19/09/2024

Lezione 4

Considero $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$

$$|x| \leq a \iff \boxed{-a \leq x \leq a}$$

Diseguaglianza triangolare

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

dim: $-|x| \leq x \leq |x|$ a)

$-|y| \leq y \leq |y|$ b)

Sommando membro a membro a) e b)

$$-|x| - |y| \leq x+y \leq |x| + |y|$$

$$\boxed{-(|x| + |y|) \leq x+y \leq |x| + |y|} \quad (*)$$

Chiamiamo $z = x+y$ e $a = |x| + |y|$

Di conseguenza per quanto precedent. osservato si ha che (*) è equivalente a

$$-a \leq z \leq a$$

che è equivalente a

$$|z| \leq a$$

Dunque $|x+y| \leq |x| + |y|$

Disequazioni con il valore assoluto

Es. Risolvere

$$2 - |x-2| \geq 0 \qquad (c)$$

Dalla definizione di valore assoluto si ha che

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{se } x-2 \geq 0 \\ -(x-2) & \text{se } x-2 < 0 \end{cases}$$

Dunque la disequazione c) equivale all'unione delle soluzioni dei due sistemi:

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2-(x-2) \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x-2 < 0 \\ 2+(x-2) \geq 0 \end{cases}$$

Da cui

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ \end{cases} \cup \begin{cases} x < 2 \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4-x\geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 2 \\ x\leq 4 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x<2 \\ x\geq 0 \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$[2;4] \qquad\qquad [0,2[$$

$$S=[0;2[\,\cup[2;4]=[0;4]$$ //

Es. Risolviamo

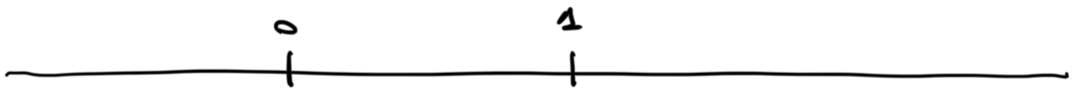
$$2|x^2-x|>|x|$$

Dimostriamo in 2 modi:

1 modo

Esaminiamo il segno di x^2-x

$$x(x-1)\geq 0 \quad (=) \quad \{x\leq 0\}\cup\{x\geq 1\}$$



In base a questa osservazione posso "togliere" il valore assoluto come segue:

$$\begin{cases} x\leq 0 \quad \text{———} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 0 \\ 2(x^2 - x) > |x| = -x \end{cases}$$

$$\cup$$

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 2(x - x^2) > |x| = x \end{cases}$$

$$\cup$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ 2(x^2 - x) > |x| = x \end{cases}$$

Dunque

$$\begin{cases} x \le 0 \\ 2x^2 - x > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 0 < x < 1 \\ -2x^2 + x > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2 - 3x > 0 \end{cases}$$

Dunque

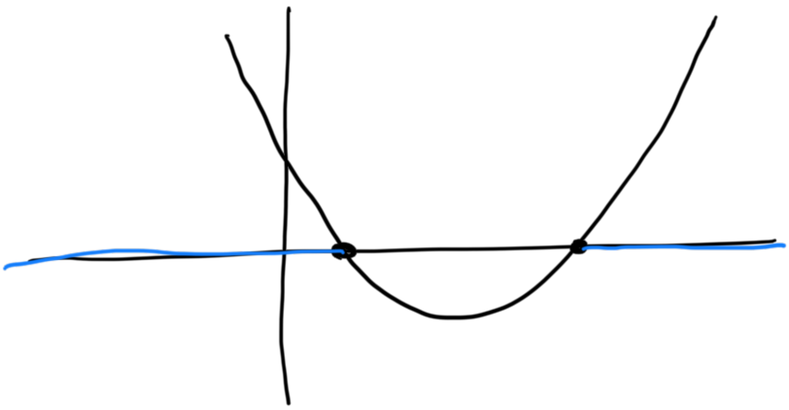
$$\begin{cases} \underline{x \leq 0} \\ \underline{x(2x-1) > 0} \end{cases} \cup \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x(2x-1) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x\left(x - \frac{3}{2}\right) > 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono

$$\underbrace{\underbrace{\{x \leq 0\}}_{A^1} \cap \underbrace{\left\{\{x < 0\} \cup \{x > \tfrac{1}{2}\}\right\}}_{A^2}}$$

$$A^1 \cap A^2 = \{x < 0\}$$

$$2x^2 - x > 0$$



Procedendo in maniera analoga

$$A^2 \cap B^2 = \left\{ 0 < x < \frac{1}{2} \right\}$$

$$A^3 \cap B^3 = \left\{ x > \frac{3}{2} \right\}$$

$$(A^1 \cap B^1) \cup (A^2 \cap B^2) \cup (A^3 \cap B^3) =$$

$$= \left\{ x < \frac{1}{2},\ x \neq 0 \right\} \cup \left\{ x > \frac{3}{2} \right\}$$

② modo

$2|x^2-x|>|x|$ è equivalente a

$2|x(x-1)|>|x|$

$2|x||x-1|>|x|$

Consideriamo $x\neq 0$

$2|x-1|>1$

$|x-1|>\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x-1\geq 0 \\ x-1>\frac{1}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x-1<0 \\ 1-x>\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x\geq 1 \\ x>\frac{3}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x<1 \\ \frac{1}{2}>x \quad \left(x<\frac{1}{2}\right) \end{cases} \quad x\neq 0$$

$\Downarrow$

$$\left\{x>\frac{3}{2}\right\} \cup \left\{x<\frac{1}{2},\ x\neq 0\right\}$$

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

Una disequazione si dice irrazionale quando compaiono dei radicali che contengono l'incognita.

Es. $\sqrt{2-x^2} > 2x-1$

Dobbiamo imporre delle condizioni di esistenza della radice

$$2-x^2 \geq 0$$

$$\iff \quad -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

Distinguiamo due casi a seconda del segno del secondo membro:

$$A) \begin{cases} 2x-1<0 \\ \sqrt{2-x^2} > 2x-1 \\ -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases} \quad \cup \quad B) \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ \sqrt{2-x^2} > 2x-1 \\ -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

$$A) \begin{cases} x < 1/2 \\ -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases} \iff -\sqrt{2} \leq x < \frac{1}{2}$$

$$B) \begin{cases} x \geq 1/2 \end{cases}$$

B)

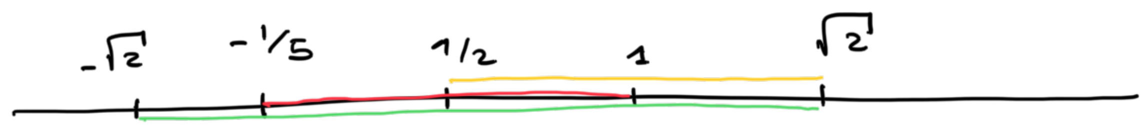
$$\begin{cases} \sqrt{2-x^2} > 2x-1 \\ -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

Elevando entrambi i membri della seconda diseq di B) al quadrato trovo:

$$\begin{cases} 2-x^2 > (2x-1)^2 \\ -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 5x^2-4x-1 < 0 \\ -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ x \geq 1/2 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \boxed{-\frac{1}{5} < x < 1} \\ \boxed{-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}} \\ \boxed{x \geq 1/2} \end{cases}$$



Dunque le soluzioni di B sono

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} \le x < 1 \right\}$$

Concludendo le soluzioni sono

$$\left[-\sqrt{2} ; \frac{1}{2} \right[\cup \left[\frac{1}{2} ; 1 \right[=$$

$$= \left[-\sqrt{2} ; 1 \right[$$

FUNZIONI

Consideriamo

$$f : \boxed{E} \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}}$$

una funzione reale di variabile reale, ovvero $E \subseteq \mathbb{R}$

FUNZIONI PARI E FUNZIONI DISPARI

Def: Una funzione

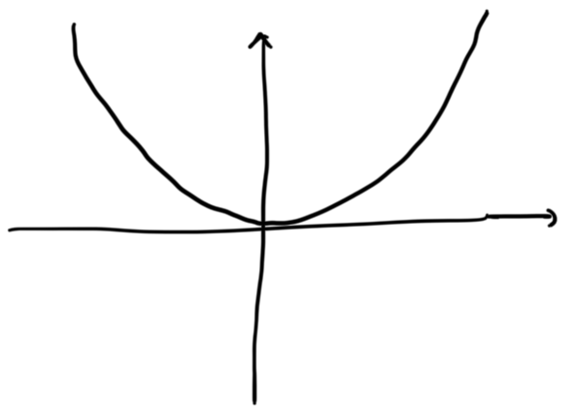
$$f : E \to \mathbb{R}$$

si dice PARI se

$\forall x \in E$ vale $f(x) = f(-x)$

Es. Funzioni pari

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto x^2$

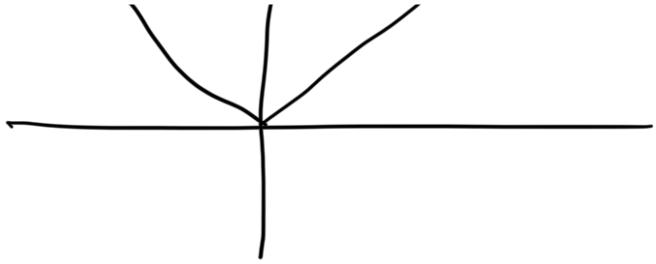


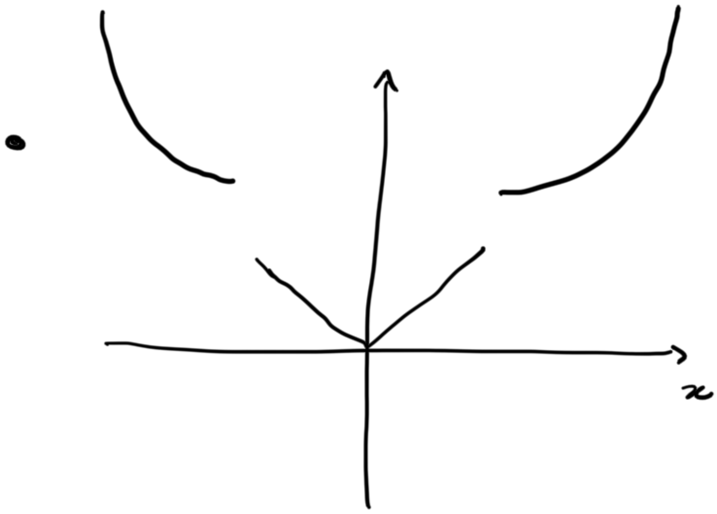
- $f(x) = x^m$ con $m \in \mathbb{N}$, m pari

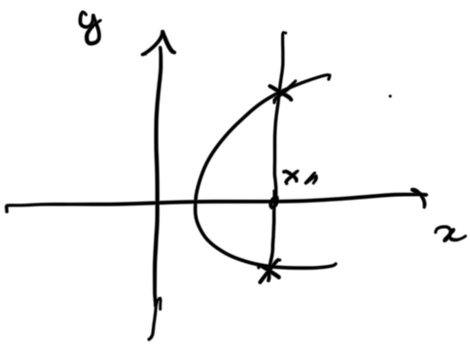
  allora f è una funz. pari.

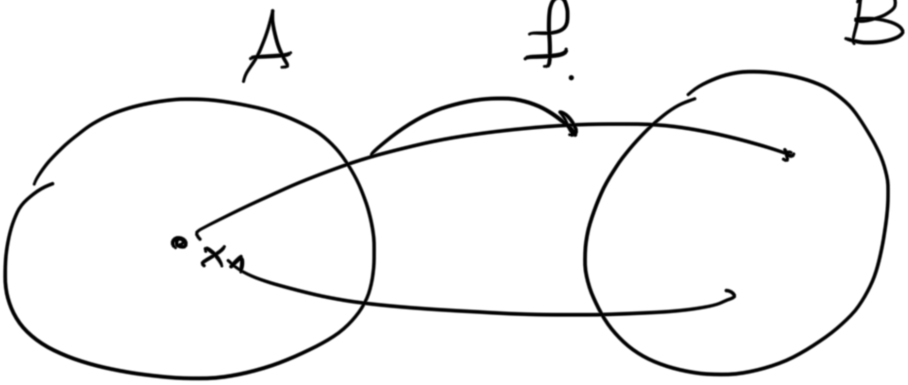
- $f(x) = \cos(x)$ è una funz. pari

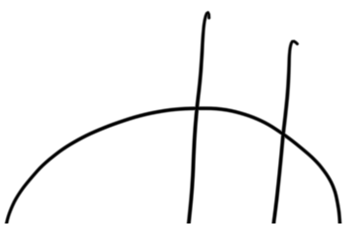
-  $f(x) = |x|$





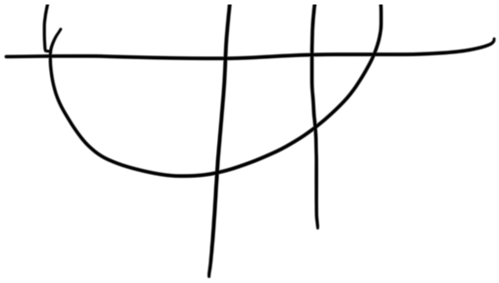






$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$g(x,y) = 0$$



Def: Una funzione

$$f : E \to \mathbb{R}$$

si dice DISPARI

se $\forall x \in E$ si ha

$$f(-x) = -f(x)$$

Es.

$f(x) = x$

$f(x) = x^3$

$f(x) = x^n \qquad n \in \mathbb{N}, \; n$ dispari

$f(x) = \sin(x)$

Es: Affermo che

$$f(x) = x + 1$$

non è né pari né dispari.

$f(2) = 3$

$\breve{f}(-2) = -1$