Es. di riepilogo

1. Quante "parole" (anche senza significato) di 5 lettere fra loro distinte si possono formare con l'alfabeto italiano? (21 lettere)

   $n = 21$, $k = 5$

   $D_{n,k}$

2. Una persona ha 5 biciclette diverse (A, B, C, D, E) e decide di venderne 3. In quanti modi diversi può scegliere quali vendere?

   $C_{5,3}$

3. Una gelateria offre gelati di 10 gusti diversi. Quante varianti di coppetta posso comporre con 3 palline?

   $C^{*}_{10,3}$

4. Quante possibili password di 7 lettere prese in un alfabeto di 21 caratteri si possono scrivere?

$D^*_{21,7}$

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI

EQUAZIONI

Si presentano nella forma

$$A(x) = B(x)$$

dove A e B sono delle funzioni nella variabile x definite in un sottoinsieme E di $\mathbb{R}$.

- $A(x) = B(x)$ è equivalente (cioè ha lo stesso insieme di soluzioni) a

$$A(x) \cdot C(x) = B(x) \cdot C(x)$$

con $C(x) \neq 0 \quad \forall x \in E$

es. $A(x) = 3x - 5 \qquad B(x) = 2x + 1$

$A(x) = B(x) \iff x = 6$

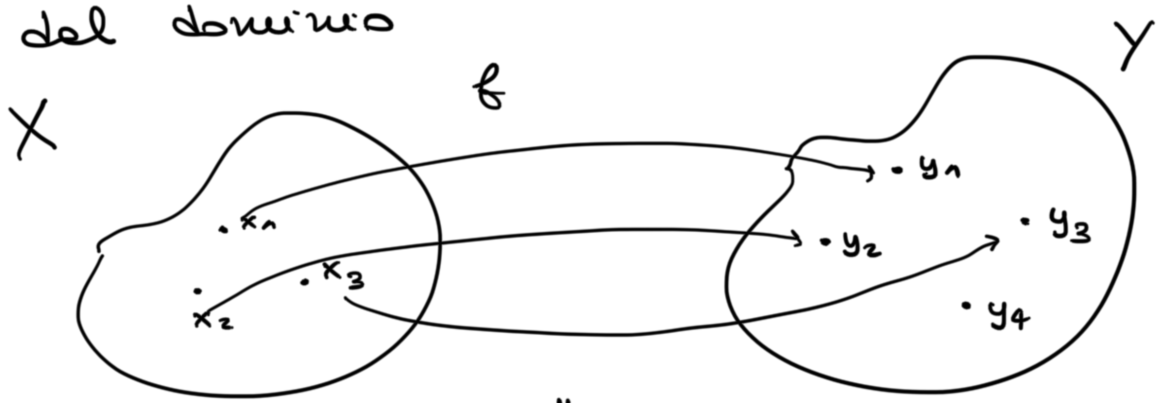
$A(x) \cdot C(x) = B(x) \cdot C(x) \qquad$ con $C(x) = x$

$C(0) = 0$

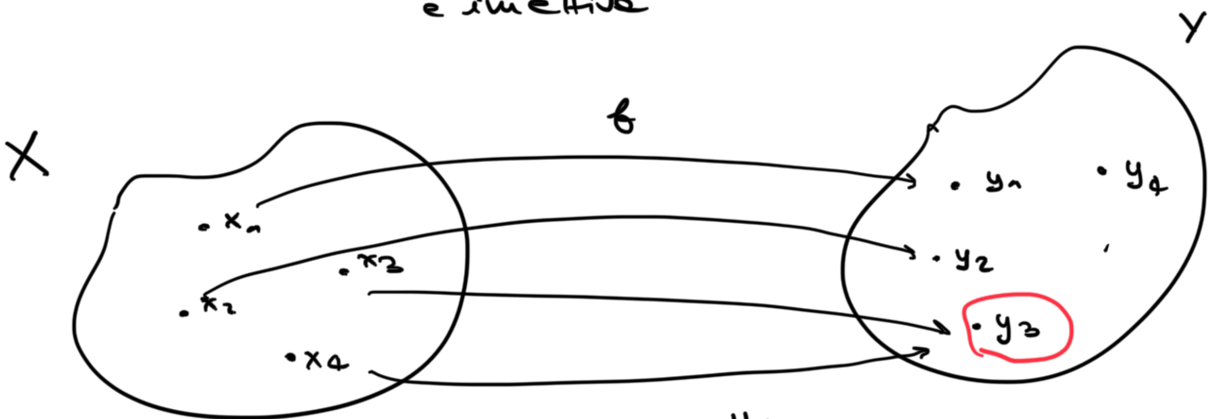
$x^2 = 6x \qquad x = 0 \lor x = 6$

non va bene.

- Una funzione $f: X \to Y$ si dice **INIETTIVA** se ogni elemento del codominio è immagine di al più un elemento del dominio



è iniettiva



non è iniettiva

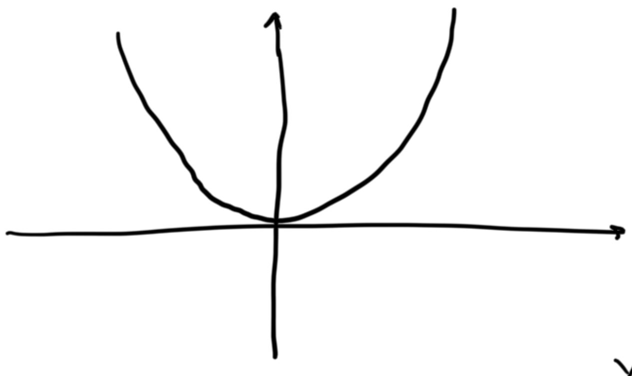
Es. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2$

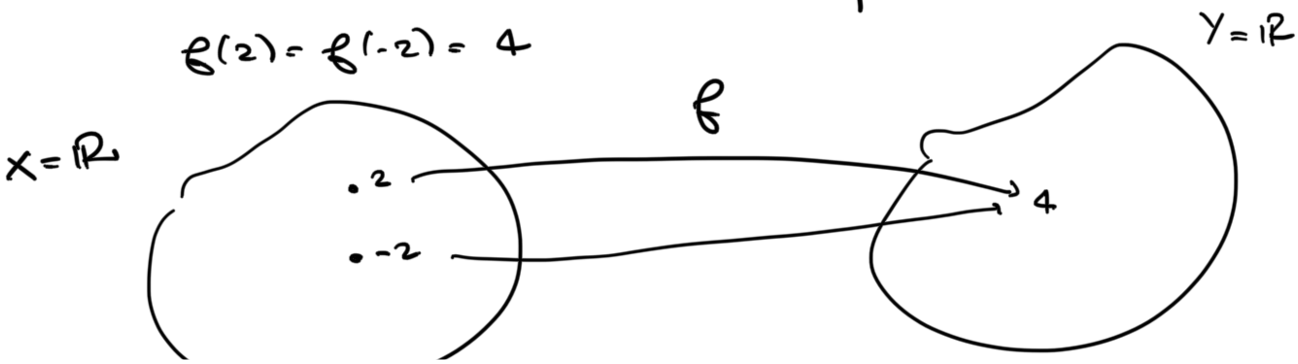
$2 \longmapsto (2)^2 = 4$

$-2 \longmapsto (-2)^2 = 4$

f non è iniettiva



$f(2) = f(-2) = 4$



- Se f è una funzione iniettiva per la quale esistono

$$f(A(x)) \quad e \quad f(B(x))$$

allora $f(A(x)) = f(B(x))$ è equivalente a $A(x) = B(x)$.

es. $A(x) = x-2$ $\qquad B(x) = 3$

$$A(x) = B(x) \iff x-2 = 3 \iff x = 5$$

f non iniettiva

$$[A(x)]^2 = [B(x)]^2$$

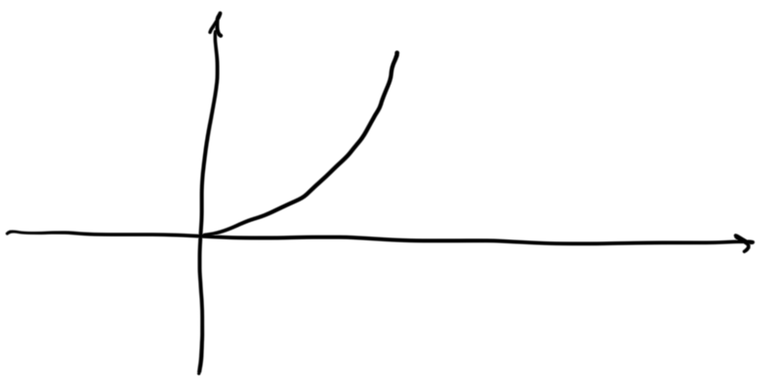
$$(x-2)^2 = 9$$

$$x^2 - 4x + 4 = 9$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \qquad x_{1,2} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$$

<u>OSS</u> : $\quad g : \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \mathbb{R}^+$

$$x \longmapsto x^2$$



Equazioni intere e fratte di primo grado

Sono così dette le equazioni in cui le funzioni $A(x)$ e $B(x)$ sono polinomi o somme di frazioni algebriche

Es. $$\underbrace{\frac{x+1}{x} + \frac{x}{x-1} - 2}_{A(x)} = \underbrace{\frac{2}{x^2-x}}_{B(x)}$$

$$E = \{ x \in \mathbb{R} : \; x \neq 0, \; x \neq 1 \}$$

$$\frac{(x+1)(x-1) + x^2 - 2x(x-1)}{x(x-1)} = \frac{2}{x(x-1)}$$

$$\frac{2x-1}{x(x-1)} = \frac{2}{x(x-1)} \iff \frac{2x-3}{x(x-1)} = 0 \iff x = \frac{3}{2}$$

La soluzione $x = 3/2$ è accettabile in quanto diverso da zero e uno.

Es. $$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{3x+1}{x^2-1}$$

$$E = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$$

$$\dots \quad \frac{-x-1}{x \cdot (x^2-1)} = 0 \iff x = -1 \Rightarrow \text{non è accett.}$$

Non ha soluzioni

18/09/2024 Ed C1 aula H

Inizio lezione (svolto alla lavagna)

Def: (Combinazioni con ripetizione)

Una combinazione con ripetizioni di n oggetti k alla volta consiste nella scelta di k oggetti fra gli n disponibili, ma ogni oggetto può venir scelto più di una volta e non è importante l'ordine delle scelte.

Il numero delle combinazioni con ripetizione di n oggetti k alla volta è

$$C^*_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!} = C_{n+k-1,k}$$

Es. $n=3$, $k=2$

$\{a,a\}$ $\{b,b\}$, $\{c,c\}$

$\{a,b\}$ $\{a,c\}$, $\{b,c\}$

$$C^*_{3,2} = \frac{(3+2-1)!}{\quad} = 6$$

$(3-1)!\ 2!$

Cenno di dimostrazione

Il numero $C^*_{n,k}$ conta in quanti modi possiamo scegliere k numeri fra 1 ed n, con ripetizioni e a meno dell'ordine

Consideriamo $a_1, a_2, \ldots, a_k$ una possibile di queste scelte e supponiamo di scegliere un ordine particolare ad esempio crescente

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \quad \ldots \quad \leq a_{k-1} \leq a_k \leq n \qquad (*)$$

Gli a_i potrebbero essere anche tutti uguali

Sommiamo nella formula $(*)$ 1 ad a_2, 2 ad a_3, e così via

$$1 \leq a_1 < a_2+1 < a_3+2 < \ldots < a_k + (k-1) \leq n+k-1$$

Ho trovato dunque una lista ordinata di k numeri distinti scelti fra 1 e $n+k-1$

in altre parole una combinazione senza ripetiz. di n oggetti presi k alla volta.

Viceversa supponendo di avere una comb. senza rip. di $n+k-1$ oggetti k alla volta, cioè di aver scelto k numeri distinti $b_1, \ldots, b_k$ fra 1 e $n+k-1$. Li ordino in ordine crescente

$$1 \leq b_1 < b_2 < b_3 < \quad < b_k \leq n+k-1$$

Sottraiamo 1 a b_2, 2 a b_3 e così via, otteniamo

$$1 \le b_1 \le b_2 - 1 \le b_3 - 2 \le \dots \le b_k - (k-1) \le n.$$

cioè una lista ordinata di k numeri, eventualm. ripetuti fra 1 ed n.

In altre parole abbiamo trovato che una combinaz. senza ripetizioni di $n+k-1$ oggetti presi k alla volta fornisce una combinaz. con ripetizioni di n oggetti k alla volta.

Dunque

$$C^*_{n,k} = C_{n+k-1,k}$$