somma dei quattro numeri corrisponderà al peso del veicolo. Che cosa rende vani i nostri sforzi di determinare i singoli pesi dalle equazioni?

La complicazione nasce dal fatto che in generale abbiamo implicitamente ammesso, e forse non ce ne ricordiamo nemmeno più, che i corpi ai quali applichiamo le equazioni dell'equilibrio statico siano perfettamente rigidi. Con questo si intende che essi non si deformano per effetto delle forze che su di essi agiscono. Nella realtà, non esiste alcun corpo che abbia una simile proprietà. Le gomme di un'auto, ad esempio, si deformano visibilmente sotto carico fino a che il veicolo non raggiunge una posizione di equilibrio statico.

Tutti al ristorante abbiamo provato a lottare con un tavolo traballante, che si riesce in genere a fissare mettendo uno spessore di carta ripiegata sotto una delle gambe. Anche senza questo espediente però, se su quel tavolo andasse a sedersi un elefante, potete star certi che, se non si sfascia, il tavolo si deformerebbe proprio come le gomme di un'auto. Le quattro gambe andrebbero tutte ad appoggiarsi sul pavimento, e le forze che agiscono verso l'alto sulle singole gambe assumerebbero valori ben definiti (e diversi tra loro) come nella figura 12.9; e il tavolo smetterebbe di traballare. Ma come facciamo a trovare i valori di queste forze normali che agiscono sulle gambe del tavolo e in tutti i casi simili in cui si ha una deformazione?

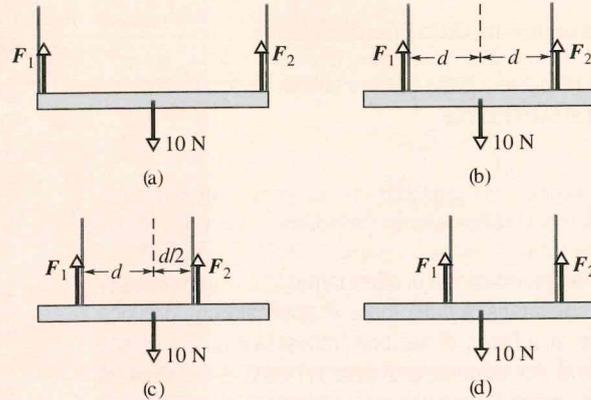
Per risolvere questi problemi indeterminati di equilibrio, dobbiamo estendere la conoscenza delle equazioni d'equilibrio aggiungendo qualche nozione di *elasticità*, il ramo della fisica e dell'ingegneria che descrive come si deformano i corpi reali soggetti a forze. Il prossimo paragrafo costituisce un'introduzione a questo argomento.



**Figura 12.9** Questo tavolo è una struttura indeterminata. Le quattro forze che agiscono sulle gambe sono di intensità differenti e non possono essere calcolate con le sole leggi dell'equilibrio statico.

### ✓ VERIFICA 3

Una barra omogenea orizzontale di peso 10 N va appesa al soffitto con due fili che esercitano le forze verticali verso l'alto  $F_1$  e  $F_2$ . La figura mostra quattro possibili disposizioni per i fili. Quali di queste, se ve ne sono, sono indeterminate (in modo che non possiamo trovare i valori di  $F_1$  e  $F_2$ )?



(d)

## Elasticità

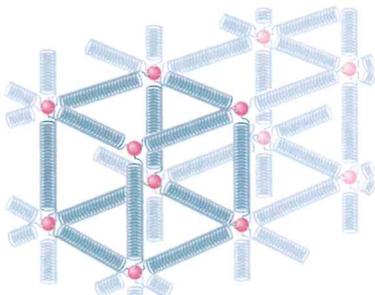
Quando gli atomi si riuniscono a formare un solido, come potrebbe essere un chiodo di ferro, si sistemano in configurazioni di equilibrio assumendo la forma di un reticolo cristallino tridimensionale, una disposizione ripetitiva in cui ogni atomo ha una distanza di equilibrio ben definita rispetto agli atomi adiacenti. Gli atomi sono tenuti insieme da forze interatomiche, rappresentate da molle nella figura 12.10. Il reticolo è notevolmente rigido, il che equivale a dire che le «molle interatomiche» sono assai poco deformabili. È per questa ragione che molti oggetti comuni come scale, tavoli e cucchiari ci sembrano perfettamente rigidi. Altri invece, come le canne per innaffiare e i guanti di gomma, non ci sembrano affatto rigidi: gli atomi di cui sono costituiti *non formano* reticoli rigidi come quello della figura 12.10, ma si allineano in lunghe catene molecolari che possono essere flessibili, perché legate debolmente fra loro.

Tutti i corpi «rigidi» reali sono **elastici** entro certi limiti, il che significa che possiamo modificare le loro dimensioni, in misura molto scarsa, tirandoli, spingendoli, torcendoli o comprimendoli. Per avere un'idea dell'ordine di grandezza delle deformazioni in gioco, immaginiamo di appendere un'automobile a un'asta verticale di tondino di ferro (un profilato a sezione circolare) lunga 1 m, di 1 cm di diametro. L'asta si allungherà, ma soltanto di qualcosa come 0,5 mm, ossia dello 0,05%. E appena rimosso il carico, ritornerà alle sue dimensioni iniziali.

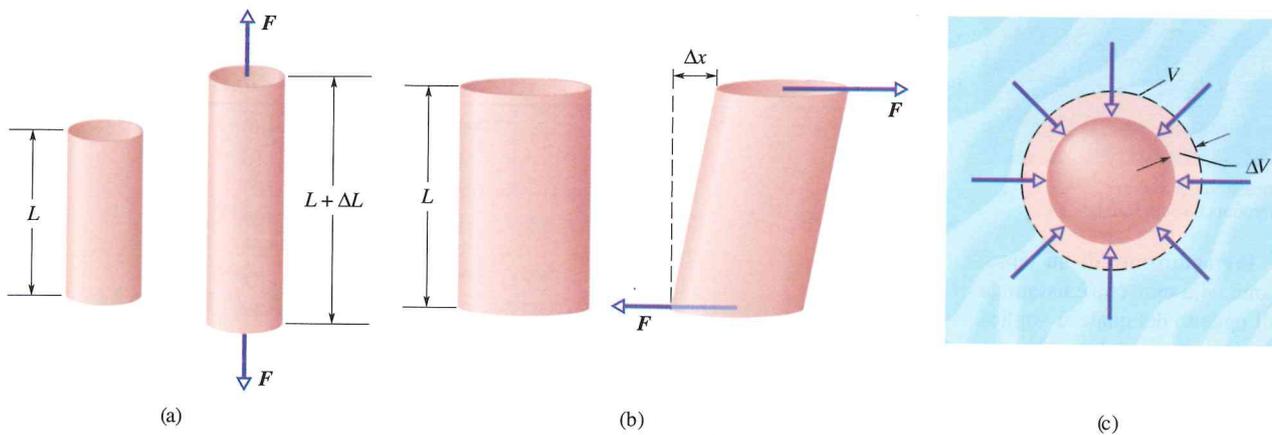
Se invece alla stessa asta appendiamo due automobili, l'asta si deformerà in modo permanente e togliendo il carico non la vedremo ritornare alle dimensioni iniziali. Se poi vi appendiamo tre automobili, si spezzerà. Un istante prima della rottura l'allungamento dell'asticella sarà inferiore allo 0,2%. Anche se deformazioni di questo ordine possono sembrare piccole, sono molto importanti nella pratica dell'ingegneria. (Il fatto che un'ala sotto carico rimanga attaccata a un aeroplano è ovviamente di una certa importanza!)

**Tre modalità.** La figura 12.11 presenta tre modi in cui un solido può modificare le proprie dimensioni quando è sollecitato da forze. Nella 12.11a un cilindro è allungato longitudinalmente. Nella 12.11b un cilindro è deformato da una forza trasversale come potrebbe essere deformato un mazzo di carte o un libro. Nella 12.11c un oggetto solido, immerso in un fluido sotto alta pressione, è compresso uniformemente in tutte le direzioni. Ciò che i tre esempi hanno in comune è che uno **sforzo**, ossia una forza deformante per unità di superficie, produce una **deformazione**, di norma considerata in termini relativi. Nella figura 12.11 abbiamo in (a) uno *sforzo longitudinale* (associato all'allungamento o all'accorciamento), detto anche *sforzo normale*, in (b) uno *sforzo di taglio*, detto anche *sforzo tangenziale* o di *scorrimento* e in (c) uno *sforzo di compressione uniforme*.

Sforzi e deformazioni assumono aspetti molto diversi nei tre casi della figura 12.11, ma, entro il campo delle applicazioni tecniche, lo sforzo e la deformazione da esso prodotta sono



**Figura 12.10** Gli atomi di un solido metallico sono distribuiti secondo un reticolo tridimensionale ripetitivo. Le molle rappresentano le forze interatomiche.



fra loro proporzionali. La costante di elasticità è chiamata **modulo di elasticità** (o modulo elastico), come risulta dall'espressione

$$\text{sforzo} = \text{modulo} \cdot \text{deformazione}. \quad (12.22)$$

In una prova standard delle proprietà elastiche lo sforzo normale su una barretta cilindrica (come quella di figura 12.12) viene aumentato lentamente da zero fino al valore per il quale il cilindro si strappa, e la deformazione (in questo caso l'allungamento) è misurata con grande precisione. Il risultato è il grafico di figura 12.13. Entro un campo piuttosto ampio di sforzo applicato, il rapporto sforzo/deformazione è lineare, e rispetta l'equazione 12.22: al cessare dello sforzo il campione riassume le sue dimensioni originali. Se lo sforzo viene portato oltre il **limite di snervamento**  $S_s$  della barretta, questa subisce una deformazione permanente. Se lo sforzo continua a crescere, si arriva alla rottura, per un valore  $S_r$  dello sforzo chiamato **limite di rottura**.

## Trazione e compressione

Per una sollecitazione di semplice trazione o compressione lo sforzo è definito come  $F/A$ , cioè l'intensità della forza divisa per la superficie sulla quale la forza agisce perpendicolarmente. La deformazione è espressa dalla quantità adimensionale  $\Delta L/L$ , cioè dalla variazione relativa (talvolta espressa in percentuale) della lunghezza del campione. Se il campione da provare è una lunga bacchetta e lo sforzo non supera il limite di snervamento, non soltanto l'intera bacchetta ma ogni suo tratto subirà la stessa deformazione quando si applicherà un certo sforzo. Dato che la deformazione è una grandezza adimensionale, il modulo definito nell'equazione 12.22 ha le stesse dimensioni dello sforzo, ossia di una forza divisa per una lunghezza al quadrato.

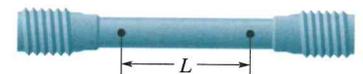
Il modulo relativo a sollecitazioni di trazione o compressione, che provocano cioè allungamenti o accorciamenti, è chiamato **modulo di Young** o **modulo di allungamento**, ed è rappresentato nel linguaggio tecnico-scientifico dal simbolo  $E$ . La (12.22) diventa quindi

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L}. \quad (12.23)$$

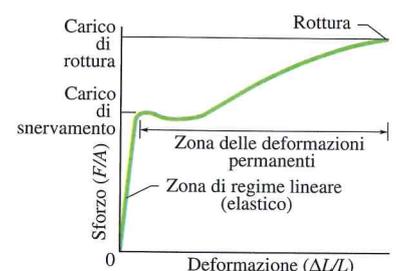
L'allungamento  $\Delta L/L$  in un materiale sottoposto a sforzi di trazione può essere misurato agevolmente mediante un *tensimetro*, come quello rappresentato nella figura 12.14. Questi semplici e utili strumenti, che possono essere attaccati direttamente con un adesivo a una struttura in opera, sono basati sulla proprietà che fa dipendere la resistenza elettrica della sonda dalla deformazione che subisce.

Mentre il modulo di allungamento di un oggetto può essere praticamente identico per trazione o compressione, nei due casi il limite di rottura può essere molto differente. Il calcestruzzo, ad esempio, ha una elevata resistenza alla compressione, ma la sua resistenza alla trazione è così scarsa che viene generalmente considerata nulla nei calcoli. La tabella 12.1 riporta il modulo di Young e altre proprietà elastiche di alcuni materiali interessanti per l'ingegneria.

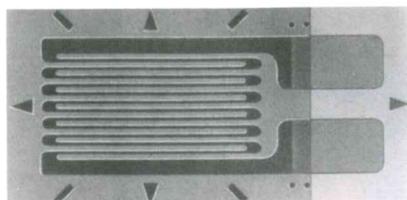
**Figura 12.11** (a) Un cilindro soggetto a sforzo longitudinale si allunga di una quantità  $\Delta L$ . (b) Un cilindro soggetto a sforzo di taglio si deforma come un mazzo di carte da gioco di una quantità  $\Delta x$ . (c) Una sfera solida, soggetta a uno sforzo di compressione uniforme prodotto da un fluido, si riduce di volume di una quantità  $\Delta V$ . Tutte le deformazioni rappresentate nella figura sono molto esagerate.



**Figura 12.12** Una provetta usata per determinare una curva sforzo/deformazione simile a quella della figura 12.13. In una prova di trazione si misura la variazione  $\Delta L$  di una lunghezza  $L$  prefissata.



**Figura 12.13** La curva sforzo/deformazione di una barretta d'acciaio simile a quella della figura 12.12. La barretta si deforma permanentemente quando lo sforzo raggiunge il *limite di snervamento* del materiale, e si strappa quando è uguale al *limite di rottura* del materiale.



Per gentile concessione di Vishay Micro-Measurements Group, Raleigh, NC.

**Figura 12.14** Ingrandimento di un tensimetro di  $9,8 \text{ mm} \cdot 4,6 \text{ mm}$ , che è fissato da un adesivo all'oggetto del quale si vogliono misurare le deformazioni. La resistenza elettrica della sonda varia in funzione della deformazione, consentendo la misura di deformazioni dell'ordine del 3%.

**TABELLA 12.1** Alcune proprietà elastiche di materiali interessanti per l'ingegneria

Materiale	Massa volumica $\rho$ ( $\text{kg/m}^3$ )	Modulo di Young $E$ ( $10^9 \text{ N/m}^2$ )	Limite di rottura $S_r$ ( $10^6 \text{ N/m}^2$ )	Limite di snervamento $S_s$ ( $10^6 \text{ N/m}^2$ )
Acciaio <sup>a</sup>	7860	200	400	250
Alluminio	2710	70	110	95
Vetro	2190	65	50 <sup>b</sup>	—
Calcestruzzo <sup>c</sup>	2320	30	40 <sup>b</sup>	—
Legno <sup>d</sup>	525	13	50 <sup>b</sup>	—
Osso	1900	9 <sup>b</sup>	170 <sup>b</sup>	—
Polistirene	1050	3	48	—

<sup>a</sup> Acciaio da costruzione (ASTM A36).

<sup>b</sup> In compressione.

<sup>c</sup> Ad alta resistenza.

<sup>d</sup> Abete di Douglas.

## Taglio

Anche nel caso degli sforzi trasversali, lo sforzo è definito come una forza per unità di superficie, ma il vettore forza è parallelo al piano della sezione invece che perpendicolare ad esso. La deformazione è data da  $\Delta x/L$ , con riferimento ai simboli che appaiono nella figura 12.11b. Il modulo, che è rappresentato nel linguaggio tecnico-scientifico dal simbolo  $G$ , si chiama **modulo di taglio** o **di scorrimento**: l'equazione 12.22 prende la forma

$$\frac{F}{A} = G \frac{\Delta x}{L} \quad (12.24)$$

Gli sforzi di taglio costituiscono un fattore determinante per esempio nella rotazione degli alberi di trasmissione sotto carico e nelle fratture ossee dovute a flessione.

## Compressione idraulica uniforme

Nella figura 12.11c lo sforzo ha lo stesso valore della pressione  $p$  esercitata dal fluido sull'oggetto, ancora una forza per unità di superficie di cui ci occuperemo nel capitolo 14, e la deformazione vale  $\Delta V/V$ , ove  $V$  è il volume dell'oggetto e  $\Delta V$  il valore assoluto della variazione di volume. Il modulo, simbolo  $B$ , è chiamato **modulo di comprimibilità** o **di compressibilità** del materiale; si dice che il corpo è sottoposto a *pressione uniforme*, e la pressione può essere anche chiamata *sforzo di compressione idraulica uniforme*.

Per questo caso la (12.22) diventa:

$$p = B \frac{\Delta V}{V} \quad (12.25)$$

Il modulo di comprimibilità per l'acqua è  $2,2 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ , e per l'acciaio  $16 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ . La pressione sul fondo dell'oceano Pacifico, alla sua profondità media di 4000 m, vale  $4,0 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$ . La compressione relativa  $\Delta V/V$  di un certo volume d'acqua a tale profondità, dovuta alla sola pressione, è 1,8%, mentre per un oggetto d'acciaio sarebbe soltanto 0,025%. In generale i solidi, con il loro rigido reticolo atomico, sono meno comprimibili dei liquidi, nei quali i legami fra atomi e molecole adiacenti sono meno stretti.

## PROBLEMA SVOLTO 12.5 Sforzo e deformazione di un tondino d'acciaio

Un *tondino* di acciaio da costruzione ha raggio  $R = 9,5 \text{ mm}$  e lunghezza  $L = 81 \text{ cm}$ . Ha un'estremità fissata in una morsa mentre all'altra estremità una forza  $F$  di modulo  $6,2 \cdot 10^4 \text{ N}$  lo tira longitudinalmente. Qual è lo sforzo nel tondino? Quanto vale l'allungamento e la sua deformazione?

### SOLUZIONE

(1) Dato che la forza è applicata uniformemente e perpendicolarmente all'area di sezione, lo sforzo è dato dal rapporto tra il modulo della forza

e l'area, il membro sinistro della (12.23). (2) L'allungamento  $\Delta L$  è legato allo sforzo e al modulo di Young dall'equazione 12.23. (3) La deformazione è il rapporto tra l'allungamento e la lunghezza  $L$  allo stato indeformato.

**Calcoli.** Scriviamo

$$\text{sforzo} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi R^2} = \frac{6,2 \cdot 10^4 \text{ N}}{(\pi)(9,5 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} = 2,2 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2.$$

Il punto di snervamento per l'acciaio da costruzione vale  $2,5 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ ; questo tondino è pericolosamente vicino al limite di snervamento.

Scegliamo l'appropriato valore del modulo di Young dalla tabella 12.1. Dall'equazione 12.23 troviamo per l'allungamento

$$\begin{aligned}\Delta L &= \frac{(F/A)L}{E} = \frac{(2,2 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2)(0,81 \text{ m})}{2,0 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2} = \\ &= 8,9 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,89 \text{ mm}.\end{aligned}$$

Per la deformazione abbiamo

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{8,9 \cdot 10^{-4} \text{ m}}{0,81 \text{ m}} = 1,1 \cdot 10^{-3} = 0,11\%.$$

## PROBLEMA SVOLTO 12.6 Assestamento del tavolo traballante

Un tavolo ha tre gambe lunghe 1,00 m, mentre la quarta è più lunga di  $d = 0,50 \text{ mm}$ , il che lo fa traballare leggermente. Un pesante cilindro d'acciaio di massa  $M = 290 \text{ kg}$  viene collocato ritto sul tavolo (di massa molto minore), cosicché tutte e quattro le gambe si comprimono e il tavolo cessa di traballare. Le gambe sono cilindri di legno pieno con sezione  $A$  di  $1,0 \text{ cm}^2$ . Il modulo di Young per il legno vale  $E = 1,3 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ . Si suppone che il piano del tavolo rimanga in piano e che le gambe non cedano. Con quale forza il pavimento spinge su ogni gamba verso l'alto?

### SOLUZIONE

Consideriamo il sistema tavolo + cilindro d'acciaio. La situazione è simile a quella della figura 12.9, salvo il fatto che ora sul tavolo c'è un cilindro d'acciaio. Ecco una prima *idea chiave*: se il piano del tavolo rimane in piano, ciascuna delle tre gambe più corte, per accorciarsi della stessa quantità  $\Delta L_3$ , deve essere soggetta alla stessa forza  $F_3$ . La gamba più lunga, invece, dovrà «accollarsi» una forza  $F_4 > F_3$  per accorciarsi di una quantità  $\Delta L_4 > \Delta L_3$  tale che

$$\Delta L_4 = \Delta L_3 + d. \quad (12.26)$$

In base alla (12.23) possiamo mettere in relazione una variazione di lunghezza alla forza che la genera con l'equazione  $\Delta L = FL/(AE)$ , in cui  $L$  è la lunghezza della gamba a riposo. Utilizziamo questa relazione per sostituire  $\Delta L_4$  e  $\Delta L_3$  nell'equazione 12.26. Osserviamo anche che è possibile approssimare alla lunghezza  $L$  la lunghezza di tutte e quattro le gambe.

*Calcoli.* Introducendo dette sostituzioni e l'approssimazione proposta, otteniamo

$$\frac{F_4 L}{AE} = \frac{F_3 L}{AE} + d. \quad (12.27)$$

Questa equazione contiene due incognite, ossia le due forze.

Una seconda equazione contenente le stesse incognite si può ottenere scrivendo il bilancio delle forze verticali lungo un asse  $y$  ( $F_{\text{net},y} = 0$ ) come

$$3F_3 + F_4 - Mg = 0, \quad (12.28)$$

ove  $Mg$  è il modulo della forza gravitazionale agente sul sistema. (Sono tre le gambe sottoposte alla forza  $F_3$ ). Eliminando  $F_4$  fra le due ultime equazioni e risolvendo rispetto a  $F_3$ , si ottiene dopo alcuni passaggi

$$\begin{aligned}F_3 &= \frac{Mg}{4} - \frac{dAE}{4L} = \\ &= \frac{(290 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)}{4} + \\ &\quad - \frac{(5,0 \cdot 10^{-4} \text{ m})(10^{-4} \text{ m}^2)(1,3 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2)}{(4)(1,00 \text{ m})} = \\ &= 548 \text{ N} \approx 5,5 \cdot 10^2 \text{ N},\end{aligned}$$

e introducendo nella (12.28) per trovare  $F_4$ :

$$F_4 = Mg - 3F_3 = (290 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2) - 3(548 \text{ N}) \approx 1,2 \text{ kN}.$$

Risulta dunque che, per conseguire la configurazione di equilibrio del sistema tavolo + cilindro d'acciaio, le tre gambe più corte si accorciano di 0,42 mm, e quella più lunga di 0,92 mm.

## RIEPILOGO & SOMMARIO

**Equilibrio statico** Un corpo rigido in stato di quiete si definisce in **equilibrio statico**. La somma vettoriale delle forze esterne che agiscono sul corpo è nulla:

$$F_{\text{net}} = 0 \quad (\text{equilibrio delle forze}). \quad (12.3)$$

Se tutte le forze appartengono al piano  $xy$ , questa equazione vettoriale si scompone nelle due equazioni scalari:

$$F_{\text{net},x} = 0 \quad \text{e} \quad F_{\text{net},y} = 0 \quad (\text{equilibrio delle forze}). \quad (12.7, 12.8)$$

L'equilibrio statico richiede inoltre che la risultante dei momenti, rispetto a *qualsiasi* punto, di tutte le forze esterne agenti sul corpo sia uguale a zero:

$$\tau_{\text{net}} = 0 \quad (\text{equilibrio dei momenti torcenti}). \quad (12.5)$$

Se le forze appartengono tutte al piano  $xy$ , i loro momenti sono tutti paralleli all'asse  $z$  e l'equazione vettoriale 12.5 si riduce alla singola equazione scalare

$$\tau_{\text{net},z} = 0 \quad (\text{equilibrio dei momenti torcenti}). \quad (12.9)$$

**Centro di gravità** La forza di gravità agisce singolarmente su ogni particella di un corpo. L'effetto netto risultante di tutte queste azioni individuali si può ritenere equivalente a quello prodotto da una forza complessiva  $F_g$  applicata a un punto ben definito chiamato **baricentro** o **centro di gravità** del corpo. Se l'accelerazione di gravità è identica per tutte le particelle del corpo, il baricentro coincide con il centro di massa.

**Moduli elastici** Si ricorre a tre **moduli elastici** o **moduli di elasticità** per descrivere il comportamento elastico (ossia le deformazioni) di ogni