Algebra lineare ed elementi di geometria

Matematica per l'economia e la statistica 2

A.A. 2023/24

Risoluzione della simulazione di prova scritta

Esercizio 1

- Si dia la definizione di sistema lineare e di una sua soluzione.

Def: sia K un campo; un sistema lineare è un insieme di m equazioni in n incognite a coefficienti in K della forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove $x_1, \dots, x_n$ sono le incognite e $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $a_{ij} \in K$ e $b_i \in K$; una soluzione di tale sistema è un vettore $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$, $s \in K^n$ tale per cui sostituendo x_j con s_j per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$, tutte le precedenti uguaglianze risultano vere.

- Si enunci e si dimostri il teorema di Rouché-Capelli.

Teorema: sia $A \in M_{m,n}(K)$ e sia $b \in K^m$, allora il sistema lineare $AX = b$ è compatibile se e solo se $rg(A) = rg(A|b)$; in tal caso, la generica soluzione del sistema dipende da $n - rg(A)$ parametri

Dim: notiamo preliminarmente che, se $s \in K^n$, allora

$$s \text{ è soluzione di } AX = b \iff As = b$$

$$\iff b = s_1 \cdot A^{(1)} + \dots + s_n \cdot A^{(n)}$$

ora mostriamo le due implicazioni del "se e solo se"

"$\Rightarrow$" supponiamo che $AX = b$ sia compatibile, allora esiste $s \in K^n$ soluzione del sistema, allora $b = s_1 \cdot A^{(1)} + \dots + s_n \cdot A^{(n)}$, allora $b \in$ $\in \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$; questo implica che

$$\operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$$

infatti,

"$\subseteq$" questa inclusione vale qualsiasi sia b

"$\supseteq$" se $u \in \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$, allora $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot A^{(i)} + \mu \cdot b =$

$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A^{(i)} + \mu \cdot \sum_{i=1}^{n} s_i A^{(i)}$, allora $u \in \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$

pertanto

$$\underbrace{\dim \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})}_{= rg(A)} = \underbrace{\dim \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)}_{= rg(A|b)}$$

"$\Leftarrow$" supponiamo che valga $rg(A) = rg(A|b)$, allora

$$\dim \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = \dim \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$$

dato che, inoltre, abbiamo sempre che $\operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \subseteq \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$, possiamo concludere che tali due sottospazi vettoriali sono, in effetti, uguali, e in particolare dunque $b \in \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$, pertanto $b = s_1 A^{(1)} + \dots + s_n A^{(n)}$ per qualche $s_1, \dots, s_n \in K$, e quindi il vettore $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ è soluzione di $AX = b$, che è pertanto compatibile mostriamo ora la seconda parte dell'enunciato; dai teoremi sui sistemi lineari (teorema di struttura e di dimensione) sappiamo che quando il sistema $AX = b$ è compatibile, allora la sua generica soluzione $s \in K^n$ si può scrivere come $s = \tilde{s} + s_0$ dove $\tilde{s}$ è una fissata soluzione di $AX = b$, mentre s_0 è una generica soluzione di $AX = 0$ (il sistema lineare omogeneo associato); dato che il sistema $AX = 0$ ha uno spazio delle soluzioni di dimensione $n - rg(A)$, allora fissata una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_{n-rg(A)}\}$ di tale spazio, abbiamo che la generica soluzione s di $AX = b$ si può scrivere come

$$s = \tilde{s} + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-rg(A)} v_{n-rg(A)}$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-rg(A)} \in K$ sono parametri liberi (ovvero, per ogni scelta di parametri si ottiene una soluzione).

Esercizio 3

Sia $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

a. Si scrive la matrice $A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$. Vale che

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

quindi $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b. Si determino le dimensioni di $\ker(f)$ ed $\text{im}(f)$ e delle loro basi.

Ricordiamo preliminarmente che deve valere

$$\dim \ker f + \dim \text{im} f = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

Cominciamo con il determinare $\text{im}(f)$: sappiamo che, dato che $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, allora $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ è un sistema di generatori di $\text{im}(f)$; per ottenere da esso una base adoperiamo l'algoritmo dello scarto che abbiamo visto in una delle dimostrazioni;

1. $f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è non nullo, e dunque lo manteniamo

2. $f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ non è un multiplo di $f(e_1)$, e dunque manteniamo anch'esso;

3. $f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è linearmente dipendente da $f(e_1)$ ed $f(e_2)$ (infatti $f(e_3) = f(e_2) - f(e_1)$) e quindi lo scartiamo.

Quindi $\{f(e_1), f(e_2)\}$ è una base di $\text{im}(f)$, che ha pertanto dimensione 2; rimane da determinare una base di $\ker(f)$, e dato che sappiamo che quest'ultimo ha dimensione 1, abbiamo che una base di $\ker(f)$ sarà costituita da un qualsiasi elemento non nullo di $\ker(f)$; notiamo che

$$f(e_1) + f(e_3) - f(e_2) = 0 \iff e_1 + e_3 - e_2 \in \ker(f)$$

dunque $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(f)$ e $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\ker(f)$

se non avessimo notato la relazione precedente sarebbe stato sufficiente determinare le soluzioni di $AX = 0$ per ottenere $\ker(f)$

c. Il sistema $AX = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ è il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

esso è sicuramente compatibile, dal momento che $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2A^{(2)}$ e dunque il vettore dei termini noti appartiene allo span dei vettori colonna della matrice A; per risolvere il sistema usiamo la gradinizzazione di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - x_2 \\ x_2 = 2 - x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2 - x_3 \end{cases}$$

pertanto la generica soluzione è della forma

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ 2 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3

Si consideri la matrice simmetrica:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

a. $P_\lambda(L_B) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -6-\lambda \end{pmatrix} = (-6-\lambda)\left[(3-\lambda)^2 - 9\right]$

$$= -(\lambda+6)(3-\lambda+3)(3-\lambda-3) = +\lambda(\lambda+6)(\lambda-6)$$

quindi lo spettro di L_B è $\{0, 6, -6\}$

b. dal momento che i tre autovalori sono tutti distinti, sappiamo che L_B è diagonalizzabile; determiniamo i tre autospazi:

$$\mathrm{Aut}(0): \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathrm{Aut}(0) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\mathrm{Aut}(6): \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{Aut}(6) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\mathrm{Aut}(-6): \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathrm{Aut}(-6) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

dunque una base $\mathcal{B}$ di autovettori è $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Esercizio 4

a. La giacitura di s è $\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, per cui un'equazione cartesiana della retta parallela ad s e passante per $Q = (1, 2)$ è

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ -1 & y-2 \end{pmatrix} = 0$$

ovvero $(y-2)+(x-1) = 0$, ovvero $x+y-3=0$

b. La giacitura di H è data dalle soluzioni di

$$x - y + z$$

ovvero dai vettori della forma $\begin{pmatrix} x \\ x+z \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

quindi la giacitura di H è $\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

La giacitura di s è $\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}0\\3\\-6\end{pmatrix}\right)$. Pertanto, H ed s sono paralleli se e solo se $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\-6\end{pmatrix}$ sono linearmente dipendenti, ovvero se e solo se

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 3\\0 & 1 & -6\end{pmatrix} = 0$$

Vale che

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 3\\0 & 1 & -6\end{pmatrix} = 1\cdot(-6-3) = -9$$

e quindi H ed s sono incidenti.

Se vogliamo ottenere una retta incidente ad s e contenuta in H, allora tale retta r deve passare per $s \cap H$. Determiniamo quindi il punto di incidenza tra s ed H. Tale punto P ha coordinate $P=(a,b,c)$ tali per cui

$$a - b + c = 7 \quad \text{e} \quad \begin{cases} a = 7 \\ b = 3t \\ c = 1-6t \end{cases} \quad \text{per qualche } t \in \mathbb{R}$$

allora deve valere che

$$7 - (3t) + (1-6t) = 7 \Leftrightarrow 1-9t=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{9}$$

il punto P è quindi

$$P = \left(7, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right)$$

Per trovare una retta r con le proprietà che vogliamo è sufficiente

quindi considerare un qualsiasi vettore nella giacitura di H, come

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e considerare la retta per P di giacitura span $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$,

la quale ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 7 + t \\ y = 1/3 + t \\ z = 1/3 \end{cases}$$