

Algebra Lineare ed elementi di Geometria
Matematica per l'Economia e la Statistica 2
A.A. 2023/24
Simulazione di prova scritta

Cognome	Nome

- (1) **(5 punti)** Si dia la definizione di sistema lineare e di una sua soluzione.
Si enunci e si dimostri il Teorema di Rouché - Capelli.

(2) Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) **(3 punti)** Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base standard \mathcal{E} di \mathbb{R}^3 .

(b) **(5 punti)** Si determinino la dimensioni di $\ker(f)$ e $\text{im}(f)$ e delle loro basi.

(c) **(3 punti)** Si dica se il sistema lineare $A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ sia compatibile e, in caso affermativo, si trovi la sua generica soluzione.

(3) Si consideri la matrice simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

- **(4 punti)** Si determini il polinomio caratteristico di $L_B: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

- **(5 punti)** Si trovi una base \mathcal{B} di autovettori per L_B .

- (4) • **(4 punti)** Si determini un'equazione cartesiana della retta piana $r \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ parallela alla retta s di equazioni

$$s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \end{cases}$$

e passante per il punto $Q = (1, 2)$.

- **(3 punti)** Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ si considerino il piano H e la retta s :

$$H: x - y + z = 7 \quad s: \begin{cases} x = 7 \\ y = 3t \\ z = 1 - 6t \end{cases}$$

Si dica se H ed s sono incidenti o paralleli.

Inoltre, si determinino delle equazioni parametriche di una retta r incidente s e contenuta in H :

$$r \cap s \neq \emptyset, \quad r \subset H.$$