

**Algebra Lineare ed elementi di Geometria
Matematica per l'Economia e la Statistica 2
A.A. 2023/24
Simulazione di prova scritta**

Cognome	Nome

(1) **(5 punti)** Si dia la definizione di matrice invertibile e di matrice inversa.

Si illustri il metodo per il calcolo della matrice inversa usando operazioni elementari.

Si dimostri che se A e B sono matrici $n \times n$ invertibili, allora $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(2) Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) **(2 punti)** Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica \mathcal{E} di \mathbb{R}^3 .

(b) **(4 punti)** Si determinino la dimensioni di $\ker f$ e $\operatorname{im} f$ e delle loro basi.

(c) **(3 punti)** Si dica se il sistema lineare $A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sia compatibile e, in caso affermativo, si trovi la sua generica soluzione.

(3) Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) **(4 punti)** Si determini il polinomio caratteristico di $L_B: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

(b) **(5 punti)** Si trovi una base \mathcal{B} di autovettori per L_B .

- (4) (a) **(3 punti)** Si determinino delle equazioni parametriche della retta piana $L \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ passante per i punti $Q = (1, 3)$ e $P = (-1, 4)$.

- (b) **(5 punti)** Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ si considerino il piano H e la retta s :

$$H : x + y + z = 3 \quad s : \begin{cases} x + y + z = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Si dica se H ed s sono incidenti o paralleli.

Inoltre, si determinino delle equazioni parametriche di una retta r incidente s e incidente H :

$$r \cap s \neq \emptyset, \quad r \cap H \neq \emptyset.$$