**Algebra Lineare ed Elementi di Geometria**
**Matematica per l'Economia e la Statistica 2**
**A.A. 2023/24**
**Prova scritta del 30.01.2024**

| Cognome | Nome |
|---|---|
| | |

(1) **(5 punti)** Si dia la definizione di sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $V$ su un campo $K$. Si dia la definizione di sistema lineare omogeneo.

Si enunci e si dimostri il Teorema di struttura per sistemi lineari omogenei.

(2) Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ -3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ 7x_1 - 3x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) **(2 punti)** Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di $f$ nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

(b) **(4 punti)** Si determinino delle basi di $\ker(f)$ e di $\operatorname{im}(f)$ e le dimensioni di questi ultimi. Dire se sia o meno possibile determinare un elemento $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \ker(f)$ tale che $x_1 + x_2 = 1$ e argomentare la propria risposta.

(c) **(3 punti)** Si trovi almeno un valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ tale per cui il sistema lineare $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-\alpha \\ 3 \end{pmatrix}$ sia compatibile e si trovi la sua generica soluzione.

(3) Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 10 \\ 6 & 2 & 14 \\ -3 & -1 & -7 \end{pmatrix}.$$

(a) **(4 punti)** Si determini il polinomio caratteristico di $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

(b) **(5 punti)** Si trovi una base $\mathcal{B}$ di autovettori per $L_A$.
Si calcoli la matrici di cambio di base $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ dove $\mathcal{E}$ è la base standard di $\mathbb{R}^3$.

(4) (a) **(3 punti)** Si determinino delle equazioni parametriche del piano $H \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ tale che:
- $H$ sia parallelo al piano $M \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ di equazione cartesiana $x - 2y + z = 4$;
- $H$ passi per il punto $Q = (-1, 2, 1)$.

(b) **(5 punti)** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino la retta $r$ e il piano $H$:

$$r\colon \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -2 - 2t \end{cases} \qquad H\colon \ 2x - y + z = 2$$

Descrivere la posizione reciproca tra $r$ e $H$.
Se $r$ e $H$ sono incidenti in un punto, determinare tale punto.
Se $r$ è contenuta in $H$, determinare una retta $s \subset H$ incidente $r$ in un solo punto.
Se $r$ è parallela ad $H$ ed $r \cap H = \emptyset$, trovare un piano $M$ parallelo ad $H$ e passante per $r$.