18/03/2024

Lezione 3

Equazioni di secondo grado

(*) $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$

Si definisce il discriminante

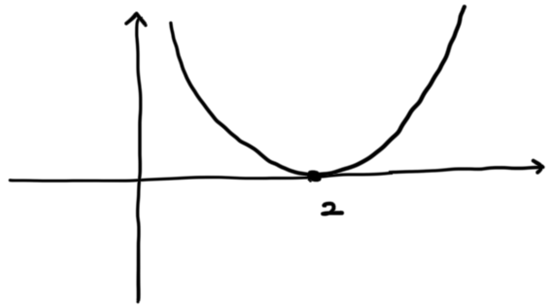
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

1. Se $\Delta < 0$ l'equazione (*) non ha soluzioni reali

$$x^2 + 1 = 0 \qquad \Delta = 0 - 4 < 0$$

2. Se $\Delta = 0$ l'equazione ha un'unica soluzione reale data da $x = -\frac{b}{2a}$

$$(x-2)^2 = 0$$

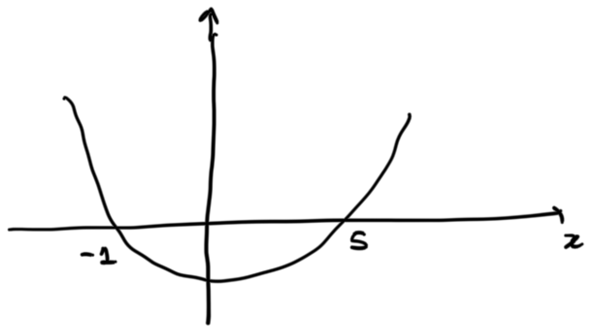


3. Se $\Delta > 0$ l'equazione ha due soluzioni reali date da

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \qquad \Delta = 16 + 20 = 36$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$$



Se considero la disequazione

$$a x^2 + bx + c \geq 0 \quad , a > 0$$

- Se $\Delta < 0$ la diseq. è verif. $\forall x$
- " $\Delta = 0$ " " " " $\forall x$
- " $\Delta > 0$ la disequazione è verificata per $\{x \leq x_1\} \cup \{x \geq x_2\}$

es. $x^2 - 3x + 2 \geq 0 \qquad \Delta = 9 - 8 = 1 > 0$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$$

$$=]-\infty ; 1] \cup [2, +\infty[$$

Equazioni e disequazioni biquadratiche

Es. Vogliamo risolvere

$$4x^4 - 17x^2 + 4 > 0 \qquad (1)$$

Introduciamo $t = x^2$

La diseq. (1) diventa

$$4t^2 - 17t + 4 > 0 \qquad (2)$$

$$\Delta = (17)^2 - 4\cdot 4\cdot 4 = 289 - 64 = 225 > 0$$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{225} = 15$ e si determinano

$$t_{1,2} = \frac{17 \pm 15}{8} = \begin{cases} 1/4 \\ \frac{32}{8} = 4 \end{cases}$$

La diseq (2) ha soluzioni

$$\{t < \tfrac{1}{4}\} \cup \{t > 4\}$$

Dunque la (1) ha soluzioni

$$\left]-\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}\right[\;\cup\;]-\infty, -2[\;\cup\;]2, +\infty[$$

Digr: $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} = (a; b) =]a; b[$

$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} = (a; b] =]a; b]$

Equazione di quarto grado reciproche

I specie:

$$P(x) = a x^4 + b x^3 + c x^2 + b x + a$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

II specie

$$P(x) = a x^4 + b x^3 - b x - a$$

$a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Oss Se x_0 è soluzione, ovvero se $P(x_0)=0$ allora anche $\frac{1}{x_0}$ è soluzione $P\left(\frac{1}{x_0}\right) = 0$.

Infatti

$$P\left(\frac{1}{x_0}\right) = a\left(\frac{1}{x_0}\right)^4 + b\left(\frac{1}{x_0}\right)^3 + c\left(\frac{1}{x_0}\right)^2 + b\left(\frac{1}{x_0}\right) + a =$$

$$= \frac{1}{x_0^4}\left(a + b x_0 + c x_0^2 + b x_0^3 + a x_0^4\right)$$

$$= \frac{1}{x_0^4} \cdot \underbrace{P(x_0)}_{=0} = 0$$

Metodo risolutivo per le equazioni di I specie

$$P(x) = a x^4 + b x^3 + c x^2 + b x + a$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

$$\frac{P(x)}{x^2} = a x^2 + b x + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2}$$

$$= a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c$$

Usiamo la sostituzione

$$t = x + \frac{1}{x}$$

$$t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \qquad t^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Quindi ci siamo ricondotti alla risoluzione di

$$a(t^2 - 2) + b \cdot t + c = 0$$

dunque $at^2 + bt + c - 2a$.

Es. Consideriamo la seguente disequaz. reciproca di I specie

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 2 > 0 \qquad (DR)$$

- $\boxed{x = 0}$ rende vera la diseq.
- $x \neq 0$

$a = 2, \; b = -3, \; c = 4$

$$2t^2 - 3t + \cancel{4} - \cancel{4} > 0$$

$$2t(t - 3) > 0 \qquad (1.a)$$

Le soluzioni di (1.2)

$$\underbrace{\{t<0\}}\cup\underbrace{\left\{t>\frac{3}{2}\right\}}$$

$t = x + \frac{1}{x}$

- $x+\frac{1}{x}<0 \iff \frac{x^2+1}{x}<0 \iff \boxed{x<0}$

- $x+\frac{1}{x}>\frac{3}{2} \iff \frac{x^2+1}{x}>\frac{3}{2} \iff \frac{2x^2-3x+2}{2x}>0$

- $2x^2-3x+2>0$ $\qquad \Delta = 9-16<0$

  Dunque $2x^2-3x+2>0 \quad \forall x$

- $2x>0 \quad \forall x>0$

  Troviamo che $\frac{2x^2-3x+2}{2x}>0 \quad \boxed{\forall x>0}$

$$S=\{0\}\cup\{x<0\}\cup\{x>0\}=\mathbb{R}$$

Metodo risolutivo per le equazioni di II specie

Consideriamo il polinomio

$$P(x)=ax^4+bx^3-bx-a$$

$a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Osserviamo che

$$P(1) = a + b - b - a = 0$$

$$P(-1) = a - b + b - a = 0$$

Dunque 1 e -1 sono due radici del polinomio, che dunque può venir fattorizzato come segue

$$P(x) = (x-1)(x+1)(ax^2 + bx + a)$$

Es. Risolviamo la seguente disequaz. di II specie

$$x^4 + 4x^3 - 4x - 1 \geq 0$$

$a = 1 \quad b = 4$

Applicando la scomposizione appena introdotta si ha che

$$\underbrace{(x-1)}_{\mathrm{I}}\underbrace{(x+1)}_{\mathrm{II}}(\underbrace{x^2 + 4x + 1}_{\mathrm{III}}) \geq 0$$

Studiamo il segno dei 3 fattori:

I.) $x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$

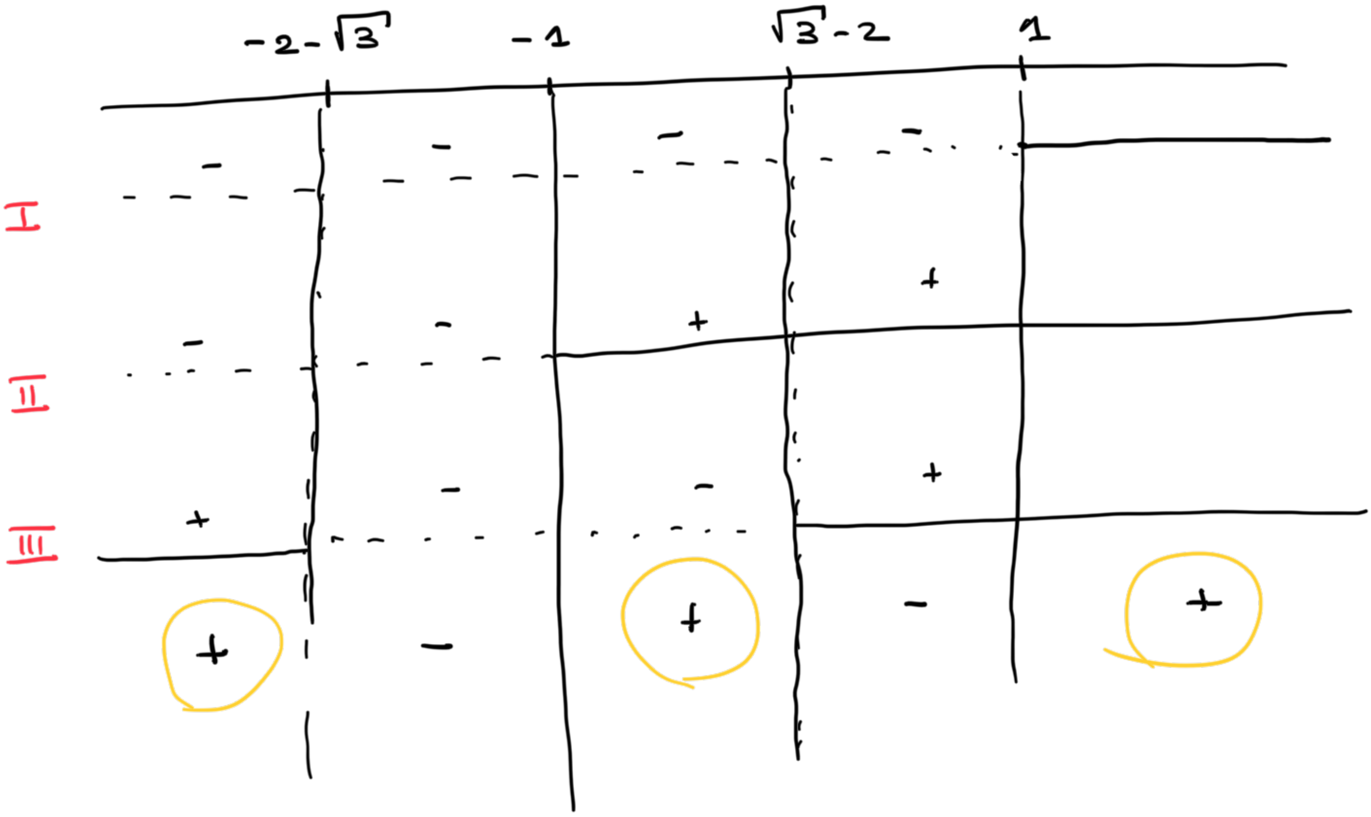
II) $x+1 \geq 0 \iff x \geq -1$

III) $x^2+4x+1 \geq 0$

$$\Delta = 16-4 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = \begin{cases} -2+\sqrt{3} \\ -2-\sqrt{3} \end{cases}$$

$$]-\infty; -2-\sqrt{3}] \cup [-2+\sqrt{3}, +\infty[$$



L'insieme delle soluzioni è

$$S =]-\infty; -\sqrt{3}-2] \cup [-1, \sqrt{3}-2] \cup [1; +\infty[$$

DISEQUAZIONI RAZIONALI

In generale, una disequazione razionale può essere scritta nella forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0 \qquad (DRa)$$

dove $P(x)$, $Q(x)$ sono due polinomi.

Es. Risolvere la seguente disequaz.

$$2 + \frac{1}{x-1} \geqslant \frac{1}{x+1}$$

$$E = \{ x \in \mathbb{R} : x \neq 1 \, , \, x \neq -1 \} = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$$

Possiamo ricondurci nella forma (DRa)

$$\frac{2x^2 - 2 + x + 1 - x + 1}{(x-1)(x+1)} \geqslant 0 \iff$$

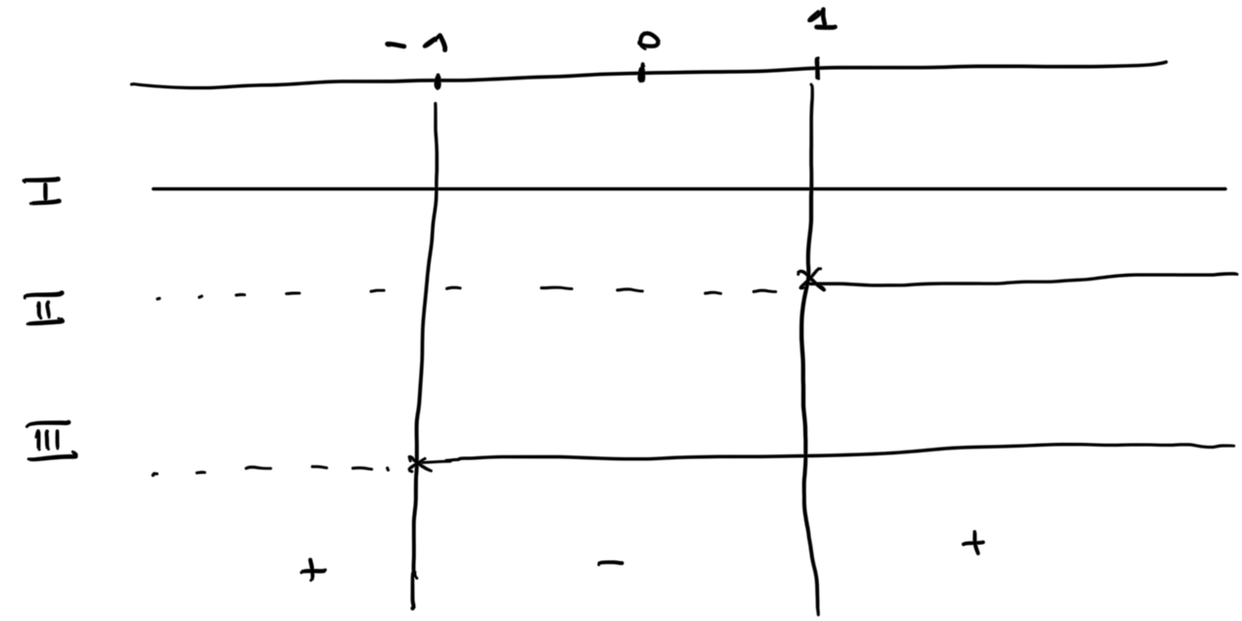
$$\frac{2x^2}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

Studiamo il segno dei 3 fattori

I) $2x^2 \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

II) $(x-1) \geq 0 \qquad x \geq 1$

III) $(x+1) \geq 0 \qquad x \geq -1$



L'insieme delle soluzioni è

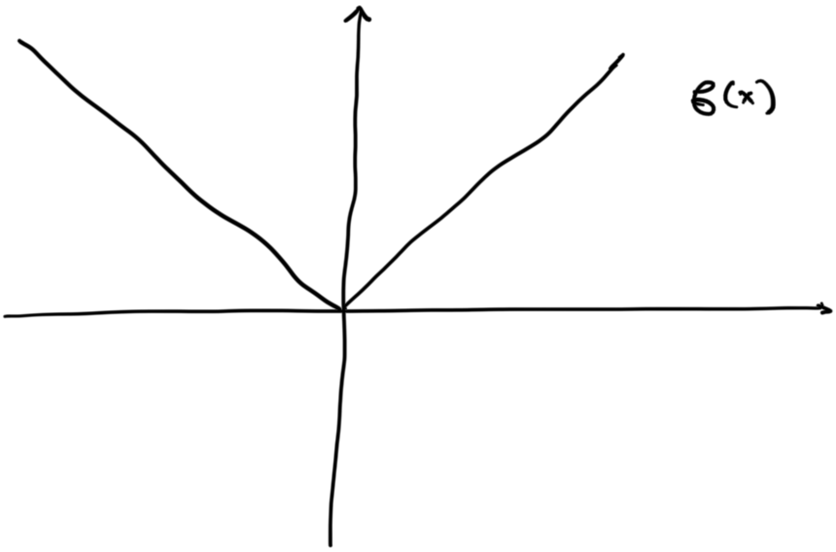
$$S =]-\infty; -1[\; \cup \; \{0\} \; \cup \;]1; +\infty[$$

Ripasso sul valore assoluto

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto |x|$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$|3| = 3$ $\qquad$ $|-3| = 3$



Consideriamo un numero reale $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ ed esaminiamo la disuq.

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

Proprietà del valore assoluto

- $-|x| \leq x \leq |x|$

- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$