CAPITOLO 13

Gravitazione

13.1 LEGGE DI GRAVITAZIONE DI NEWTON

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di...

13.01 Applicare la legge di Newton della gravitazione per mettere in relazione la forza gravitazionale tra due particelle alle loro masse e alla loro distanza.

13.02 Rendervi conto che un guscio sferico uniforme di materia attrae una particella esterna al guscio come se tutta la massa del guscio fosse concentrata nel suo centro.

13.03 Disegnare in un diagramma delle forze la forza gravitazionale esercitata su una particella da un'altra particella o da una distribuzione sferica uniforme di materia.

Idee chiave

- Ogni particella dell'Universo attrae qualunque altra particella con una forza gravitazionale di intensità data da

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad \text{(legge di Newton della gravitazione)},$$

in cui m_1 e m_2 sono le masse delle due particelle, r è la loro distanza e $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$ è la costante di gravitazione.

- La forza gravitazionale esercitata tra corpi estesi si trova sommando o integrando le singole forze relative ai singoli punti materiali che costituiscono i corpi. Se tuttavia uno dei due corpi è un guscio sferico uniforme o un solido a simmetria sferica, la forza gravitazionale netta complessiva che esso esercita su un corpo *esterno* si può trovare simulando tutta la massa del corpo sferico concentrata nel suo centro.

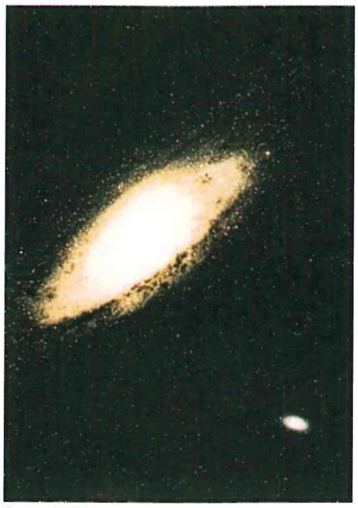
L'aspetto fisico

Uno degli obiettivi più stimolanti della fisica è la comprensione della forza gravitazionale, la forza che ci tiene attaccati alla Terra, che trattiene la Luna nella sua orbita attorno alla Terra e che mantiene la Terra in orbita attorno al Sole. Tale forza agisce anche sulla Via Lattea, tenendo legati i milioni e milioni di stelle che la compongono e le innumerevoli particelle e molecole che riempiono lo spazio interstellare. Il sistema solare si colloca in un punto abbastanza periferico di quella specie di disco costituito da stelle e altro materiale che costituisce la nostra galassia e dista $2{,}6 \cdot 10^4$ anni luce ($2{,}5 \cdot 10^{20}$ km) dal centro galattico, attorno al quale ruota lentamente.

La forza gravitazionale si fa sentire perfino al di là della Via Lattea, trattenendo insieme il Gruppo Locale di galassie, di cui fa parte, oltre alla nostra Via Lattea, anche la galassia di Andromeda (fig. 13.1) lontana $2{,}3 \cdot 10^6$ anni luce dalla Terra, oltre a numerose galassie nane più vicine, come la Grande Nebulosa di Magellano. Il Gruppo Locale fa parte del Superammasso Locale di galassie, che viene attirato per gravitazione verso una regione dello spazio, chiamata Grande Attrattore, di massa straordinariamente elevata. Tale regione si trova a una distanza dalla Terra di circa $3{,}0 \cdot 10^8$ anni luce dalla parte opposta della Via Lattea. E l'influenza della gravitazione si estende anche più lontano perché sembra che tenti di tenere insieme tutto l'universo, pur in espansione.

Questo tipo di forza è responsabile anche delle strutture più misteriose dell'universo: i *buchi neri*. Quando una stella di dimensioni considerevolmente maggiori del nostro Sole esaurisce il combustibile, la forza di gravità agente tra tutte le sue particelle può condurre al collasso della stella su se stessa e formare così un buco nero. La forza di gravità sulla superficie di un tale corpo celeste è così intensa che né la materia né la radiazione può allontanarsene, da cui il nome «buco nero». Qualunque stella che si avvicinasse troppo al buco nero ne verrebbe catturata e risucchiata all'interno dall'attrazione gravitazionale. Dopo molte catture di questo genere si forma un *buco nero supermassiccio*. Mostri siffatti sembrano essere comuni nell'universo. Un tale mostro si cela per esempio al centro della Via Lattea, un buco nero chiamato Sagittario A*, la cui massa è $3{,}7 \cdot 10^6$ volte la massa solare. La forza di gravità in vicinanza di questo corpo celeste è così intensa che costringe le stelle a orbitare attorno al buco nero nel tempo brevissimo di 15,2 anni.

 ISBN 978-88-08-18229-6



Courtesy NASA

Figura 13.1 La galassia di Andromeda. Situata a $2{,}3 \cdot 10^6$ anni luce da noi e visibile a stento a occhio nudo, è molto simile alla nostra galassia, la Via Lattea.

Per quanto la natura della gravitazione sia ancora in parte incompresa, il nostro punto di partenza per affrontarne lo studio si basa sulla *legge della gravitazione* di Isaac Newton.

Legge di gravitazione di Newton

Prima di addentrarci tra le equazioni, fissiamo un attimo l'attenzione su alcuni fatti che a noi sembrano scontati. Noi stiamo attaccati al terreno in un modo confacente, non così tenace da essere costretti a strisciare per terra né così lieve da rischiare bernoccoli contro il soffitto ogniqualvolta facciamo un piccolo balzo per saltare su un gradino. L'intensità di attrazione ci soddisfa anche osservando che è sufficiente a tenerci a terra ma non ci costringe a restare appiccicati l'uno all'altro, ciò che non sempre risulterebbe gradevole, o ad avere incollati addosso gli oggetti circostanti. Ci risulta evidente che l'intensità di attrazione dipende da quanta «sostanza» è stipata nel nostro corpo e negli oggetti: la Terra contiene un'enormità di «sostanza» e quindi esercita una forte attrazione, ma un corpo umano ha meno «sostanza» e provoca un'attrazione molto minore o addirittura trascurabile. Ad ogni modo questa «sostanza» genera sempre un'attrazione, mai una repulsione.

Nel passato l'uomo sapeva naturalmente di essere attirato verso il basso (specie quando cadeva inciampando...), ma si immaginava che questa fosse una proprietà unica della Terra, piuttosto che di tutti i corpi, e nemmeno aveva consapevolezza che fosse alla base del moto apparente dei corpi celesti. Fu nel 1665 che il giovane ventitreenne Isaac Newton si rese conto che tale forza era responsabile del moto lunare attorno alla Terra. E dimostrò che ogni corpo dell'Universo attrae ogni altro corpo. Questa tendenza dei corpi ad avvicinarsi prende il nome di **gravitazione** e la «sostanza» coinvolta nel fenomeno è la massa dei corpi. Dando fiducia alla leggenda della mela che inspirò Newton portandolo a enunciare la sua **legge di gravitazione**, ebbene l'attrazione in tal caso si manifesta tra la massa della mela e la massa della Terra. Si tratta di una forza apprezzabile grazie all'enorme massa della Terra e pur tuttavia non vale che 0,8 N al più. L'intensità attrattiva tra due persone l'una accanto all'altra su un autobus è (per fortuna, forse) molto minore, non più di 1 μN, e perciò è impercettibile.

L'attrazione gravitazionale tra due corpi estesi, come due individui umani, è difficile da calcolare. Qui ci limiteremo a esaminare la legge di Newton applicata a due *particelle* virtualmente prive di dimensioni. Supponiamo che abbiano masse m_1 ed m_2 e che la loro distanza sia r. Il modulo della forza che ciascuna esercita sull'altra è dato da

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \text{(legge di gravitazione di Newton).} \tag{13.1}$$

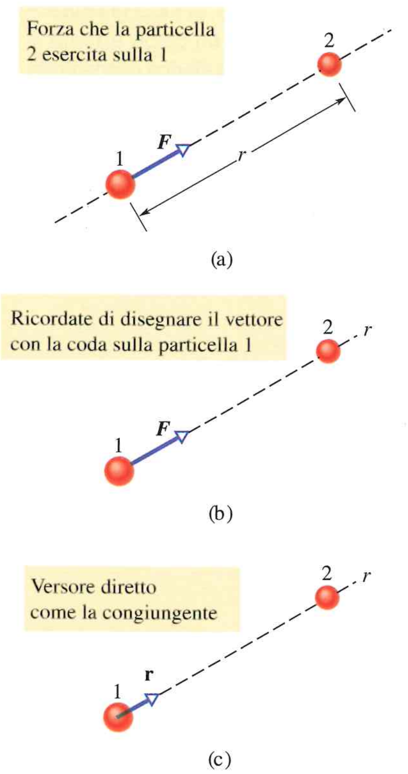


Figura 13.2 (a) La forza gravitazionale esercitata sulla particella 1 dalla particella 2 è di tipo attrattivo. (b) La forza $\boldsymbol{F}$ è diretta come la congiungente delle due particelle, r, nel verso che va dalla particella 1 alla 2. (c) $\mathbf{r}$ è un versore di modulo 1 dato da $\mathbf{r}/r$, ove $\boldsymbol{r}$ è il vettore posizione della particella 2 rispetto alla 1.

In quest'espressione G rappresenta la **costante gravitazionale**:

$$\begin{aligned} G &= 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m^2/kg^2} = \\ &= 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg \cdot s^2}. \end{aligned} \tag{13.2}$$

Nella figura 13.2a, $\boldsymbol{F}$ rappresenta la forza gravitazionale esercitata sulla particella 1 (massa m_1) dalla particella 2 (massa m_2). La forza è orientata come la retta congiungente le due particelle nel verso che va dalla 1 alla 2 e si dice che è una forza *attrattiva* perché la particella 1 è attratta dalla 2. L'equazione 13.1 dà l'intensità di tale forza.

Il vettore $\boldsymbol{F}$ si può descrivere come avente la direzione dell'asse $\boldsymbol{r}$ che si estende dalla particella 1 alla 2 (fig. 13.2b) o, in modo più generico, definendo un vettore unitario, o versore, orientato e diretto come l'asse $\boldsymbol{F}$, di modulo 1, tale che sia $|\boldsymbol{r}\ /\ r| = 1$, in cui $\boldsymbol{r}$ rappresenta il vettore posizione della particella 2 rispetto alla 1 (fig. 13.2c). Possiamo quindi riscrivere la (13.1) in forma vettoriale nel seguente modo:

$$\boldsymbol{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{13.3}$$

La forza gravitazionale esercitata dalla particella 1 sulla particella 2 ha la stessa intensità della forza esercitata dalla 2 sulla 1 e verso opposto. Queste due forze costituiscono una coppia di azione-reazione obbediente alla terza legge di Newton o terzo principio della dinamica e possiamo dunque parlare di una forza che agisce *reciprocamente* tra le due particelle di intensità data dalla (13.1). Tale forza non può essere influenzata dalla presenza di altri corpi, ancorché collocati tra le due particelle considerate. Detto in altre parole, la forza gravitazionale non si può «schermare».

L'intensità della forza di attrazione gravitazionale, ossia quanto intensamente si attraggano due masse separate da un certa distanza, dipende dalla costante di gravitazione G. Se il valore di G, per un evento inatteso e straordinario, fosse improvvisamente decuplicato, ci ritroveremmo tutti schiacciati al suolo dall'attrazione terrestre. E se al contrario si riducesse a un decimo, ecco che l'attrazione della Terra sarebbe così debole da consentirci di scavalcare con un sol balzo un grattacielo.

Corpi estesi. Anche se la legge di Newton come l'abbiamo formulata si applica esclusivamente ai corpi puntiformi, possiamo estenderne l'applicazione anche a oggetti reali, purché le loro dimensioni siano piccole rispetto alla distanza che li separa. Dal punto di vista della gravità, la Luna e la Terra sono abbastanza lontane da potere, in prima approssimazione, essere considerate puntiformi. Ma una mela e la Terra? Dal punto di vista della mela, l'enorme Terra pianeggiante che si estende oltre il limite dell'orizzonte non ha proprio l'aspetto di una particella.

Per risolvere il dilemma Terra-mela Newton dimostrò un importante teorema:

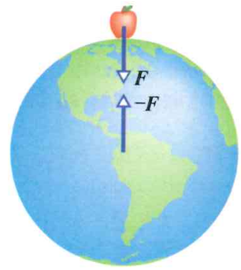


Figura 13.3 La mela tira «in su» la Terra con la stessa forza con cui la Terra tira «in giù» la mela.

> Un guscio sferico uniforme di materia attira una particella che si trova all'esterno come se tutta la massa dello strato sferico fosse concentrata nel suo centro.

La Terra può essere considerata come una serie di gusci sferici di questo tipo, uno dentro l'altro, ciascuno dei quali attira una particella esterna alla superficie terrestre come se tutta la sua massa fosse concentrata nel suo centro. Pertanto, dal punto di vista della mela, la Terra si comporta *veramente* come una particella situata al centro della Terra e avente una massa uguale alla massa della Terra.

Coppie di azione-reazione. Supponiamo che la Terra, come nella figura 13.3, eserciti sulla mela una forza diretta verso il basso di intensità 0,80 N. La mela deve allora esercitare sulla Terra una forza verso l'alto di 0,80 N, che ammettiamo sia applicata al centro della Terra. Nel linguaggio adottato al capitolo 5 si tratta di una coppia di forze di azione-reazione teorizzate nella terza legge di Newton. E anche se le intensità delle forze si equilibrano, producono accelerazioni molto differenti quando lasciamo cadere la mela: per questa, infatti, troviamo la ormai familiare accelerazione di gravità in vicinanza della superficie terrestre, che vale circa 9,8 m/s^2, mentre per la Terra l'accelerazione, misurata in un sistema di riferimento fissato al centro di massa del sistema Terra-mela, è all'incirca 10^{-25} m/s^2.

✔ VERIFICA 1

Una particella può essere collocata, a turno, al di fuori di quattro corpi diversi, ciascuno di massa m: (1) una grande sfera solida omogenea, (2) un grande strato sferico omogeneo, (3) una piccola sfera solida omogenea, (4) un piccolo strato sferico omogeneo. In tutti i casi la distanza tra la particella e il centro del corpo è d. Mettete i casi in ordine secondo i valori decrescenti del modulo della forza gravitazionale esercitata sulla particella.

13.2 GRAVITAZIONE E PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di…

13.04 Disegnare, nel caso si abbia una molteplicità di forze gravitazionali agenti su una particella, un diagramma delle forze che mostri tutti i vettori forza con la loro coda applicata alla particella.

13.05 Trovare la forza risultante tramite una somma vettoriale di più forze gravitazionali che agiscono su una particella.

Idee chiave

- Le forze gravitazionali obbediscono al principio di sovrapposizione: quando sono n le particelle a interagire, la forza risultante netta $\boldsymbol{F}_{1,\text{net}}$ agente su una di loro identificata come particella 1 è la somma delle forze esercitate su di essa da tutte le altre:

$$\boldsymbol{F}_{1,\text{net}} = \sum_{i=2}^{n} \boldsymbol{F}_{1i},$$

in cui la risultante è il vettore somma delle forze $\boldsymbol{F}_{1i}$ esercitate sulla particella 1 dalle particelle 2, 3, 4, ..., n.

 ISBN 978-88-08-18229-6

- La forza gravitazionale $\boldsymbol{F}_1$ che un corpo esteso esercita su una particella si trova suddividendo il corpo in elementi differenziali di massa $\mathrm{d}m$, ciascuno dei quali genera sulla particella una forza $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$, ed integrando su tutto il volume del corpo per trovare la somma di dette forze:

$$\boldsymbol{F}_1 = \int \mathrm{d}\boldsymbol{F}.$$

Gravitazione e principio di sovrapposizione

Dato un gruppo di particelle, possiamo trovare la forza gravitazionale netta (o risultante) esercitata su ciascuna di esse applicando il **principio di sovrapposizione**. Si tratta di un principio generale che afferma che l'effetto risultante è dato dalla somma dei singoli effetti. Nel nostro caso ciò implica che dobbiamo calcolare anzitutto la forza gravitazionale che ciascuna delle altre particelle esercita, a turno, sulla particella da noi considerata. Per trovare la forza risultante basta fare la somma vettoriale di queste singole forze, come già abbiamo fatto in passato.

Focalizziamo l'attenzione su quanto appena detto. (1) Le forze sono vettori e come tali possono avere orientamenti vari: per sommarli dobbiamo trattarli *come vettori* tenendo conto dei loro orientamenti. (2) L'effetto di sovrapposizione si traduce matematicamente con un'*addizione*. Immaginiamoci cosa succederebbe se invece l'effetto fosse di tipo moltiplicativo e magari variabile da caso a caso. Fortunatamente non è così: si tratta sempre di un'addizione.

Per n particelle interagenti il principio di sovrapposizione si può scrivere così:

$$\boldsymbol{F}_{1,\mathrm{net}} = \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{13} + \boldsymbol{F}_{14} + \boldsymbol{F}_{15} + \ldots + \boldsymbol{F}_{1n}. \tag{13.4}$$

In questa espressione $\boldsymbol{F}_{1,\mathrm{net}}$ è la forza netta che agisce sulla particella 1; quanto alle altre diremo, a titolo di esempio, che $\boldsymbol{F}_{13}$ rappresenta la forza netta esercitata sulla particella 1 dalla particella 3. Questa equazione può essere espressa in forma più compatta come una sommatoria di vettori:

$$\boldsymbol{F}_{1,\mathrm{net}} = \sum_{i=2}^{n} \boldsymbol{F}_{1i}\,. \tag{13.5}$$

Corpi reali. E la forza di gravità esercitata su una particella da un oggetto di dimensioni non trascurabili? Per calcolarla, dopo aver suddiviso l'oggetto in elementi abbastanza piccoli da poter essere assimilati a particelle, troviamo con la (13.4) la somma vettoriale delle forze esercitate sulla nostra particella da tutti gli altri elementi. Al limite, dividiamo l'oggetto in unità infinitesime di massa $\mathrm{d}m$, ciascuna delle quali esercita sulla nostra particella soltanto una forza infinitesima $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$. In questo caso limite, la sommatoria della (13.4) diventa un integrale:

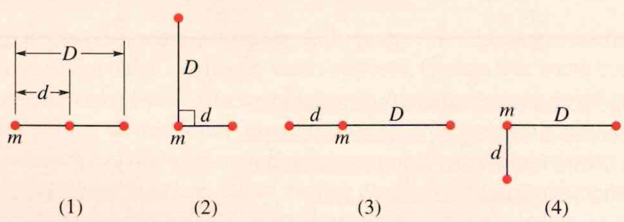
$$\boldsymbol{F}_1 = \int \mathrm{d}\boldsymbol{F}, \tag{13.6}$$

ove l'integrale è esteso a tutto l'oggetto. Se si tratta di una sfera piena o di un guscio sferico, si può evitare l'integrazione supponendo l'intera massa dell'oggetto concentrata nel suo centro e applicando l'equazione 13.1.

(1), (2) e (4), (3)

VERIFICA 2

La seguente figura illustra quattro disposizioni di tre particelle di uguale massa. (a) Mettete le disposizioni in ordine secondo i valori decrescenti del modulo della forza di gravitazione netta esercitata sulla particella m. (b) Nella disposizione 2 la direzione della forza netta è più vicina a quella del segmento d o a quella del segmento D?



PROBLEMA SVOLTO 13.1 Forza gravitazionale netta, due dimensioni, tre particelle

La figura 13.4a rappresenta un insieme di tre particelle con masse m_1 = 6,0 kg e $m_2 = m_3$ = 4,0 kg, e con a = 2,0 cm. Qual è la forza di gravità netta F_1 esercitata su m_1 dalle altre masse?

SOLUZIONE

(1) Si riconosce, trattandosi di particelle, la validità dell'equazione 13.1 per trovare il modulo della forza di gravità esercitata sulla particella 1 dalle altre particelle. (2) La direzione di ciascuna delle forze gravitazionali agenti sulla particella 1 è diretta secondo la congiungente tra quest'ultima e la particella considerata. (3) Siccome queste forze non giacciono su un solo asse, *non* possiamo sommare semplicemente le loro intensità, ma dobbiamo ricorrere a un'addizione vettoriale.

Calcoli. Applicando l'equazione 13.1 il modulo della forza F_{12} che la particella 2 esercita sulla 1 è:

$$F_{12} = \frac{Gm_1m_2}{a^2} = \tag{13.7}$$

$$= \frac{[6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg \cdot s^2)}](6{,}0\ \mathrm{kg})(4{,}0\ \mathrm{kg})}{(0{,}020\ \mathrm{m})^2} =$$

$$= 4{,}00 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N}.$$

Analogamente, per la forza esercitata dalla particella 3, si ha

$$F_{13} = \frac{Gm_1m_3}{(2a)^2} = \tag{13.8}$$

$$= \frac{[6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg \cdot s^2)}](6{,}0\ \mathrm{kg})(4{,}0\ \mathrm{kg})}{(0{,}040\ \mathrm{m})^2} =$$

$$= 1{,}00 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N}.$$

La forza $\boldsymbol{F}_{12}$ è concorde con l'asse y (fig. 13.4b) e ha dunque, diversa da zero, la sola componente y, F_{12}. Per stabilire le direzioni di $\boldsymbol{F}_{12}$ e di $\boldsymbol{F}_{13}$ ricorriamo a questa idea chiave: ciascuna forza agente sulla particella 1 è diretta verso la particella responsabile di quella forza. Analogamente $\boldsymbol{F}_{13}$ è discorde con l'asse x e ha dunque, diversa da zero, la sola componente x, $-F_{13}$. (Nota importante: nel diagramma delle forze i vettori sono applicati alla particella che subisce la forza. Disegnarli in altro modo è fonte di errori.) Per trovare la forza risultante sulla particella dobbiamo aver presente questa importante idea chiave: dato che le due forze non hanno la stessa direzione, non possiamo semplicemente sommare i loro moduli. Dobbiamo procedere con un'addizione vettoriale.

Senza ricorrere a una calcolatrice con funzioni vettoriali, basta osservare che $-F_{13}$ e F_{12} sono proprio le componenti x e y di $\boldsymbol{F}_{1,\mathrm{net}}$. Seguiamo quindi il procedimento dato dalla (3.6) per calcolare prima il modulo e poi l'angolo che definisce la direzione di $\boldsymbol{F}_{1,\mathrm{net}}$. Il modulo è

$$F_{1,\mathrm{net}} = \sqrt{(F_{12})^2 + (-F_{13})^2} =$$

$$= \sqrt{(4{,}00 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N})^2 + (-1{,}00 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N})^2} =$$

$$= 4{,}1 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N}.$$

La direzione rispetto all'asse x si calcola

$$\theta = \arctan \frac{F_{12}}{-F_{13}} = \arctan \frac{4{,}00 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N}}{-1{,}00 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N}} = -76°.$$

È un risultato ragionevole? No, la direzione di $\boldsymbol{F}_{1,\mathrm{net}}$ dev'essere compresa tra quelle di $\boldsymbol{F}_{12}$ e $\boldsymbol{F}_{13}$. Non dimentichiamo (vedi la tattica 3 a pag. 40) che le calcolatrici espongono solo uno dei possibili risultati di un'operazione trigonometrica inversa come la funzione arcotangente. L'altra soluzione si trova aggiungendo 180°, ed è

$$-76° + 180° = 104°,$$

soluzione che invece è compatibile con il problema.

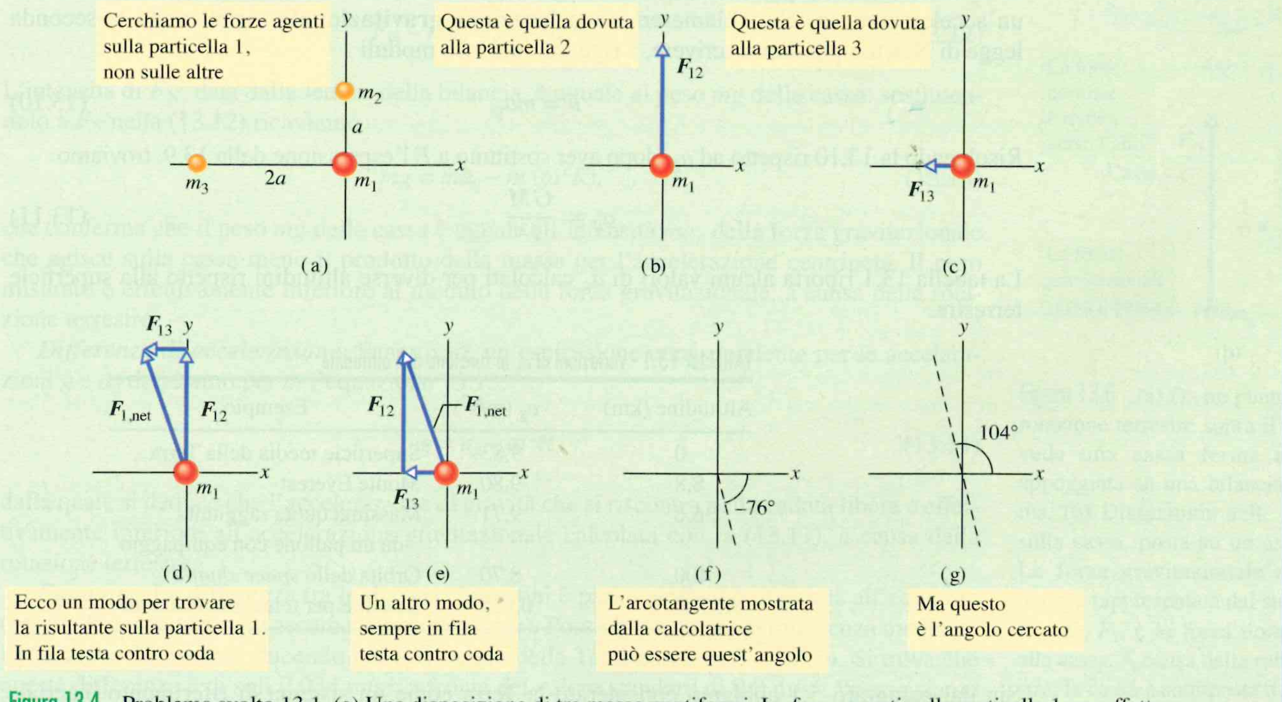


Figura 13.4 Problema svolto 13.1. (a) Una disposizione di tre masse puntiformi. Le forze agenti sulla particella 1 per effetto (b) della particella 2 e (c) della particella 3. (d-g) Modi di combinare le forze per ottenere la risultante in modulo e orientamento.

 ISBN 978-88-08-18229-6

13.3 GRAVITÀ IN PROSSIMITÀ DELLA SUPERFICIE TERRESTRE

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di...

13.06 Distinguere tra accelerazione di gravità e accelerazione gravitazionale.
13.07 Calcolare l'accelerazione gravitazionale sùbito fuori da un corpo celeste sferico uniforme.
13.08 Distinguere tra il peso che si misura su una bilancia e il modulo della forza gravitazionale.

Idee chiave

- L'accelerazione gravitazionale $\boldsymbol{a}_g$ di una particella di massa m è dovuta solamente alla forza gravitazionale che agisce su di essa. Posta una particella a distanza r dal centro di un corpo sferico uniforme di massa M, il modulo F della forza gravitazionale esercitato dalla particella è dato dall'equazione 13.1. E quindi, per la seconda legge di Newton,
$$F = ma_g,$$
da cui si ricava
$$a_g = \frac{GM}{r^2}.$$
- L'accelerazione di gravità effettiva $\boldsymbol{g}$ che una particella subisce in prossimità della superficie terrestre differisce leggermente dall'accelerazione gravitazionale $\boldsymbol{a}_g$, così come il peso della particella (pari a $m\boldsymbol{g}$) differisce leggermente dal modulo della forza gravitazionale, per i seguenti motivi: 1) la massa terrestre non è distribuita con uniformità, 2) il nostro pianeta non è perfettamente sferico, 3) la Terra ruota attorno all'asse terrestre.

Gravità in prossimità della superficie terrestre

Assimiliamo la Terra a una sfera piena omogenea di massa M. Dall'equazione 13.1 abbiamo l'intensità della forza di gravità che agisce su una particella di massa m posta all'esterno della Terra alla distanza r dal suo centro:

$$F = G\frac{Mm}{r^2}. \tag{13.9}$$

Se lasciamo libera la particella, la forza di gravità $\boldsymbol{F}$ la fa cadere verso il centro della Terra con un'accelerazione $\boldsymbol{a}_g$ che chiameremo **accelerazione gravitazionale**. Applicando la seconda legge di Newton possiamo scrivere, a riguardo dei loro moduli

$$F = ma_g. \tag{13.10}$$

Risolvendo la 13.10 rispetto ad a_g, dopo aver sostituito a F l'espressione della 13.9, troviamo

$$a_g = \frac{GM}{r^2}. \tag{13.11}$$

La tabella 13.1 riporta alcuni valori di a_g calcolati per diverse altitudini rispetto alla superficie terrestre.

TABELLA 13.1 Variazioni di a_g in funzione dell'altitudine

Altitudine (km)	a_g (m/s^2)	Esempio
0	9,83	Superficie media della Terra
8,8	9,80	Monte Everest
36,6	9,71	Massima quota raggiunta da un pallone con equipaggio
400	8,70	Orbita dello *space shuttle*
35 700	0,225	Satellite per telecomunicazioni

Sin dal paragrafo 5.1 abbiamo considerato la Terra come un sistema di riferimento inerziale ignorando la sua rotazione su se stessa. Questa semplificazione ci ha permesso di considerare l'accelerazione di gravità g uguale all'accelerazione che qui abbiamo chiamato gravitazionale,

a_g. E inoltre, sulla superficie terrestre, l'abbiamo sempre considerata di valore costante pari a 9,8 m/s^2. In realtà l'accelerazione di gravità g misurabile differisce da a_g calcolabile con la (13.11) per tre ragioni: (1) perché in realtà la Terra non è omogenea; (2) perché non è nemmeno perfettamente sferica; (3) perché infine la Terra, rispetto a un riferimento inerziale, gira. E similmente, la forza di gravitazione terrestre teorica data dalla (13.9) che si esercita su una particella differisce dal peso mg che risulterebbe da una misura, per le stesse tre ragioni, che esamineremo ora in dettaglio.

1. **La Terra non è omogenea.** La massa volumica (densità) della Terra varia radialmente con l'andamento del diagramma della figura 13.5, e la densità della crosta terrestre (il guscio più esterno) della Terra è diversa nelle diverse aree della superficie terrestre. Pertanto g varia da regione a regione.
2. **La Terra non è sferica.** La forma della Terra si avvicina a quella di un ellissoide, appiattito ai poli e dilatato all'equatore. Il raggio equatoriale supera quello polare di 21 km. Spostandosi infatti dall'equatore verso i poli, sempre a livello del mare, ci si avvicina al centro della Terra e quindi g per questo motivo crescerebbe. Un punto in vicinanza di un polo si trova pertanto più vicino al nucleo centrale ad alta densità rispetto a un punto situato sull'equatore. Ci si può quindi aspettare che l'accelerazione di gravità g vada aumentando se ci spostiamo, a livello del mare, dall'equatore ai poli.
3. **La Terra gira.** L'asse di rotazione passa per i poli nord e sud della Terra. Un oggetto situato sulla superficie terrestre a qualsiasi latitudine salvo che ai poli ruota su una circonferenza intorno a quell'asse di rotazione ed è pertanto soggetto a un'accelerazione centripeta diretta verso il centro del circolo su cui viaggia. Questa accelerazione centripeta richiede l'esistenza di una forza centripeta, anch'essa diretta verso il centro di quel cerchio.

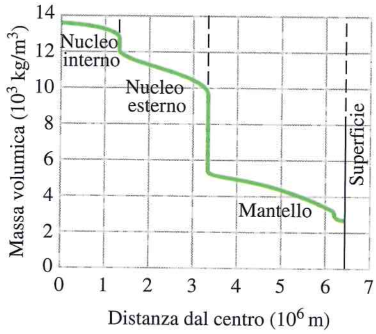


Figura 13.5 Massa volumica della Terra in funzione della distanza dal centro. Si distinguono i limiti del nucleo interno solido, del nucleo esterno prevalentemente liquido e del mantello solido, ma la crosta superficiale è troppo sottile per essere rappresentata in scala.

Per renderci conto del fatto che questo terzo requisito porta come conseguenza che l'accelerazione di gravità g differisca dall'accelerazione (puramente) gravitazionale a_g, e che il peso sia diverso dalla forza gravitazionale, analizziamo una semplice situazione, quella di una cassa di massa m posta su una bilancia all'equatore, vista, nella figura 13.6a, da un punto dello spazio posto sulla verticale del polo nord.

La figura 13.6b è un diagramma delle forze relativo alla cassa. Le due forze che agiscono su di essa sono dirette radialmente lungo l'asse r che si estende dal centro della Terra. La bilancia esercita sulla cassa una forza normale $\boldsymbol{F}_N$, diretta verso l'esterno nel verso positivo di r. La Terra esercita sulla cassa una forza gravitazionale rappresentata dal suo equivalente $m\boldsymbol{a}_g$, diretta verso l'interno. Dato che la cassa si muove su una traiettoria circolare attorno al centro della Terra, è soggetta a un'accelerazione centripeta. Dall'equazione 10.23 sappiamo che essa è uguale a $\omega^2 R$, con R raggio del cerchio (pari a circa il raggio della Terra) e ω velocità di rotazione terrestre. Applicando alla cassa la seconda legge di Newton possiamo scrivere

$$F_N - ma_g = m\,(-\,\omega^2 R). \tag{13.12}$$

L'intensità di $\boldsymbol{F}_N$, data dalla lettura della bilancia, è uguale al peso mg della cassa: sostituendolo a $\boldsymbol{F}_N$ nella (13.12) ricaviamo

$$mg = ma_g - m\,(\omega^2 R), \tag{13.13}$$

che conferma che il peso mg della cassa è uguale all'intensità ma_g della forza gravitazionale che agisce sulla cassa meno il prodotto della massa per l'accelerazione centripeta. Il peso misurato è effettivamente inferiore al modulo della forza gravitazionale, a causa della rotazione terrestre.

Differenza di accelerazione. Per trovare un'espressione corrispondente per le accelerazioni g e a_g dividiamo per m l'equazione 13.13:

$$g = a_g - \omega^2 R, \tag{13.14}$$

dalla quale si deduce che l'accelerazione di gravità che si riscontra nella caduta libera è effettivamente inferiore all'accelerazione gravitazionale calcolata con la (13.11), a causa della rotazione terrestre.

Equatore. La differenza tra le due accelerazioni è pari a $\omega^2 R$ ed è massima all'equatore (perché R per la cassa qui assume valore massimo). Possiamo valutare la differenza mediante l'equazione 10.5 e introducendo per R il raggio della Terra pari a 6,37 · 10^6 m. Si trova che questa differenza è di soli 0,034 m/s^2, a fronte del valore standard di 9,8 m/s^2. Spesso siamo quindi più che giustificati nel trascurare questa differenza. Lo stesso dicasi per la differenza tra il peso e la forza gravitazionale.

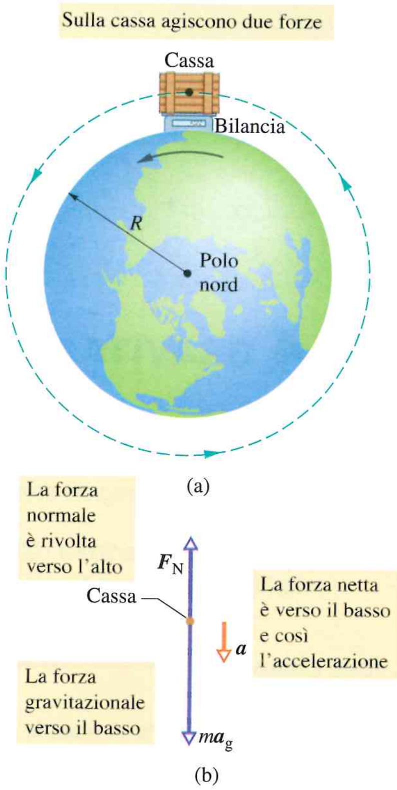


Figura 13.6 (a) Da un punto sull'asse di rotazione terrestre sopra il polo nord si vede una cassa ferma all'equatore, appoggiata su una bilancia a piattaforma. (b) Diagramma delle forze agenti sulla cassa, posta su un asse radiale r. La forza gravitazionale agente sulla cassa è rappresentata dal suo equivalente $m\boldsymbol{a}_g$. $\boldsymbol{F}_N$ è la forza normale relativa alla cassa. A causa della rotazione terrestre, la cassa è sottoposta a un'accelerazione centripeta $\boldsymbol{a}$ diretta verso il centro della Terra.

 ISBN 978-88-08-18229-6

PROBLEMA SVOLTO 13.2 Differenza di accelerazione tra capo e piedi

(a) Un astronauta alto $h = 1{,}70$ m galleggia «a piedi in giù» in una navicella orbitante a una distanza $r = 6{,}77 \cdot 10^6$ m dal centro della Terra. Qual è la differenza di accelerazione gravitazionale tra i suoi piedi e la sua testa?

SOLUZIONE

La prima idea chiave sta nell'approssimare la Terra a una sfera omogenea di massa $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg. A questo punto la (13.11) ci fornisce l'espressione idonea al caso:

$$a_g = \frac{GM_T}{r^2}. \tag{13.15}$$

Non è possibile applicare semplicemente due volte la (13.15), una per la testa e una per i piedi, perché la differenza tra i due valori di distanza (1,70 m) è troppo piccola rispetto a r e la calcolatrice stessa ci darebbe un risultato identico. Ecco dunque un approccio più promettente: dato che r subisce un incremento piccolissimo, possiamo differenziare la (13.15) rispetto a r.

Calcoli. Calcolando la derivata otteniamo

$$da_g = -2\frac{GM_T}{r^3}dr, \tag{13.16}$$

ove da_g è la variazione differenziale nell'accelerazione gravitazionale dovuta a una variazione differenziale dr del raggio. Per l'astronauta $dr = h$ e, sostituendo i dati nella (13.16), otteniamo

$$da_g = -2\frac{[6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg \cdot s^2)}](5{,}98 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg})}{(6{,}77 \cdot 10^6\ \mathrm{m})^3}(1{,}70\ \mathrm{m}) =$$
$$= -4{,}37 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m/s^2}.$$

Questo risultato significa che l'accelerazione gravitazionale dei piedi dell'astronauta esercitata dalla Terra è leggermente superiore a quella della sua testa. Questa differenza tenderebbe a stirare il corpo, ma lo stiramento è talmente modesto da essere impercettibile.

(b) Se ora l'astronauta si trova nella stessa posizione orbitale con ugual raggio r, ma al posto della Terra c'è un *buco nero* di massa $M_b = 1{,}99 \cdot 10^{31}$ kg (dieci volte il Sole), qual è la differenza di accelerazione gravitazionale tra i piedi e la testa? I buchi neri sono caratterizzati dall'esistenza di una superficie sferica, detta *orizzonte degli eventi*, che nel nostro caso avrebbe raggio $R_h = 2{,}95 \cdot 10^4$ m. Niente, nemmeno la luce, può emergere da questa superficie e tanto meno da un punto interno ad essa. Notare che il nostro astronauta si trova (saggiamente) ad abbondante distanza di sicurezza da questa superficie ($r = 229R_h$).

SOLUZIONE

Possiamo ancora usare la (13.16) sostituendo M_b a M_T:

$$da_g = -2\frac{[6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg \cdot s^2)}](1{,}99 \cdot 10^{31}\ \mathrm{kg})}{(6{,}77 \cdot 10^6\ \mathrm{m})^3}(1{,}70\ \mathrm{m}) =$$
$$= -14{,}5\ \mathrm{m/s^2}.$$

L'accelerazione gravitazionale ai piedi dell'astronauta è sensibilmente superiore a quella applicata alla sua testa dal buco nero. La conseguente tendenza allo stiramento dal corpo sarebbe forse ancora sopportabile, ma certamente dolorosa. Se l'astronauta si avvicinasse ulteriormente al buco nero, diventerebbe presto insostenibile.

13.4 GRAVITAZIONE ALL'INTERNO DELLA TERRA

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di…

13.09 Sapere che una particella collocata all'interno di un guscio di materia omogenea non risente di una forza gravitazionale netta.

13.10 Calcolare la forza gravitazionale esercitata su una particella che si trova dentro a una sfera non rotante di materia omogenea.

Idee chiave

- Un guscio uniforme di materia *non* esercita forze gravitazionali nette al suo interno.
- La forza gravitazionale F su una particella posta a distanza r dal centro all'interno di una sfera solida uniforme è legata alla massa M_{int} interna alla porzione di sfera con raggio r:

$$M_{int} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{M}{R^3}r^3,$$

ove ρ è la massa volumica della sfera, R è il suo raggio e M la sua massa. La porzione di massa della sfera con raggio r può considerarsi come condensata al centro della sfera e quindi può applicarsi la legge di Newton della gravitazione. L'intensità della forza gravitazionale che agisce sulla massa m è

$$F = \frac{GmM}{R^3}r.$$

Gravitazione all'interno della Terra

Il teorema del guscio sferico di Newton si applica anche a una situazione in cui la particella è localizzata *all'interno* del guscio sferico, affermando quanto segue:

> Un guscio sferico omogeneo di materia non esercita alcuna forza gravitazionale su una particella localizzata al suo interno.

Attenzione: ciò non significa che la forza gravitazionale esercitata sulla particella dai vari elementi del guscio scompaia come per incanto; significa piuttosto che la *somma* dei vettori forza relativi a tutti gli elementi è zero.

Se la densità della Terra fosse uniforme, la forza gravitazionale agente su una particella sarebbe massima alla superficie della Terra e andrebbe diminuendo, come è intuitivo, allontanandosi verso l'esterno. Spostandoci verso l'interno, magari giù per un pozzo profondo di miniera, la forza di gravità cambierebbe per due motivi: (1) tenderebbe ad aumentare perché ci avvicineremmo al centro della Terra; (2) tenderebbe a diminuire perché i gusci sferici all'esterno della posizione radiale della particella non eserciterebbero alcuna forza sulla particella.

Per trovare un'espressione della forza gravitazionale all'interno della Terra supposta uniforme, ricorriamo al romanzo fantascientifico di G. Griffith, *Da polo a polo*. Tre esploratori tentano di percorrere a bordo di una capsula una sorta di galleria formatasi in modo naturale (ovviamente immaginaria) che collega il pólo sud col polo nord. La figura 13.7 mostra la capsula di massa m in caduta quando si trova a distanza r dal centro. In tal punto la forza gravitazionale *netta* esercitata sulla capsula è quella dovuta alla porzione di massa M_{int} contenuta entro il raggio r (indicata con linea tratteggiata), mentre la porzione del guscio esterno a tale raggio non ha alcuna influenza. Inoltre possiamo assumere che M_{int} sia concentrata nel centro della Terra. L'intensità della forza gravitazionale sulla capsula è quindi data dalla (13.1):

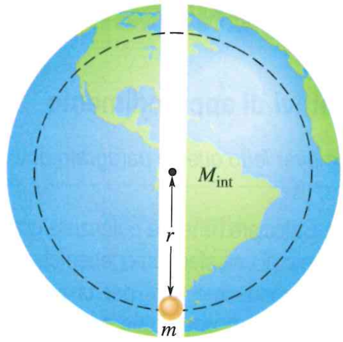


Figura 13.7 Una capsula di massa m cade da ferma attraverso una galleria che collega il polo sud col polo nord. Quando la capsula si trova a distanza r dal centro, la porzione di massa terrestre contenuta entro il medesimo raggio è M_{int}.

$$F = \frac{GmM_{int}}{r^2}. \tag{13.17}$$

Se la massa volumica ρ è uniforme, la massa contenuta entro il raggio r è proporzionale al suo volume, da cui

$$\rho = \frac{M_{int}}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Risolvendo rispetto a M_{int} si ottiene

$$M_{int} = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{M}{R^3} r^3. \tag{13.18}$$

Introducendo questa espressione nella (13.17) otteniamo il modulo della forza agente sulla capsula in funzione della sua distanza r dal centro della Terra:

$$F = \frac{GmM}{R^3} r. \tag{13.19}$$

Secondo la descrizione di Griffith gli esploratori, avvicinandosi al centro della Terra, subiscono una forza gravitazionale crescente che, al centro, improvvisamente sparisce per un istante. L'equazione 13.19 ci dice invece che l'intensità della forza decresce via via che la capsula si avvicina al centro fino ad annullarsi in tal punto. Griffith aveva indovinato almeno quest'ultimo dettaglio.

L'equazione 13.19 si può anche scrivere in forma vettoriale, in cui la forza $\boldsymbol{F}$ dipende dal vettore posizione $\boldsymbol{r}$ lungo un asse radiale che si estende dal centro della Terra. Chiamando K la quantità costante $4\pi Gm\rho/3$, la (13.19) diventa

$$\boldsymbol{F} = -K\boldsymbol{r}, \tag{13.20}$$

in cui abbiamo inserito un segno meno per ricordare che i vettori forza $\boldsymbol{F}$ e posizione $\boldsymbol{r}$ sono opposti, il primo diretto verso il centro della Terra e l'altro uscente da quel punto. La (13.20) ha la forma della legge di Hooke (eq. 7.20). Nelle condizioni ideali descritte, dunque, la capsula oscillerebbe come un blocco attaccato a una molla, avendo per centro di oscillazione il centro della Terra. Dopo essere caduta dal polo sud al centro della Terra, la capsula proseguirebbe verso il polo nord per poi tornare indietro e così seguitando in eterno.

Nel caso reale della Terra, che di certo non è omogenea nella distribuzione della sua massa (fig. 13.5), la forza di gravità sulla capsula inizialmente nella caduta *crescerebbe*. Una volta raggiunto un valore massimo a una certa profondità, solo allora comincerebbe a diminuire.

ISBN 978-88-08-18229-6

13.5 ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di...

13.11 Calcolare l'energia potenziale gravitazionale di un sistema di particelle o di una sfera omogenea che si possa assimilare a una particella.

13.12 Riconoscere che, per una particella che si muove da un punto iniziale a uno finale sotto l'effetto di una forza gravitazionale, il lavoro svolto dalla forza, e quindi la variazione di energia potenziale, è indipendente dal cammino seguìto.

13.13 Calcolare il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale per una particella che si muove in prossimità di un corpo astronomico o comunque di un corpo che resta fisso.

13.14 Applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica a una particella in moto rispetto a un corpo celeste o a un corpo che comunque resta fermo.

13.15 Spiegare le modalità e le necessità energetiche di un corpo che vuole sfuggire dall'influenza di un corpo celeste comunemente assunto come una sfera uniforme.

13.16 Calcolare la velocità di fuga di una particella per abbandonare un corpo celeste.

Idee chiave

- L'energia potenziale gravitazionale $U(r)$ di un sistema di due particelle di masse M e m separate da una distanza r è l'opposto del lavoro che dovrebbe svolgere la forza gravitazionale per portarle nella loro posizione da distanza infinita. In formula:

$$U = -\frac{GMm}{r} \qquad \text{(energia potenziale gravitazionale).}$$

- Se un sistema è costituito da più di due particelle, la sua energia potenziale gravitazionale complessiva U è la somma dei termini che rappresentano le energie potenziali di ciascuna coppia. Come esempio, per tre particelle di masse m_1, m_2 ed m_3 si ha

$$U = -\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right).$$

- Un corpo può sfuggire (allontanarsi indefinitamente) all'attrazione gravitazionale esercitata da un corpo celeste di massa M e raggio R se la sua velocità in prossimità della superficie del corpo celeste supera la velocità di fuga data da

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Energia potenziale gravitazionale

Nel paragrafo 8.1 abbiamo esaminato l'energia potenziale gravitazionale di una particella in presenza della Terra. Abbiamo avuto cura di tenere la particella vicino alla superficie della Terra, così da poter ritenere costante la forza di gravità, e abbiamo arbitrariamente stabilito di dare valore zero all'energia potenziale del sistema Terra-particella quando la particella si trova sulla superficie terrestre. Per particelle che non si trovano sulla superficie terrestre l'energia potenziale gravitazionale decresce col diminuire della distanza tra la particella e la Terra.

Qui generalizziamo il concetto considerando l'energia potenziale gravitazionale U di due particelle, di masse m e M, separate da una distanza r. Scegliamo la configurazione di riferimento che definisce $U = 0$. Per semplificare le equazioni stabiliamo che questa condizione si verifichi quando le due particelle siano separate da una distanza così grande da potersi ritenere *infinita*. Come prima, l'energia potenziale decresce al diminuire della distanza. Dato che $U = 0$ per $r = \infty$, l'energia potenziale è negativa per ogni distanza finita e aumenta in modulo all'avvicinarsi della particella.

Fatte queste premesse, come potremo dimostrare fra breve, l'energia potenziale gravitazionale del sistema delle due particelle è data da

$$U = -\frac{GMm}{r} \qquad \text{(energia potenziale gravitazionale).} \qquad (13.21)$$

Questa equazione conferma che $U(r)$ tende a zero per $r \to \infty$, e che $U(r)$ è negativo per valori di r finiti.

Linguaggio. L'energia potenziale definita dalla (13.21) è una proprietà comune al sistema delle due particelle, non di ciascuna delle particelle componenti. Non ha senso pretendere di ripartire questa energia assegnandone una parte a una particella e la parte restante all'altra. Nell'uso comune però, se $M \gg m$, come nel caso del sistema Terra–pallina (da tennis), si parla di «energia potenziale della pallina»: ciò è perfettamente accetta-

ISBN 978-88-08-18229-6

bile, dato che, se la pallina si muove in vicinanza della Terra, le variazioni di energia cinetica del sistema Terra-pallina si identificano con quelle della pallina, perché le variazioni di energia cinetica della Terra sono tanto piccole da sfuggire a qualsiasi misurazione. Analogamente, nel paragrafo 13.7 parleremo di «energia potenziale di un satellite artificiale» in orbita terrestre, perché anche la massa del satellite è trascurabile rispetto a quella della Terra. Per corpi aventi masse paragonabili, invece, bisogna usare la massima cautela e trattarli come elementi di un sistema.

Molteplicità di particelle. Se il nostro sistema contiene più di due particelle, dobbiamo calcolare successivamente, applicando l'equazione 13.21, l'energia potenziale di ogni coppia di particelle ignorando tutte le altre, e sommare poi i valori parziali trovati. Così, ad esempio, per le tre particelle della figura 13.8, applicando separatamente la (13.21) alle tre possibili combinazioni di due particelle si ottiene, per l'energia potenziale totale del sistema,

$$U = -\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}} \right) . \qquad (13.22)$$

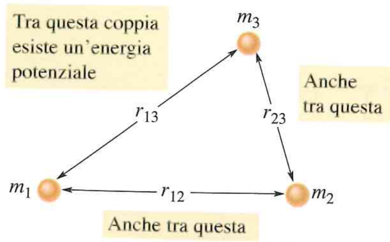


Figura 13.8 Tre particelle formano un sistema. L'energia potenziale gravitazionale del *sistema* è la somma delle energie potenziali gravitazionali di ciascuna delle tre coppie distinte che possono formarsi fra le particelle.

Dimostrazione dell'equazione 13.21

Supponiamo che una pallina da tennis venga vigorosamente lanciata in aria come per allontanarla verticalmente dalla superficie terrestre (fig. 13.9). Vogliamo trovare un'espressione per l'energia potenziale gravitazionale U della pallina nel punto P, lungo la sua traiettoria a distanza radiale R dal centro della Terra. A questo scopo calcoliamo il lavoro L svolto dalla forza di gravità sulla pallina durante il suo spostamento dalla posizione iniziale nel punto P a una posizione lontanissima, a distanza infinita. Dato che la forza gravitazionale $\boldsymbol{F}(r)$ è una forza variabile (dipende da r), per esprimere il lavoro dobbiamo ricorrere alle tecniche utilizzate nel paragrafo 7.5. In forma vettoriale:

$$L = -\int_R^\infty \boldsymbol{F}(r) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} . \qquad (13.23)$$

Il prodotto scalare tra la forza e lo spostamento differenziale può essere sviluppato in questo modo

$$\boldsymbol{F}(r) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = F(r)\, \mathrm{d}r \cos \phi, \qquad (13.24)$$

ove ϕ è l'angolo tra le direzioni dei due vettori. Ponendo $\phi = 180°$ e introducendo la (13.1) si ottiene

$$\boldsymbol{F}(r) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\frac{GMm}{r^2}\, \mathrm{d}r ,$$

dove M rappresenta la massa della Terra e m la massa della pallina.

Inserendo questa espressione nella (13.23) e integrando, otteniamo

$$\begin{aligned} L &= -GMm \int_R^\infty \left(\frac{1}{r^2} \right) \mathrm{d}r = \left[\frac{GMm}{r} \right]_R^\infty = \\ &= 0 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{R} . \end{aligned} \qquad (13.25)$$

L qui rappresenta il lavoro richiesto per spostare la pallina dal punto P (posto a distanza R) all'infinito. Con l'equazione 8.1 ($\Delta U = - L$) possiamo anche scrivere il lavoro in termini di energia potenziale come

$$U_\infty - U = -L.$$

L'energia potenziale all'infinito vale zero e U è l'energia potenziale nel punto P. Sostituendo questa espressione nella (13.25) si giunge a

$$U = L = -\frac{GMm}{R} ,$$

identica alla (13.21), salvo che per il cambio del simbolo R.

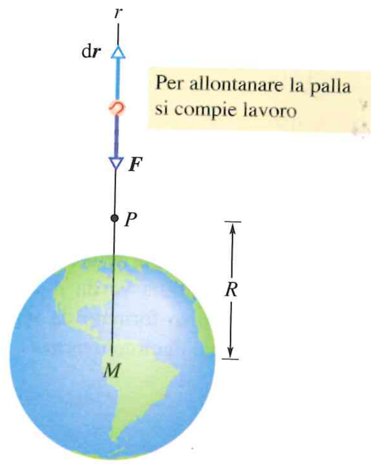


Figura 13.9 Una pallina da tennis viene sparata verticalmente verso l'alto e passa per il punto P posto a distanza R dal centro della Terra. Sono indicati la forza gravitazionale $\boldsymbol{F}$ agente sulla pallina e un vettore spostamento differenziale d$\boldsymbol{r}$, entrambi diretti lungo l'asse radiale r.

ISBN 978-88-08-18229-6

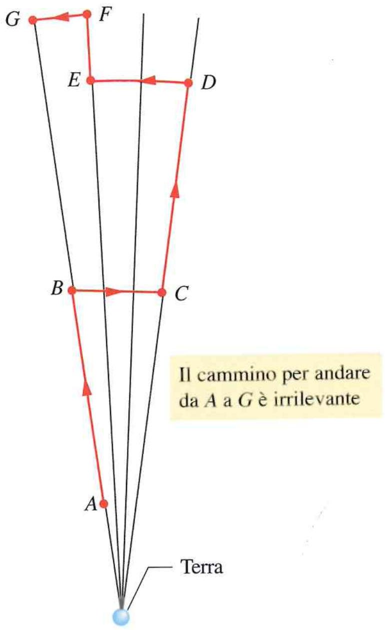


Figura 13.10 In prossimità della superficie terrestre una pallina va da A a G seguendo un percorso formato da segmenti radiali e archi di circonferenza.

Indipendenza dal cammino

Consideriamo un percorso spezzato in piccoli tratti, come nella figura 13.10, in cui una pallina va da A a G seguendo un cammino costituito da tre tratti radiali e tre archi di circonferenza. Ci interessa trovare il lavoro totale L svolto dalla forza gravitazionale $\boldsymbol{F}$ sulla pallina nel suo spostamento da A a G. Nei tratti lungo gli archi di circonferenza come AB la forza di gravità non compie lavoro, perché è perpendicolare agli spostamenti. Il lavoro totale è la somma di quelli sviluppati nei tragitti radiali, come BC.

Ora mentalmente chiudiamo gli archi in modo che tutti i raggi vengano a sovrapporsi. Il percorso da A a G risulterà semplicemente uno spostamento in linea retta lungo il raggio. Il lavoro cambia? No, perché lungo i tragitti ad arco non si compiva lavoro, quindi eliminandoli il lavoro da svolgere è sempre lo stesso. Ora abbiamo dunque un cammino da A a G diverso dal precedente, ma il lavoro svolto per compiere il tragitto è sempre il medesimo.

Avevamo già esaminato un caso simile nel paragrafo 8.1. E questa è la conclusione: la forza gravitazionale è una forza conservativa. Dunque il lavoro svolto dalla forza di gravitazione su una particella nel corso di un suo spostamento fra due punti non dipende dal percorso seguito dalla particella, ma soltanto dalle sue posizioni iniziale e finale.
Il lavoro è uguale e di segno opposto alla differenza di energia potenziale fra i due punti:

$$L = -\Delta U = -(U_f - U_i), \tag{13.26}$$

ove U_f e U_i sono i valori dell'energia potenziale associata rispettivamente alla posizione finale e a quella iniziale della particella. E, giacché il lavoro L svolto da una forza conservativa è indipendente dal percorso, la variazione di energia potenziale gravitazionale ΔU è pure *indipendente* dal particolare cammino seguito.

L'energia potenziale e la forza

Nella verifica dell'equazione 13.21 abbiamo dedotto l'espressione della funzione energia potenziale $U(r)$ da quella della funzione forza $\boldsymbol{F}(r)$. Siamo anche in grado di fare il contrario, di ricavare cioè la funzione forza partendo dalla funzione energia potenziale. Sulla traccia dell'equazione 8.22 possiamo scrivere

$$F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(-\frac{GMm}{r}\right) = -\frac{GMm}{r^2}. \tag{13.27}$$

Questa è appunto la legge di gravitazione di Newton (eq. 13.1), col segno meno a ricordare che la forza è attrattiva.

Velocità di fuga

Quando si spara in aria verticalmente, di solito il proiettile rallenta, subisce un istante di arresto e ricade a terra. Esiste però un certo valore minimo della velocità iniziale che lo farà allontanare verso l'alto per sempre, sottraendolo all'attrazione gravitazionale della Terra e farlo arrestare teoricamente soltanto a distanza infinita. Questa velocità iniziale è detta **velocità di fuga** (dalla Terra, di solito si sottintende).

Consideriamo un proiettile di massa m che lasci la superficie di un pianeta alla velocità di fuga v. Avrà un'energia cinetica $K = \frac{1}{2}mv^2$ e un'energia potenziale, data dalla (13.21),

$$U = -\frac{GMm}{R},$$

essendo M la massa del pianeta e R il suo raggio.

Quando il proiettile arriva a distanza infinita si arresta, e quindi ha energia cinetica nulla. Ma, per definizione del potenziale zero, è nulla anche la sua energia potenziale, e di conseguenza anche la sua energia totale. Per il principio di conservazione dell'energia, se questa è nulla all'infinito doveva essere nulla anche alla partenza dalla superficie terrestre: si ha dunque

$$K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GMm}{R}\right) = 0.$$

e risolvendo rispetto a v:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \tag{13.28}$$

La velocità di fuga non dipende dalla direzione in cui il proiettile è sparato. Tuttavia è più facile raggiungere quella velocità se il proiettile è diretto nel verso in cui ruota la rampa di lancio mentre la Terra gira intorno al proprio asse. Per esempio, i razzi a Cape Canaveral sono diretti verso est per approfittare del moto che la base segue insieme alla Terra nella sua rotazione verso est con velocità di 1500 km/h.

Questa equazione può servire a calcolare la velocità di fuga di un oggetto da qualsiasi corpo celeste, attribuendo semplicemente a M il valore della massa del corpo celeste e a R quello del suo raggio. La tabella 13.2 riporta le velocità di fuga da alcuni corpi celesti.

TABELLA 13.2 Velocità di fuga da alcuni corpi celesti

Corpo	Massa (kg)	Raggio (m)	Velocità di fuga (km/s)
Cerere[a]	$1{,}17 \cdot 10^{21}$	$3{,}8 \cdot 10^{5}$	0,64
Luna terrestre	$7{,}36 \cdot 10^{22}$	$1{,}74 \cdot 10^{6}$	2,38
Terra	$5{,}98 \cdot 10^{24}$	$6{,}37 \cdot 10^{6}$	11,2
Giove	$1{,}90 \cdot 10^{27}$	$7{,}15 \cdot 10^{7}$	59,5
Sole	$1{,}99 \cdot 10^{30}$	$6{,}96 \cdot 10^{8}$	618
Sirio B[b]	$2 \cdot 10^{30}$	$1 \cdot 10^{7}$	5200
Stella di neutroni[c]	$2 \cdot 10^{30}$	$1 \cdot 10^{4}$	$2 \cdot 10^{5}$

[a] L'asteroide di massa maggiore.
[b] La compagna di Sirio, una delle stelle più brillanti; Sirio B è una *nana bianca* (una stella nello stadio finale della sua evoluzione).
[c] Il nucleo residuo di una stella che ha subito un collasso, dopo essere esplosa in una *supernova*.

VERIFICA 3

Allontanate una palla di massa m da una sfera di massa M. (a) L'energia potenziale gravitazionale del sistema palla-sfera aumenta o diminuisce? (b) La forza gravitazionale tra la palla e la sfera compie lavoro positivo o negativo?

PROBLEMA SVOLTO 13.3 Asteroide proveniente dallo spazio, energia meccanica

Un asteroide sta puntando dritto dritto verso la Terra con velocità di 12 km/s rispetto al nostro pianeta, quando la sua distanza dal centro della Terra è 10 volte il raggio terrestre. Ignorando gli effetti dell'atmosfera sull'asteroide, trovare la sua velocità quando raggiunge la superficie terrestre.

SOLUZIONE

Idea chiave. Se trascuriamo gli effetti di resistenza dell'aria, l'energia meccanica del sistema asteroide-Terra durante la caduta si conserva. Quindi l'energia meccanica finale (all'impatto sulla Terra) equivale all'energia meccanica iniziale. Dunque

$$K_f + U_f = K_i + U_i, \tag{13.29}$$

dove K e U sono le energie cinetica e potenziale gravitazionale.

Seconda **idea chiave**: se assumiamo che il sistema sia isolato, la sua quantità di moto durante la caduta si conserva. Quindi la variazione di quantità di moto dell'asteroide e quella della Terra devono uguagliarsi in modulo e avere segno opposto. Considerato però che la massa della Terra è enorme in confronto a quella dell'asteroide, la sua variazione di velocità e quindi anche di energia cinetica sarà trascurabile in confronto a quelle dell'asteroide. Assumiamo quindi che le energie cinetiche che compaiono nell'equazione 13.29 siano solo quelle dell'asteroide.

Indichiamo con m la massa dell'asteroide, con M la massa della Terra ($5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg) e con R il raggio della Terra ($6{,}37 \cdot 10^{6}$ m). Sostituendo nella (13.21) e ponendo $K = \frac{1}{2}(mv^2)$, la (13.29) diventa

$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GMm}{R} = \tfrac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GMm}{10R},$$

ove $10R$ rappresenta la distanza iniziale dell'asteroide. Sostituendo i valori noti e risolvendo rispetto a v_f^2 troviamo

$$v_f^2 = v_i^2 + \frac{2GM}{R}\left(1 - \frac{1}{10}\right) =$$
$$= (12 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s})^2 +$$
$$+ \frac{2\,[6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg \cdot s^2)}](5{,}98 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg})}{6{,}37 \cdot 10^6\ \mathrm{m}}\,0{,}9 =$$
$$= 2{,}567 \cdot 10^8\ \mathrm{m^2/s^2},$$

e infine

$$v_f = 1{,}60 \cdot 10^4\ \mathrm{m/s} = 16\ \mathrm{km/s}.$$

A questa velocità l'asteroide non avrebbe necessità di essere particolarmente grande per arrecare notevoli danni. Ad esempio, se avesse diametro di 5 m, l'impatto libererebbe un'energia pari all'esplosione di Hiroshima. Può suscitare allarme sapere che attorno alla Terra orbitano 500 milioni di asteroidi di questa misura, e nel 1994 uno di essi sembrò

 ISBN 978-88-08-18229-6

entrare nell'atmosfera terrestre esplodendo a un'altezza di 20 km nei pressi di una sperduta isola del Pacifico (facendo scattare gli allarmi antinucleari su sei satelliti militari). Un asteroide di 500 m di diametro (ce n'è un milione attorno alla Terra) potrebbe porre fine alla civiltà terrestre ed estinguere virtualmente il genere umano.

13.6 PIANETI E SATELLITI: LEGGI DI KEPLERO

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di…

13.17 Conoscere le tre leggi di Keplero.
13.18 Capire quale delle tre leggi di Keplero equivale alla legge di conservazione del momento angolare.
13.19 Identificare sul disegno di un'orbita ellittica il semiasse maggiore, l'eccentricità, il perielio, l'afelio e i punti focali.
13.20 Applicare, per un'orbita ellittica, la relazione che intercorre tra il semiasse maggiore, l'eccentricità, l'afelio e il perielio.
13.21 Applicare, per un satellite in orbita, la relazione di Keplero che lega il periodo di rivoluzione col raggio e con la massa del corpo centrale.

Idee chiave

- Il moto dei satelliti, naturali e artificiali, è regolato dalle leggi di Keplero:
  1. *Legge delle orbite.* Tutti i pianeti descrivono orbite ellittiche di cui il Sole occupa un fuoco.
  2. *Legge delle aree.* La congiungente tra Sole e pianeta spazza aree uguali in tempi uguali. (Affermazione equivalente al principio di conservazione del momento angolare.)
  3. *Legge dei periodi.* Il quadrato del periodo T di rivoluzione è proporzionale al cubo del semiasse maggiore a dell'orbita. Se essa è circolare con raggio r, si ha

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)r^3 \quad \text{(legge dei periodi)},$$

in cui M è la massa del Sole. Se l'orbita è ellittica, a r si sostituisce il semiasse maggiore a.

Pianeti e satelliti: leggi di Keplero

Fin dai tempi più remoti i movimenti dei pianeti, coi loro vagabondaggi sullo sfondo del cielo stellato, hanno rappresentato un affascinante mistero per l'umanità. I volteggi descritti da Marte, come appaiono nella figura 13.11, erano forse i più sorprendenti. Giovanni Keplero (1571-1630), dopo un'intera vita dedicata a questi problemi, arrivò a formulare alcune leggi empiriche che governano questi moti. Tycho Brahe (1546-1601), l'ultimo dei grandi astronomi a osservare il cielo senza l'ausilio del telescopio, aveva eseguito la registrazione di un'esauriente quantità di dati, che consentì a Keplero di dedurre le tre leggi del moto dei pianeti che portano il suo nome. Più tardi Newton (1642-1727) dimostrò come le leggi empiriche di Keplero si possano dedurre dalla sua legge sulla gravitazione.

Esamineremo ciascuna delle tre leggi di Keplero. Anche se le applicheremo al caso specifico dei pianeti che girano su orbite intorno al Sole, esse sono altrettanto valide per satelliti, naturali o artificiali, che ruotino su un'orbita intorno alla Terra o a qualsiasi altro corpo dotato di una massa adeguata.

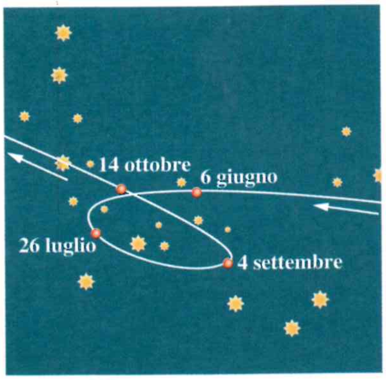


Figura 13.11 La curva descritta nel 1971 dal pianeta Marte sullo sfondo della costellazione del Capricorno. Sono segnate alcune delle sue posizioni, nelle date specificate. Poiché Marte e la Terra percorrono entrambi orbite intorno al Sole, le posizioni di Marte che vediamo sono relative al nostro sistema di riferimento, e quindi possono talvolta disegnare tracciati bizzarri come l'anello qui descritto.

> **1. Legge delle orbite:** Tutti i pianeti si muovono su orbite ellittiche, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.

La figura 13.12 mostra un pianeta, di massa m, che si muove su un'orbita ellittica intorno al Sole, che ha massa M. Ammettiamo che sia $M \gg 1$, e che quindi il centro di massa del sistema pianeta-Sole coincida (quasi) con il centro del Sole.

Questa orbita nella figura 13.12 è definita dalla lunghezza del **semiasse maggiore** a e dall'**eccentricità** e, un coefficiente numerico scelto di un valore tale che ea rappresenti la distanza dal centro di ciascuno dei due fuochi F ed F' dell'ellisse. *L'eccentricità zero definisce una circonferenza*, nella quale i due fuochi coincidono in un unico punto. Le eccentricità dei pianeti sono tanto piccole che le orbite, disegnate in scala, non si distinguono a occhio da circonferenze: per renderla evidente, l'eccentricità dell'orbita disegnata nella figura 13.12 è 0,74, mentre quella dell'orbita terrestre è soltanto 0,0167.

2. Legge delle aree: Il segmento che collega un pianeta al Sole descrive aree uguali in tempi uguali.

In termini soltanto qualitativi, questa seconda legge significa che il pianeta si muove più lentamente quanto è più lontano dal Sole, e più rapidamente quanto più è vicino al Sole. Dimostriamo qui che la seconda legge di Keplero è perfettamente equivalente alla legge di conservazione del momento angolare.

L'area dello spicchio ombreggiato nella figura 13.13a equivale quasi esattamente all'area coperta nel tempo Δt da un segmento che collega il Sole al pianeta, separati dalla distanza r. L'area ΔA dello spicchio è praticamente uguale all'area di un triangolo con base $r\,\Delta\theta$ e altezza r. Si ha quindi $\Delta A \approx \frac{1}{2}r^2\Delta\theta$. Questa espressione di ΔA diventa sempre più esatta quando Δt, e con esso $\Delta\theta$, tende a zero. La rapidità istantanea con la quale viene descritta l'area è espressa da

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r^2\omega, \tag{13.30}$$

ove ω è la velocità angolare del segmento rotante che congiunge il pianeta al Sole.

La figura 13.13b presenta il vettore quantità di moto $\boldsymbol{p}$ del pianeta, con le sue componenti. Dalla (11.20) sappiamo che l'intensità del momento angolare $\boldsymbol{L}$ del pianeta rispetto al Sole è data dal prodotto di r per la componente di $\boldsymbol{p}$ perpendicolare a r, ossia, per un pianeta di massa m,

$$L = rp_\perp = (r)(mv_\perp) = (r)(m\omega r) = mr^2\omega, \tag{13.31}$$

ove abbiamo sostituito a $v_\perp$ l'espressione equivalente ωr (eq. 10.18). Eliminando $r^2\omega$ fra la (13.30) e la (13.31), si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{2m}. \tag{13.32}$$

Se $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t$ è costante, come affermato da Keplero, ecco che la (13.32) conferma che anche L deve essere costante: è la legge di conservazione del momento angolare.

3. Legge dei periodi: Il quadrato del periodo di un pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore della sua orbita.

Consideriamo un'orbita circolare di raggio r (equivalente al suo semiasse maggiore). Applicando la seconda legge di Newton, $F = ma$, al pianeta in orbita della figura 13.14 con la sostituzione a F dell'espressione data dalla (13.1), e all'accelerazione centripeta a dell'espressione equivalente $\omega^2 r$, si ottiene

$$\frac{GMm}{r^2} = (m)(\omega^2 r). \tag{13.33}$$

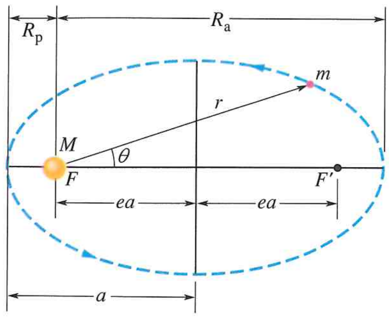


Figura 13.12 Un pianeta di massa m percorre un'orbita ellittica intorno al Sole. Il Sole, di massa M, si trova in F, uno dei fuochi dell'ellisse: l'altro fuoco F' è definito «vuoto». Ciascun fuoco si trova a una distanza ea dal centro: il fattore numerico e rappresenta l'*eccentricità dell'ellisse*. Sull'ellisse sono indicati il semiasse maggiore a, la distanza R_p del perielio (il punto più vicino al Sole) e la distanza R_a dell'afelio (il punto più lontano dal Sole).

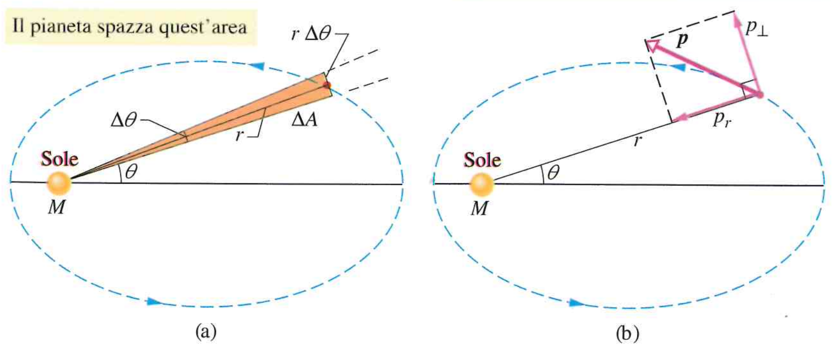


Figura 13.13 (a) Durante l'intervallo di tempo Δt il segmento r che congiunge il pianeta al Sole ruota intorno a quest'ultimo di un angolo $\Delta\theta$, descrivendo un'area ΔA. (b) La quantità di moto $\boldsymbol{p}$ del pianeta e le sue componenti.

ISBN 978-88-08-18229-6

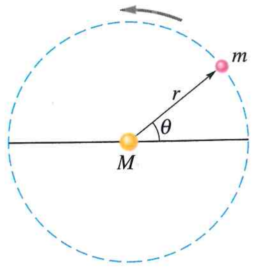


Figura 13.14 Un pianeta di massa m gira intorno al Sole su un'orbita circolare di raggio r.

Sostituendo ora (eq. 10.20) a ω l'equivalente $2\pi/T$, ove T è il periodo del moto, troviamo infine la terza legge di Keplero:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)r^3 \quad \text{(legge dei periodi).} \tag{13.34}$$

La quantità fra parentesi è una costante, il cui valore dipende soltanto dalla massa del corpo centrale.

L'equazione 13.34 è valida anche per orbite ellittiche, purché si sostituisca a r il valore a del semiasse maggiore dell'ellisse. La tabella 13.3 è una prova evidente della validità di questa legge per le orbite dei pianeti del sistema solare: conferma infatti che il rapporto T^2/a^3 ha praticamente lo stesso valore per qualsiasi orbita planetaria attorno a un dato corpo massiccio.

TABELLA 13.3 Terza legge di Keplero per il sistema solare*

Pianeta	Semiasse maggiore a (10^{10} m)	Periodo T(a)	T^2/a^3 (10^{-34} a²/m³)
Mercurio	5,79	0,241	2,99
Venere	10,8	0,615	3,00
Terra	15,0	1,00	2,96
Marte	22,8	1,88	2,98
Giove	77,8	11,9	3,01
Saturno	143	29,5	2,98
Urano	287	84,0	2,98
Nettuno	450	165	2,99
Plutone	590	248	2,99

* a = semiasse maggiore
a = anni

✔ VERIFICA 4

Il satellite 1 è su una data orbita circolare attorno a un pianeta, mentre il satellite 2 è su un'orbita circolare più grande. Quale satellite possiede (a) il periodo più lungo e (b) la maggior velocità?

PROBLEMA SVOLTO 13.4 Legge dei periodi di Keplero, cometa di Halley

La cometa di Halley, che ha un periodo di 76 anni, nel 1986 si trovava al *perielio* della sua orbita, ossia nella posizione più prossima al Sole, alla distanza $R_p = 8{,}9 \cdot 10^{10}$ m: dalla tabella 13.3 risulta che questa posizione è situata fra le orbite di Mercurio e di Venere.

(a) Qual è R_a, la *distanza dell'afelio*, ossia la massima distanza dal Sole della cometa?

SOLUZIONE

La prima idea chiave è suggerita dalla figura 13.12, nella quale osserviamo che $R_a + R_p = 2a$, ove a è il semiasse maggiore dell'orbita della cometa. Trovando quest'ultimo possiamo dunque risalire a R_a. Possiamo applicare l'equazione 13.34 che lega il semiasse maggiore al periodo, che noi conosciamo, semplicemente sostituendo a a r.

Calcoli. Con tale sostituzione e isolando a otteniamo

$$a = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}. \tag{13.35}$$

Passando ai valori numerici (la massa del Sole è $M = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg e il periodo della cometa è $T = 76$ a, ossia $2{,}4 \cdot 10^9$ s) risulta che $a = 2{,}7 \cdot 10^{12}$ m. Ora abbiamo

$$R_a = 2a - R_p = (2)(2{,}7 \cdot 10^{12}\ \text{m}) - 8{,}9 \cdot 10^{10}\ \text{m} = 5{,}3 \cdot 10^{12}\ \text{m}.$$

Sempre confrontando la tabella 13.3, si tratta di una distanza poco inferiore al semiasse maggiore di Plutone. La cometa di Halley non si allontana dal Sole più di quanto sia distante Plutone.

(b) Qual è l'eccentricità e dell'orbita della cometa di Halley?

SOLUZIONE

La relazione si vede nella figura 13.12: in essa si nota che $ea = a - R_p$.

Calcoli. Scriviamo

$$e = \frac{a - R_p}{a} = 1 - \frac{R_p}{a} = 1 - \frac{8{,}9 \cdot 10^{10}\ \text{m}}{2{,}7 \cdot 10^{12}\ \text{m}} = 0{,}97. \tag{13.36}$$

Quest'orbita cometaria, con un'eccentricità che si avvicina a 1, è un'ellisse lunga e sottile.

ISBN 978-88-08-18229-6

13.7 I SATELLITI: ORBITE ED ENERGIE

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di…

13.22 Calcolare, per un satellite in orbita circolare attorno a un corpo celeste, l'energia potenziale gravitazionale, l'energia cinetica e l'energia totale.

13.23 Calcolare l'energia totale di un satellite in orbita ellittica.

Idee chiave

- Un pianeta di massa m che si muova in orbita circolare di raggio r ha energia potenziale U ed energia cinetica K date da

$$U = -\frac{GMm}{r} \quad \text{e} \quad K = \frac{GMm}{2r}.$$

L'energia meccanica $E = K + U$ è dunque

$$E = -\frac{GMm}{2r}.$$

Se l'orbita è ellittica con semiasse maggiore a,

$$E = -\frac{GMm}{2a}.$$

I satelliti: orbite ed energie

Quando un satellite gira intorno alla Terra sulla sua orbita ellittica, sia la sua velocità, che determina la sua energia cinetica K, sia la sua distanza dal centro della Terra, da cui dipende l'energia potenziale U, oscillano con periodi fissi. L'energia meccanica totale E del satellite rimane però costante. (Data la grande sproporzione fra le masse del satellite e della Terra, attribuiamo unicamente al satellite l'energia potenziale U e l'energia totale E del sistema satellite-Terra.)

L'energia potenziale, data dall'equazione 13.21, vale

$$U = -\frac{GMm}{r},$$

con r uguale al raggio dell'orbita, provvisoriamente considerata circolare ($U = 0$ a distanza infinita). M e m sono le masse rispettivamente della Terra e del satellite.
Quanto all'energia cinetica, scriviamo la seconda legge di Newton, $F = ma$, relativa al satellite:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}, \tag{13.37}$$

(ove v^2/r è l'accelerazione centripeta), da cui si ricava l'energia cinetica:

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}, \tag{13.38}$$

che per un satellite in orbita circolare risulta

$$K = -\frac{U}{2} \quad \text{(orbita circolare)}. \tag{13.39}$$

L'espressione dell'energia meccanica totale è

$$E = K + U = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r},$$

ovvero

$$E = -\frac{GMm}{2r} \quad \text{(orbita circolare)}, \tag{13.40}$$

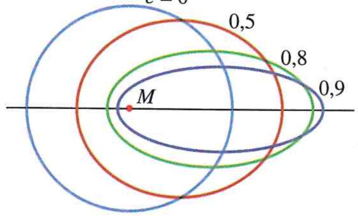


Figura 13.15 Quattro orbite attorno a un corpo di massa M. A tutte e quattro le orbite, che hanno identico asse maggiore a, corrisponde una stessa energia meccanica totale E. Sono indicate le rispettive eccentricità e.

ISBN 978-88-08-18229-6

Diagramma dell'energia del satellite in funzione del raggio orbitale

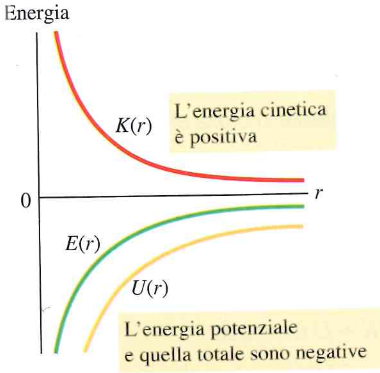


Figura 13.16 Andamento delle curve dell'energia cinetica K, dell'energia potenziale U e dell'energia totale E in funzione del raggio r per un satellite in orbita circolare. Per qualsiasi valore di r i valori di U ed E sono negativi, quello di K è positivo, ed è $E = -K$. Per r tendente all'infinito, le tre curve tendono a zero.

da cui si dimostra che, per un satellite su un'orbita circolare, l'energia totale è l'opposto dell'energia cinetica K:

$$E = -K \quad \text{(orbita circolare).} \tag{13.41}$$

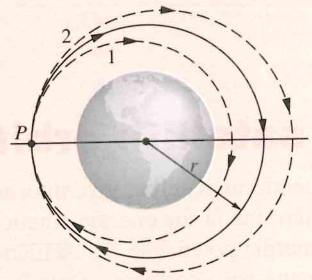
Si può dimostrare che la (13.40) rimane valida anche se al raggio r si sostituisce il semiasse maggiore a di un'orbita ellittica, e si può così scrivere:

$$E = -\frac{GMm}{2a} \quad \text{(orbita ellittica).} \tag{13.42}$$

Dall'equazione 13.42 si deduce che l'energia totale di un satellite in orbita dipende soltanto dal semiasse maggiore della sua orbita e non dall'eccentricità e. Così, ad esempio, per le quattro orbite della figura 13.15, che hanno lo stesso semiasse maggiore, uno stesso satellite avrebbe la stessa energia meccanica totale E. Nella figura 13.16 sono tracciati i diagrammi di K, U ed E per un satellite che percorre un'orbita circolare intorno a un corpo centrale dotato di massa adeguata. Si noti che, al crescere di r, l'energia cinetica e la velocità orbitale diminuiscono.

VERIFICA 5

In questa figura una navetta spaziale si trova inizialmente in orbita circolare di raggio r attorno alla Terra. Nel punto P il pilota accende momentaneamente i razzi anteriori per frenare la navetta diminuendone l'energia cinetica K e quella meccanica E. (a) Quale delle due orbite ellittiche tratteggiate seguirà la navetta? (b) Il periodo T della navetta (il tempo necessario per ritornare in P) sarà ora superiore, inferiore o uguale a prima?



PROBLEMA SVOLTO 13.5 Energia meccanica di una palla da bowling orbitante

Un astronauta giocherellone pone una palla da bowling, di massa $m = 7{,}20$ kg, su un'orbita circolare intorno alla Terra a quota $h = 350$ km.

(a) Qual è l'energia meccanica E della palla da bowling in orbita?

SOLUZIONE

L'*idea chiave* ci suggerisce di ricavare E dall'energia orbitale data dalla (13.40), purché riusciamo a conoscere il raggio orbitale. (*Non* è semplicemente l'altezza h data.)

Calcoli. Il raggio dell'orbita r vale

$$r = R + h = 6370 \text{ km} + 350 \text{ km} = 6{,}72 \cdot 10^6 \text{ m},$$

ove R è il raggio della Terra. Dalla (13.40), introducendo la massa $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg della Terra, si ricava l'energia meccanica:

$$E = -\frac{GMm}{2r} = $$
$$= -\frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg})(7{,}20 \text{ kg})}{(2)(6{,}72 \cdot 10^6 \text{ m})} =$$
$$= -2{,}14 \cdot 10^8 \text{ J} = -214 \text{ MJ}.$$

(b) Qual era l'energia meccanica E_0 della palla da bowling sulla rampa di lancio a Cape Canaveral (prima del lancio)? Da quel momento fino a quando è entrata in orbita qual è stata la variazione ΔE di energia meccanica della palla da bowling?

SOLUZIONE

Idea chiave: In questo caso la palla da bowling *non* è in orbita e quindi non si applica l'equazione 13.40. Dobbiamo trovare invece E_0 come somma di $K_0 + U_0$, rispettivamente energia cinetica e potenziale della palla da bowling prima della partenza. L'energia potenziale è U_0, data dalla (13.21):

$$U_0 = -\frac{GMm}{R} =$$
$$= -\frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg})(7{,}20 \text{ kg})}{6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m}} =$$
$$= -4{,}51 \cdot 10^8 \text{ J} = -451 \text{ MJ}.$$

Sulla rampa di lancio la palla da bowling possiede una certa energia cinetica dovuta alla rotazione della Terra, ma si può dimostrare che è abbastanza modesta (meno di 1 MJ) da poter essere trascurata rispetto all'energia potenziale. Consideriamo dunque l'energia totale E_0 uguale a

$$E_0 = K_0 + U_0 \approx 0 - 451 \text{ MJ} = -451 \text{ MJ}.$$

L'*aumento* di energia meccanica totale della palla da bowling durante il lancio è stato

$$\Delta E = E - E_0 = (-214 \text{ MJ}) - (-451 \text{ MJ}) = 237 \text{ MJ}.$$

Potete comprare questo modesto quantitativo di energia dal vostro fornitore di energia elettrica per pochi euro. Il costo di messa in orbita di un satellite è ben altro rispetto al costo dell'energia richiesta per lanciarlo!

PROBLEMA SVOLTO 13.6 Trasformazione di un'orbita circolare in una ellittica

Un'astronave di massa $m = 4{,}50 \cdot 10^3$ kg è in orbita circolare con raggio $r = 8{,}00 \cdot 10^6$ m e periodo $T_0 = 118{,}6$ min $= 7{,}119 \cdot 10^3$ s attorno alla Terra, quando accende un razzo anteriore per diminuire la sua velocità del 4,00%. Quale sarà in séguito il periodo T della sua orbita ellittica (fig. 13.17)?

SOLUZIONE

(1) L'orbita ellittica è legata al semiasse maggiore a dalla terza legge di Keplero, $T^2 = 4\pi^2 a^3/(GM)$. (2) Il semiasse maggiore a è legato all'energia meccanica E dell'astronave attraverso l'equazione 13.42, $E = -GMm/(2a)$, in cui $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg è la massa della Terra. (3) L'energia potenziale dell'astronave è data dall'equazione 13.21, $U = -GMm/r$, ove r è la distanza dell'astronave dal centro della Terra.

Calcoli. Dobbiamo dunque calcolare l'energia totale E per trovare il semiasse maggiore a, onde determinare il periodo dell'orbita ellittica. Cominciamo con l'energia cinetica, calcolata subito dopo l'accensione del razzo. La velocità v è pari a $0{,}96 v_0$, dove v_0 era la velocità prima del rallentamento, pari al rapporto tra la circonferenza dell'orbita iniziale e il periodo di tale orbita. Sicché, dopo l'accensione del razzo di frenata, l'energia cinetica è

$$K = \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} m (0{,}96 v_0)^2 = \tfrac{1}{2} m (0{,}96)^2 \left(\frac{2\pi r}{T_0}\right)^2 =$$

$$= \tfrac{1}{2}(4{,}50 \cdot 10^3 \text{ kg})(0{,}96)^2 \left(\frac{2\pi\,(8{,}00 \cdot 10^6 \text{ m})}{7{,}119 \cdot 10^3 \text{ s}}\right)^2 =$$

$$= 1{,}0338 \cdot 10^{11} \text{ J}.$$

Immediatamente dopo l'accensione del razzo di frenata, l'astronave si trova ancora a distanza r dal centro della Terra e quindi la sua energia potenziale gravitazionale è

$$U = -\frac{GMm}{r} =$$

$$= -\frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg})(4{,}50 \cdot 10^3 \text{ kg})}{8{,}00 \cdot 10^6 \text{ m}} =$$

$$= -2{,}2436 \cdot 10^{11} \text{ J}.$$

Sistemando l'equazione 13.42 con a al posto di r e introducendo il valore di energia, possiamo ora conoscere il semiasse maggiore:

$$a = -\frac{GMm}{2E} = -\frac{GMm}{2(K + U)} =$$

$$= -\frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg})(4{,}50 \cdot 10^3 \text{ kg})}{2(1{,}0338 \cdot 10^{11} \text{ J} - 2{,}2436 \cdot 10^{11} \text{ J})} =$$

$$= 7{,}418 \cdot 10^6 \text{ m}.$$

Ancora un ultimo passaggio. Sostituiamo a a r nell'equazione 13.34 e risolviamola rispetto a T:

$$T = \left(\frac{4\pi^2 a^3}{GM}\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{4\pi^2 (7{,}418 \cdot 10^6 \text{ m})^3}{(6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg})}\right)^{1/2} =$$

$$= 6{,}356 \cdot 10^3 \text{ s} = 106 \text{ min}.$$

Questo è il periodo dell'orbita ellittica che l'astronave assume dopo l'accensione dei razzi di frenata. Esso è minore di T_0 per due ragioni. (1) La lunghezza dell'orbita è diminuita. (2) Salvo che nel punto P di figura 13.17, l'astronave orbita più vicina alla Terra e quindi la diminuita energia potenziale accresce l'energia cinetica, ciò che corrisponde a una maggiore velocità.

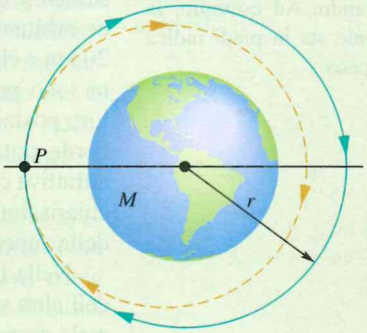


Figura 13.17 Problema svolto 13.6. Nel punto P si accende un razzo che modifica l'orbita della navicella da circolare a ellittica.

13.8 EINSTEIN E LA GRAVITAZIONE

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di...

13.24 Spiegare il principio di equivalenza di Einstein.

13.25 Capire che il modello di gravitazione di Einstein è legato alla curvatura dello spazio-tempo.

Idee chiave

- Einstein mise in luce l'equivalenza tra accelerazione e gravitazione. Tale principio di equivalenza lo portò a formulare una teoria della gravitazione (la teoria generale della relatività) che spiega i fenomeni gravitazionali in termini di curvatura dello spazio.

ISBN 978-88-08-18229-6

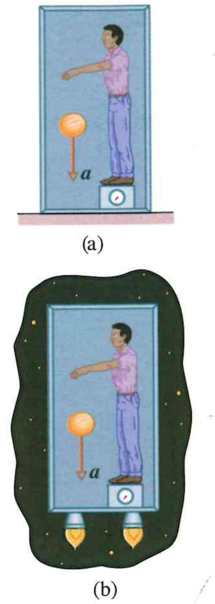


Figura 13.18 (a) Un fisico chiuso in una cabina ferma rispetto alla Terra vede cadere un melone con accelerazione $a = 9{,}8$ m/s^2. (b) Se la cabina sta accelerando a 9,8 m/s^2 nello spazio interstellare, il melone presenterà, rispetto all'osservatore chiuso nella cabina, la stessa accelerazione. Facendo esperimenti all'interno della cabina, il fisico non è in grado di capire in quale delle due situazioni si sta trovando. Ad esempio, la bilancia sulla quale sta in piedi indica sempre lo stesso peso.

Einstein e la gravitazione

Principio di equivalenza

Disse Einstein una volta: "Me ne stavo seduto all'ufficio brevetti a Berna quando d'improvviso mi balenò questo pensiero: – Se una persona è in caduta libera, non sente il proprio peso! – Rimasi stupefatto. Questa semplice constatazione mi impressionò profondamente. Mi spinse a studiare una teoria della gravitazione."

Così Einstein racconta di come fu portato a formulare la sua **teoria della relatività generale**. Il postulato fondamentale di questa teoria della gravitazione è chiamato **principio di equivalenza**, che afferma appunto l'equivalenza tra la gravitazione e l'accelerazione. Se un fisico fosse chiuso in una cabina molto piccola, come in figura 13.18, non sarebbe in grado di distinguere fra gravitazione e accelerazione. Supponiamo che stia in piedi su una bilancia a piattaforma. Nella figura 13.18a la cabina è ferma sulla Terra (e soggetta alla sola forza gravitazionale della Terra); nella figura 13.18b sta accelerando a 9,8 m/s^2 nello spazio interstellare (e soggetta alla sola forza che imprime l'accelerazione). Il nostro amico fisico in entrambe le situazioni percepirebbe e misurerebbe il proprio peso con lo stesso risultato. Inoltre, se un oggetto cadesse vicino a lui, lo vedrebbe cadere con la stessa accelerazione in entrambi i casi.

Curvatura dello spazio

Abbiamo finora attribuito il fenomeno della gravitazione all'azione di una forza che agisce tra le masse. Nella Teoria di Einstein, invece, si ha che la gravitazione è dovuta a una curvatura (o forma) dello spazio indotta dalla presenza delle masse. (Come evidenzieremo oltre in questo libro, lo spazio e il tempo sono intimamente legati; e in effetti la curvatura di cui parla Einstein si applica allo *spazio-tempo*, le quattro dimensioni combinate che descrivono il nostro universo.)

Esprimere con un disegno il modo in cui si manifesta questa curvatura dello spazio interstellare è davvero difficile. Può aiutarci un'analogia: supponiamo di assistere da una posizione orbitante a una gara fra due navi, che partono da due punti sull'equatore distanti tra loro 20 km e che si dirigono entrambe verso il polo sud (fig. 13.19a). Visti dalle navi i due cammini sono praticamente paralleli e giacciono su un piano. Naturalmente con l'avanzare delle loro posizioni i due cammini si avvicinano e al polo convergono in un sol punto. I marinai a bordo potrebbero interpretare questo avvicinamento progressivo come dovuto a una forza attrattiva che agisce tra le due navi. Ma noi, dall'alto del nostro osservatorio esterno, abbiamo chiarissima un'altra interpretazione, che attribuisce l'effetto di avvicinamento alla curvatura della superficie terrestre.

Nella figura 13.19b è rappresentata una gara analoga: due mele a una certa distanza l'una dall'altra vengono lasciate cadere dalla stessa quota sopra la superficie terrestre. Sebbene le due mele possano apparire in caduta su due cammini paralleli, in realtà le loro traiettorie si avvicinano progressivamente perché entrambe sono dirette verso il centro della Terra. Possiamo interpretare questo comportamento delle mele in termini di attrazione gravitazionale tra mele e Terra; ma possiamo anche interpretarlo come conseguenza della curvatura dello spazio in prossimità della

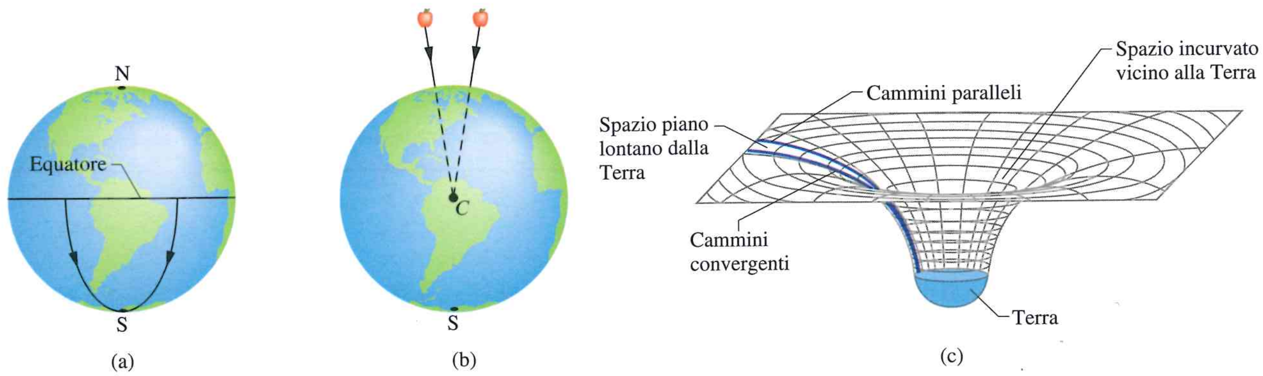
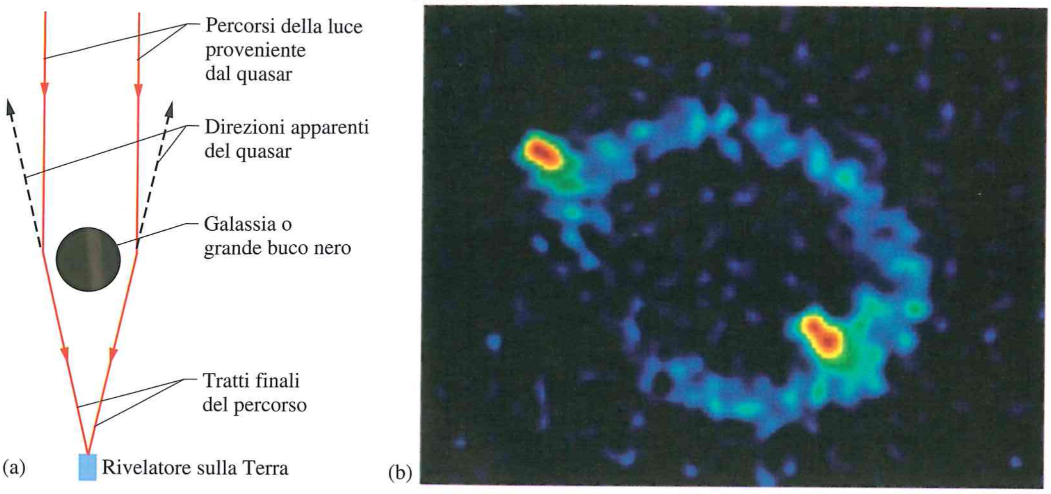


Figura 13.19 (a) Due oggetti che si muovono lungo due meridiani verso il polo sud convergono a causa della curvatura della superficie terrestre. (b) Due oggetti in caduta libera vicino alla Terra si muovono su traiettorie convergenti verso il centro della Terra a causa della curvatura dello spazio in prossimità della Terra. (c) A grande distanza dalla Terra (e da altre masse) lo spazio è piano e le rette parallele rimangono tali. Vicino alla Terra le linee parallele cominciano a convergere perché lo spazio è incurvato dalla presenza della massa terrestre.

ISBN 978-88-08-18229-6



Per gentile concessione di National Radio Astronomy Observatory.

Figura 13.20 (a) La luce proveniente da un quasar distante segue percorsi incurvati attorno a una galassia o a un buco nero perché queste masse incurvano lo spazio circostante. Quando i due raggi vengono intercettati, appaiono come se provenissero dai due prolungamenti dei tratti finali (linee tratteggiate). (b) L'anello di Einstein noto come MG 1131+0456 sullo schermo elettronico di un telescopio. La sorgente di luce (in realtà onde radio che hanno la stessa natura della luce) si trova molto oltre l'ampia e invisibile galassia centrale che produce l'anello; una porzione della sorgente appare sotto forma di due macchie lungo l'anello.

Terra, dovuta alla presenza della massa terrestre. Questa volta non possiamo però «vedere» la curvatura, perché non abbiamo a disposizione alcun osservatorio esterno alla curvatura dello spazio, analogo all'osservatorio esterno alla curvatura terrestre per le navi.
Possiamo figurarci questa curvatura con un disegno come quello di figura 13.19c: lì le mele si muoverebbero su una superficie incurvata verso la Terra per la presenza della sua massa.

Quando un raggio di luce transita in prossimità della Terra, il suo cammino piega leggermente per via della curvatura dello spazio, un effetto chiamato *lente gravitazionale*. Se passa vicino a un corpo più massiccio come una galassia o un buco nero, la deviazione è più consistente. Se questo corpo massiccio è situato tra noi e un quasar (una fonte di luce brillantissima molto distante), la luce proveniente dal quasar può essere deviata attorno al corpo massiccio ed essere diretta verso di noi anche se prima non lo era (fig. 13.20a). Così, dato che la luce sembra giungere da due diverse direzioni di poco scostate tra loro, noi vediamo lo stesso quasar in due posizioni diverse. In taluni casi i quasar ci appaiono come se si fondessero a formare un gigantesco arco luminoso, chiamato *anello di Einstein* (fig. 13.20b).

È più conveniente attribuire il fenomeno della gravitazione alla curvatura dello spazio-tempo dovuto alla presenza di masse o a una forza agente tra le masse? O piuttosto va attribuita all'azione di un particolare tipo di particella fondamentale detta *gravitone*, come alcune moderne teorie ipotizzano? Non lo sappiamo. Per quanto le teorie sulla gravitazione abbiano ottenuto enorme successo nello spiegare una quantità di fenomeni, dalle mele che cadono al moto delle stelle, non ne abbiamo ancora una comprensione completa sia su scala cosmologica sia sulla scala della fisica quantistica.

RIEPILOGO & SOMMARIO

Legge di gravitazione Ogni particella nell'universo attira ogni altra particella con una **forza gravitazionale** di intensità pari a

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \text{(legge di gravitazione di Newton)}, \qquad (13.1)$$

dove m_1 e m_2 sono le masse delle due particelle e r è la loro distanza. La *costante di gravitazione* G è una costante universale che vale $6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$.

Comportamento gravitazionale dei gusci sferici uniformi L'equazione 13.1 è valida soltanto per corpi puntiformi. La forza gravitazionale fra corpi di dimensioni non piccolissime deve in generale essere calcolata sommando (o integrando) le forze singole che agiscono su ogni particella componente il corpo. Se però il corpo è un guscio sferico uniforme oppure un solido a simmetria sferica, la forza gravitazionale netta da esso esercitata su oggetti *esterni* può essere calcolata come se la massa totale del corpo simmetrico fosse concentrata nel suo centro.

Sovrapposizione Le forze gravitazionali obbediscono al **principio di sovrapposizione**; ciò vuol dire che la forza totale $\boldsymbol{F}_{1,\mathrm{net}}$ che agisce su una particella chiamata particella 1 è uguale alla somma delle forze