Risoluzione di un sistema lineare

Vogliamo risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + 6y + 5z = -10 \\ -x - 6y - 4z = 9 \\ -x - 6y - 10z = 15 \end{cases}$$

1. Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti e della matrice completa. Abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ -1 & -6 & -4 \\ -1 & -6 & -10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -10 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Per calcolare il rango delle matrici utilizziamo l'algoritmo di Gauss di gradinizzazione:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ -1 & -6 & -4 \\ -1 & -6 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{II + I} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -6 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{III + I}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{III + 5 \cdot II} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dato che quest'ultima matrice a scala ha due righe non nulle otteniamo che il rango di A è 2

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 & -10 \\ -1 & -6 & -4 & 9 \\ -1 & -6 & -10 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}+\mathrm{I}]{\mathrm{II}+\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}+5\cdot\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dato che quest'ultima matrice a scala ha due righe non nulle otteniamo che il rango di $(A|b)$ è 2.

Dato quindi che $rg(A) = rg(A|b)$, il teorema di Rouché-Capelli ci assicura che il sistema è compatibile e che la generica soluzione dipende da $3-2=1$ parametro.

2. Calcoliamo una base dello spazio delle soluzioni del sistema lineare associato $A\cdot X = 0$. Dato che le operazioni elementari sulle righe determinano sistemi equivalenti, possiamo considerare $\tilde{A}\cdot X = 0$, dove $\tilde{A}$ è la matrice a scala che abbiamo ottenuto al punto precedente partendo da A.

$$\begin{cases} x + 6y + 5z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = -6y \\ z = 0 \end{cases}$$

Pertanto la soluzione generica di questo sistema è della forma $\begin{pmatrix} -6y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, il che ci dice che $\left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

è una base dello spazio delle soluzioni di $A \cdot X = 0$.

3. Calcoliamo ora una soluzione particolare del sistema $A \cdot X = b$.

Nuovamente, dato che le operazioni elementari sulle righe determinano sistemi lineari equivalenti, possiamo considerare $\tilde{A} \cdot X = \tilde{b}$

dove $(\tilde{A} | \tilde{b})$ è la matrice a scala ottenuta a partire da $(A|b)$:

$$\begin{cases} x + 6y + 5z = -10 \\ z = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 6y = -5 \\ z = -1 \end{cases}$$

assegnando un valore a y, come 0, otteniamo la soluzione

speciale $\tilde{s} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

4. A questo punto sappiamo che la generica soluzione di $A \cdot X = b$

si scrive nella forma

$$s = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$