

# **COMPORTAMENTO MECCANICO DELLE TERRE: RESISTENZA E RIGIDITÀ PROVE DI LABORATORIO**

Prof. Ing. Geol. Eugenio Castelli

## RELAZIONI TRA SFORZI E DEFORMAZIONI NELLE TERRE

Nelle terre si ha la presenza di una quantità di diversi comportamenti in relazione alle sollecitazioni in gioco e alle deformazioni corrispondenti.

Inoltre le terre hanno in generale un **comportamento non lineare e spesso anelastico** e quindi **le deformazioni dipendono dalla sequenza delle sollecitazioni**.

Per lo studio di questi comportamenti è necessario ricorrere a diversi tipi di apparecchiature di laboratorio che sottopongono il provino a diverse condizioni al contorno, sia come tensioni totali e neutrali che come spostamenti.

**Nelle terre abbastanza spesso le situazioni più frequenti e onerose si hanno con materiale saturo**; nelle prove è perciò necessario considerare l'interazione tra la fase liquida e la fase solida ed in particolare **definire cosa si intenda per condizioni drenate e condizioni non drenate**.

**Condizioni drenate.** Quando si è **in condizioni drenate**, in ogni elemento di terra e **in ogni istante la variazione delle tensioni effettive è uguale a quella delle tensioni totali e quindi è sufficiente misurare queste ultime**.

È evidente che per avere le condizioni drenate il provino deve essere collegato idraulicamente con l'esterno.

**Per le terre a bassa permeabilità le sollecitazioni esterne devono variare lentamente** in modo da non provocare variazioni delle pressioni neutrali e quindi permettere alla fase solida di deformarsi come se non ci fosse acqua.

Per i terreni granulari che hanno quasi sempre una permeabilità alta le condizioni drenate si ottengono anche con velocità di carico relativamente elevate, ovviamente sempre che il provino sia collegato idraulicamente con l'esterno.

**Condizioni non drenate.** Le condizioni non drenate si ottengono quando **non vi è collegamento idraulico con l'esterno e quando le sollecitazioni agiscono in tempi brevi rispetto a quelli necessari per avere il movimento ed eventualmente l'espulsione dell'acqua**. Nelle condizioni non drenate con mezzo saturo, poiché si considerano incompressibili la parte solida e l'acqua, non si hanno variazioni di volume. **In condizioni non drenate per determinare le tensioni efficaci si devono misurare le tensioni neutrali e applicare il principio delle tensioni effettive**.

**Le prove di laboratorio** devono essere **definite e interpretate** dal progettista di opere e interventi geotecnici in base alle loro tipologie e alle loro finalità.

Questo aspetto viene messo in evidenza in quanto la risposta di un terreno (e quindi le grandezze caratteristiche da ricercare sperimentalmente) a cambiamenti del suo stato iniziale, può essere differente in relazione (solo per citare alcune possibilità):

- alle condizioni di sollecitazione,
- ai tempi di applicazione dei carichi,
- alle direzioni di flusso idraulico,
- alla storia tensionale.

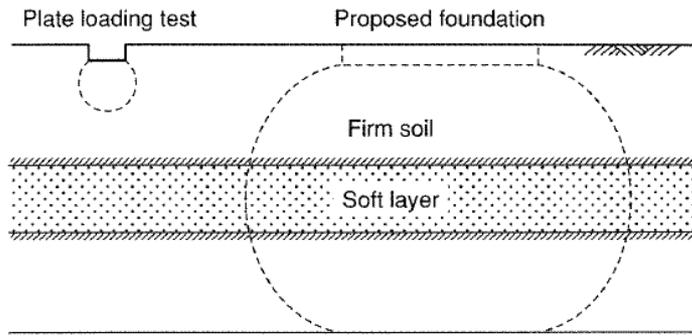
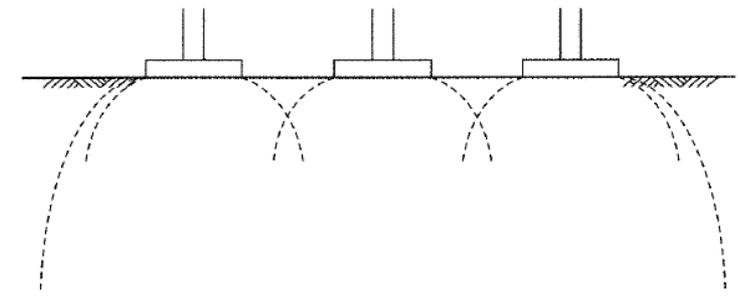


Illustration of how a plate loading test may give misleading results.

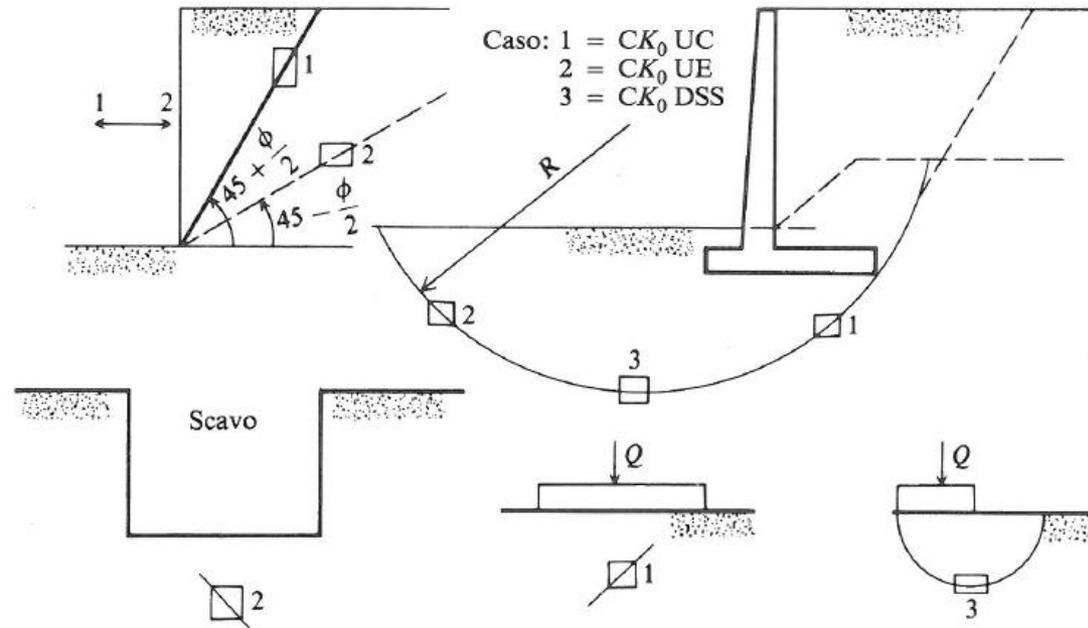


Overlapping of pressure bulbs.

Se esaminiamo la situazione in corrispondenza delle fondazioni e dei pendii è necessario considerare il sistema generale delle tensioni.

Idealmente, quando si vuole sottoporre un campione di terreno a prove meccaniche, si dovrebbe: cercare di trasferire l'elemento di terreno dalla sua ubicazione naturale all'apparecchio di prova senza disturbo; quindi si dovrebbero modificare le tensioni e osservare le corrispondenti deformazioni e pressioni neutrali.

- 1) campione consolidato a pressione  $K_0$  cioè in condizioni monodimensionali ( $\epsilon_r=0$ ) e poi provato a compressione senza drenaggio;
- 2) campione consolidato a pressione  $K_0$  e poi provato a estensione senza drenaggio;
- 3) campione consolidato a pressione  $K_0$  e poi provato a taglio diretto



**Sarebbe importante poter imporre al provino uno stato di tensioni generali e il provino dovrebbe essere libero di cambiare lo stato di tensioni in modo che i piani principali possano ruotare durante il carico.**

L'apparecchiatura ideale dovrebbe permettere di assoggettare il provino agli stati di tensione e di deformazione i più diversi che possono verificarsi in situ.

In pratica è impossibile ottenere questo; vi è il disturbo legato al campionamento e quello legato alle variazioni di tensione per la preparazione del provino.

Le difficoltà tecniche sono tali per cui si sono ideati parecchi tipi di attrezzature, ognuno dei quali sollecita il campione di terreno in modo particolare e solo parzialmente può riprodurre le variazioni di stati tensionali che si hanno in situ.

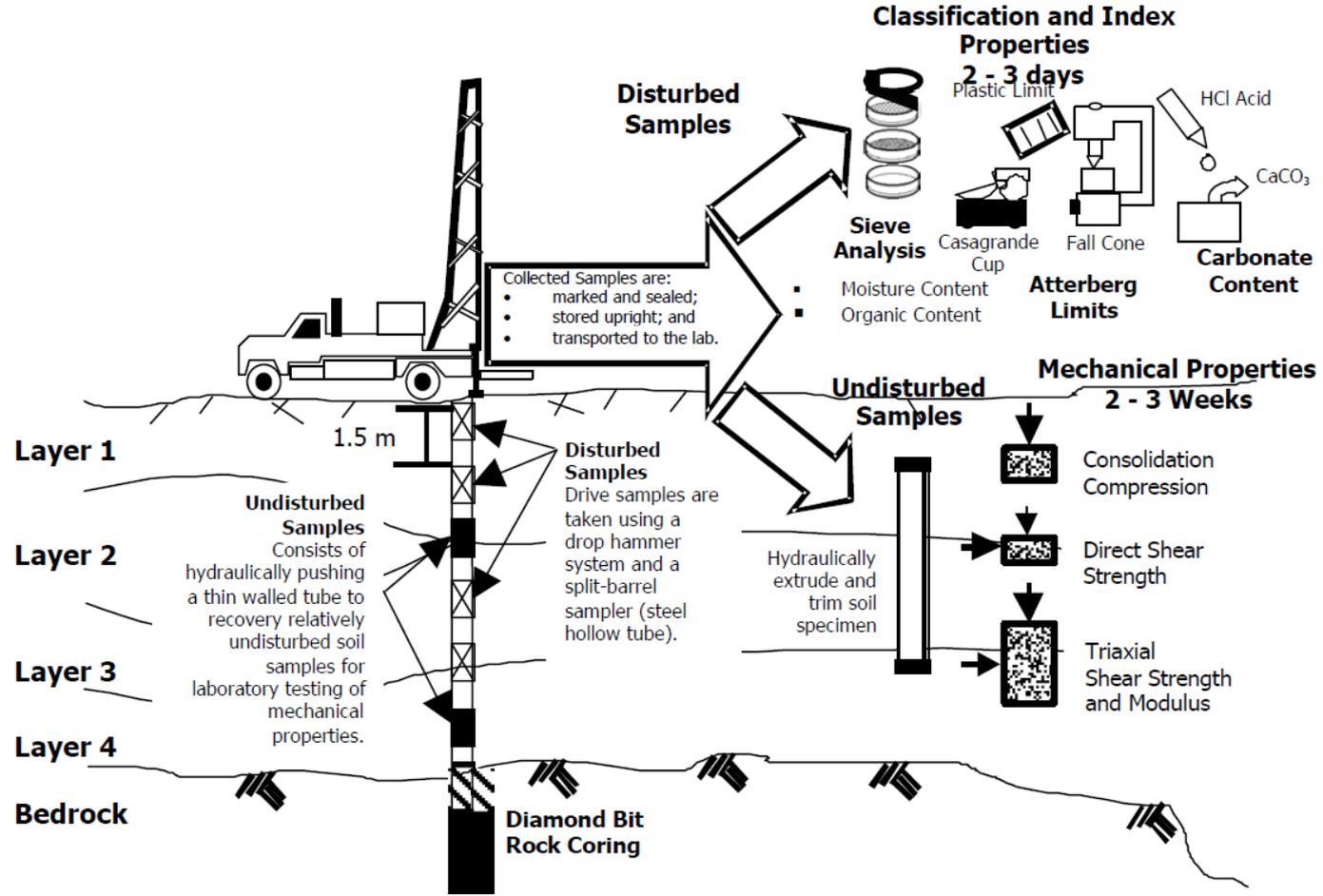
La **resistenza al taglio dei terreni** può essere determinata (o stimata) oltre che con **prove di laboratorio** anche con **prove in sito**.

Le **due categorie di prove** (laboratorio e in situ) sono fra loro **complementari**, nel senso che presentano vantaggi e limiti di tipo opposto come sarà meglio chiarito in seguito quando si tratteranno le prove in situ.

L'analisi dei risultati delle **prove di laboratorio** si presta bene allo studio delle leggi costitutive, poiché le condizioni geometriche, di vincolo e di drenaggio dei provini sono ben definite, il percorso di carico e/o di deformazione è imposto e controllato, il terreno su cui si esegue la prova è identificato e classificato.

I principali **limiti delle prove di laboratorio** sono da ricercarsi nella **incerta rappresentatività del comportamento in sito**:

- sia per il **ridottissimo volume di terreno sottoposto a prova**
- sia perché durante le operazioni di campionamento, trasporto, estrusione e preparazione dei provini si produce inevitabilmente un **disturbo** tale che essi non sono mai nelle stesse condizioni in cui si trovavano in sito.



Tramite le prove di laboratorio è possibile **replicare** le condizioni che si verificano in sito in seguito all'intervento previsto (che deve quindi essere ben noto nelle sue peculiarità) e conseguentemente ottenere, con maggiore confidenza, gli opportuni parametri geotecnici ricercati per i calcoli progettuali e le simulazioni numeriche spesso condotte. Ciò vale sia per i **parametri meccanici** (riferiti a resistenza e deformabilità), sia per i **parametri idraulici** (permeabilità).

**Le prove di laboratorio possono sinteticamente distinguersi nelle seguenti classi:**

- **prove di identificazione e classificazione;**
- **prove di permeabilità;**
- **prove di compattazione;**
- **prove meccaniche (resistenza, deformabilità).**

Le **prove di permeabilità** sono condotte al fine di valutare il **coefficiente di conducibilità idraulica  $k$**  relativamente a campioni rappresentativi.

$$\frac{Q}{A} = v = k \cdot \frac{\Delta h}{L} = k \cdot i$$

Le prove consistono nel sottoporre ad un flusso idraulico il campione, in condizioni controllate (conoscendo cioè portate e gradienti idraulici). Le prove sono dette **a carico costante** e **a carico variabile**.

Nelle **prime** si misurano le portate che attraversano un campione di terreno sottoposto ad un flusso idraulico stazionario imposto da un carico piezometrico mantenuto costante.

Nelle **secondo** la filtrazione attraverso un campione di terreno avviene mentre il carico piezometrico che induce il flusso diminuisce. Si misurano le portate in uscita e le variazioni di carico in prefissati intervalli di tempo.

In entrambe i casi, l'applicazione della legge di Darcy ritenuta valida nelle condizioni di prova, permette di risalire al valore di  $k$ .

La principale limitazione di tali prove è legata alla ridotta dimensione del campione e, quindi, alla sostanziale omogeneità, in termini idraulici, dello stesso. In sito, la conducibilità idraulica può essere molto diversa, a causa di stratificazioni, disomogeneità, particolari condizioni locali ecc. Per tali ragioni, quando possibile, è sempre opportuno ricorrere a **prove di permeabilità in sito** (su grandi volumi di terreno) per la stima di valori del coefficiente di conducibilità idraulica significativi del problema in esame.

Le **prove di compattazione** vengono eseguite per stabilire determinate grandezze **da tenere in conto quando il terreno è utilizzato come materiale da costruzione**.

Esempi tipici sono le opere in terra (rilevati, dighe, argini, colmate, muri in terra rinforzata), i sottofondi stradali e le barriere minerali di impermeabilizzazione (in «argilla compattata») nelle discariche di rifiuti.

**Un'adeguata compattazione del materiale ne incrementa le caratteristiche meccaniche e ne riduce la permeabilità.**

Le prove permettono di definire i valori di grandezze quali il contenuto d'acqua del terreno e l'energia di compattazione da adottare, necessari per raggiungere livelli ottimali di compattazione. Tra le prove di compattazione si possono citare la *prova Proctor* e la *prova CBR (Californian Bearing Ratio)*.

Le **prove meccaniche** permettono la valutazione dei **parametri di resistenza e deformabilità** necessari per la caratterizzazione meccanica delle terre e per la progettazione delle opere geotecniche.

Per il particolare comportamento meccanico delle terre, le principali peculiarità delle **prove meccaniche** sono:

1. si impongono, su provini di piccole dimensioni, sollecitazioni o deformazioni note e si ricavano le conseguenti deformazioni o tensioni indotte;
2. deve essere possibile controllare e misurare sia tensioni totali sia pressioni interstiziali, così da poter risalire alle tensioni efficaci;
3. deve essere possibile operare in condizioni sia drenate sia non drenate, controllando i flussi dell'acqua e le deformazioni di volume;
4. deve essere possibile operare in un campo deformativo molto ampio, dalle piccole alle grandi deformazioni;
5. le tensioni normali si applicano attraverso piastre rigide o fluidi in pressione, questi ultimi agiscono su membrane molto deformabili che avvolgono ed isolano idraulicamente il provino;
6. le tensioni tangenziali si mobilitano imponendo spostamenti e stati di sforzo deviatorico;
7. le sollecitazioni possono essere statiche o impulsive; monotone o cicliche.

I provini sono generalmente cilindrici; il rapporto diametro D - altezza H è variabile a seconda della condizione di prova.

- **Provini tozzi** (rapporto D/H ~ 2.5) sono utilizzati per **simulare condizioni di carico monodimensionale** e condizioni di rottura lungo superfici di scorrimento prefissate.
- **Provini snelli** (H/D ~ 2) vengono utilizzati per avere **condizioni di sforzo omogeneo** nella mezzera del campione nel caso di carico imposto agli estremi da piastre rigide.

I provini possono essere soggetti a flussi idraulici imposti in ingresso e in uscita, a mezzo di opportuni circuiti di drenaggio.

- Nelle **prove drenate** i circuiti sono aperti, **permettendo i flussi e le variazioni di volume e impedendo la generazione, sotto carico, di sovrappressioni interstiziali in provini saturi.**
- Nelle **prove non drenate** i circuiti sono chiusi, con conseguente **impossibilità di variazione di volume del provino e possibilità di sviluppo di sovrappressioni  $\Delta u$ .** Disponendo misuratori di pressione lungo il circuito di drenaggio, tra la valvola di chiusura dello stesso e il provino, è possibile misurarne il valore.

Le prove meccaniche vengono eseguite con attrezzature e modalità cosiddette «convenzionali» o «speciali».

Le prime rispondono alle più ricorrenti esigenze in merito alla definizioni dei parametri geotecnici, necessari alla modellazione del comportamento delle terre per fini progettuali e di ricerca.

Le prove «speciali» sono volte a indagare particolari comportamenti per finalità specifiche nell'ambito delle pratiche applicazioni e della ricerca.

**Nel corso si tratteranno le sole prove «convenzionali»** (ed in particolare in relazione al caso più frequente di **carico statico monotono**).

Le condizioni di carico e di deformazione permettono di valutare i parametri **in relazione a particolari percorsi di carico che si generano in sito in relazione all'opera in esame**.

Le **prove meccaniche convenzionali** più comuni e diffuse sono:

- la prova edometrica;
- la prova di taglio diretto;
- la prova triassiale.

La **prova edometrica** permette di simulare il processo di consolidazione monodimensionale: con essa si valutano quindi i parametri di compressibilità per lo studio dei fenomeni ad esso legati (variazioni di tensioni efficaci e decorso del cedimento nel tempo). Permette inoltre la valutazione sperimentale della tensione di preconsolidazione  $\sigma'_p$  e quindi del rapporto di preconsolidazione  $OCR$ .

Le **prove di taglio** e le **prove triassiali** permettono di raggiungere condizioni di rottura e simulare i meccanismi tensionali e deformativi che si verificano nel terreno in seguito alle condizioni di sollecitazione agenti.

Con la **prova di taglio diretto** si ottengono **solo** i **parametri di resistenza al taglio in tensioni efficaci  $c'$  e  $\phi'$  (di picco e residui)**.

La **prova triassiale** è la prova più versatile delle tre: con essa si possono **determinare parametri di resistenza (in condizioni di picco e di stato critico, più difficilmente in condizioni residue)** e **parametri di deformabilità** (tangenti e secanti). Tramite idonea strumentazione è possibile indagare la **risposta deformativa nel campo delle piccole deformazioni**. A seconda delle condizioni di prova i parametri possono essere riferiti a condizioni drenate e non drenate e a tensioni totali ed efficaci.

Nell'ambito delle **prove geotecniche speciali** si citano:

- la prova di colonna risonante;
- la prova di taglio torsionale;
- la prova triassiale ciclica;
- la prova di taglio e la prova triassiale per terre non sature.

Tali prove sono dedicate ad indagare particolari comportamenti e valutare i relativi parametri.

Tra essi: risposta meccanica a sollecitazioni dinamiche e cicliche, modulo di taglio e smorzamento e loro decadimento con il livello deformativo in condizioni statiche e dinamiche, resistenza al taglio in condizioni di parziale saturazione.

**La suddivisione delle prove standard è legata principalmente alle condizioni di drenaggio.**

**Si ricorda infatti che** per il principio delle tensioni efficaci: **“la variazione di resistenza al taglio è attribuibile esclusivamente a variazioni delle tensioni efficaci”**. Quando in un terreno interviene una alterazione delle tensioni totali, a causa di carichi, positivi o negativi, applicati in superficie o in profondità, risultano conseguentemente alterate le pressioni interstiziali e le tensioni efficaci, ed ha inizio un processo di filtrazione in regime transitorio (consolidazione).

Nei **TERRENI A GRANA GROSSA**, molto permeabili, il processo di filtrazione è pressoché istantaneo (sistema aperto), cosicché alle variazioni di tensione totale corrispondono immediatamente analoghe variazioni di tensione efficace mentre le tensioni interstiziali rimangono inalterate (**condizioni drenate**). Dunque, noto lo stato tensionale iniziale, è sufficiente conoscere entità e distribuzione degli incrementi di tensione (totale = efficace) indotti dal carico applicato per poter valutare la resistenza al taglio disponibile in ogni punto dell'ammasso (naturalmente se sono noti i parametri di resistenza al taglio).

Lo studio del comportamento del materiale in **campo statico** può essere analizzato in condizioni drenate.

Nei **TERRENI A GRANA FINE**, poco permeabili, non sono invece generalmente note né l'entità né l'evoluzione nel tempo delle variazioni di pressione interstiziale e di tensione efficace conseguenti ad una variazione di tensione totale prodotta dai carichi applicati. Possiamo solo dire che, se il terreno è saturo, all'istante di applicazione del carico **le deformazioni volumetriche sono nulle** (sistema chiuso, **condizioni non drenate o a breve termine**), **mentre possono esserci deformazioni di taglio**. Solo dopo che si sarà esaurito il processo di consolidazione e le sovrappressioni interstiziali si saranno dissipate, le tensioni efficaci e quindi la resistenza al taglio si saranno stabilizzate sul valore finale (**condizioni drenate o a lungo termine**).

**Conseguentemente, mentre per i terreni a grana grossa la resistenza al taglio, e quindi le condizioni di stabilità, non variano nel tempo dall'applicazione del carico, ciò avviene invece per i terreni a grana fine.** In particolare:

- Se durante il **processo di consolidazione le tensioni efficaci crescono**, anche la resistenza al taglio progressivamente cresce e **le condizioni di stabilità più critiche sono a breve termine**.
- Se invece durante il **processo di consolidazione le tensioni efficaci decrescono** anche la resistenza al taglio progressivamente decresce e **le condizioni di stabilità più critiche sono a lungo termine**.

**Per tale motivo, ad esempio, se un rilevato è stabile subito dopo la costruzione lo sarà anche in futuro, ma se la parete di uno scavo è stabile subito dopo la sua esecuzione non è affatto detto che lo sarà anche dopo un certo tempo.**

Per i **terreni a grana fine** a causa della bassa permeabilità si possono quindi avere **tre situazioni** possibili.

- a) Nel caso di una **costruzione (un rilevato, una struttura, ecc.) realizzata in tempi brevi**, per cui si possa ragionevolmente fare l'ipotesi che **la sovrappressione neutra prodotta dall'applicazione del carico si sia dissipata in entità trascurabile**, è opportuno esaminare i problemi delle deformazioni e di rottura in condizioni non drenate che, come si è visto nella prova edometrica, corrispondono alla situazione iniziale di assenza di variazione di volume (volume costante). Si parla quindi di **analisi in condizioni non drenate o senza drenaggio**.
- b) Nel caso di uno **scavo in terreno fine saturo**, **nelle zone adiacenti alle pareti si hanno delle variazioni negative o diminuzioni della pressione dell'acqua a causa dello scarico tensionale dovuto allo scavo**; tali diminuzioni provocano un richiamo d'acqua dalle zone più distanti verso le pareti con rigonfiamento, rammollimento e **riduzione della resistenza del terreno**. **La situazione più pericolosa si ha quindi alla fine del processo di filtrazione o meglio del processo di dissipazione delle sovrappressioni neutrali e quindi in condizioni drenate**.
- c) Nel caso di **un'opera costruita abbastanza gradualmente o in più fasi**, per cui ci si può attendere un processo di **consolidazione parziale**, l'analisi può essere in condizioni non drenate, ma con la resistenza corrispondente alla **consolidazione parziale**.

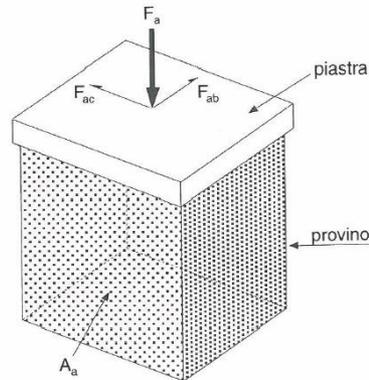
# APPARECCHIATURE E PROVE DI LABORATORIO PER LA DETERMINAZIONE DELLA RESISTENZA

Le prove di laboratorio scontano una grossa difficoltà legata al fatto che si hanno spesso **grandi deformazioni del provino**; con **terreni densi e compatti si arriva a rottura con deformazioni del 5%** della dimensione iniziale del provino, ma con **terreni argillosi molli si arriva con facilità a deformazioni del 20 ÷ 40%**.

**Con queste grandi deformazioni possono sorgere interferenze con le piastre di carico.**

Un'attrezzatura di carico applicherà infatti le forze generalmente attraverso piastre rigide o membrane flessibili e, poiché sono quasi sempre forze di compressione, non è necessario che le piastre o le membrane siano attaccate al campione. Attraverso la piastra, generalmente piana, si trasferiscono al campione forze normali  $F_a$  e forze tangenziali  $F_{ab}$  e  $F_{ac}$ . **Si fa l'ipotesi che le tensioni di contatto siano uniformi sulla faccia della piastra** e che le tensioni siano pertanto date semplicemente da:

$$\sigma_a = \frac{F_a}{A_a} \quad \tau_{ab} = \frac{F_{ab}}{A_a} \quad \tau_{ac} = \frac{F_{ac}}{A_a}$$

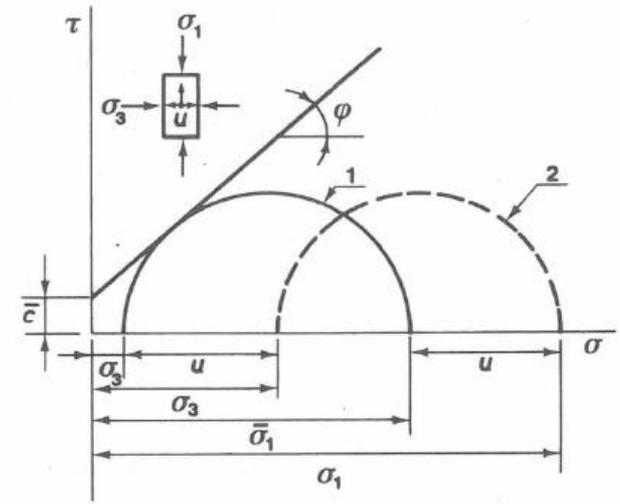
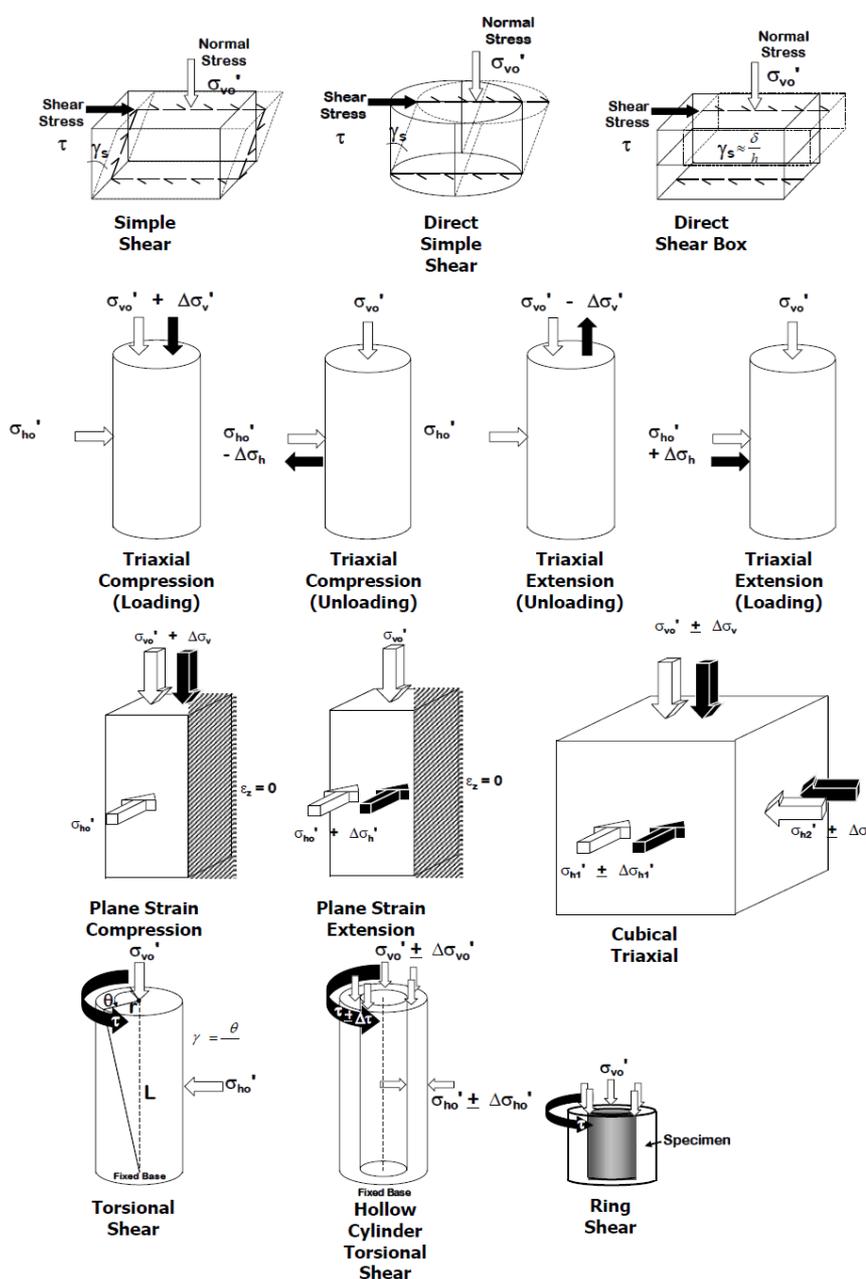


Per il confinamento si utilizza una membrana flessibile consistente in un diaframma sottile e molto deformabile, generalmente di gomma, con un fluido che agisce su di esso e quindi trasmette forze senza contatto diretto con il provino.

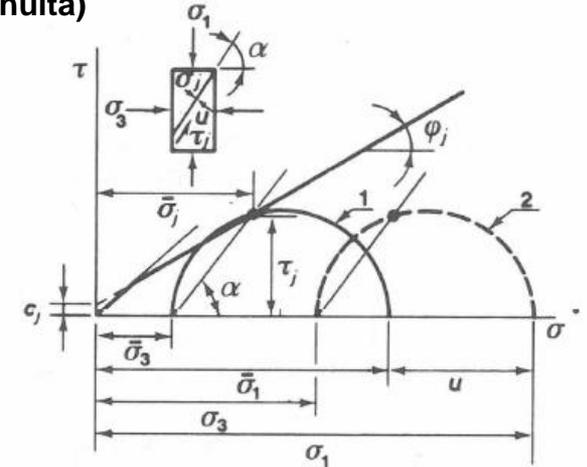
**Se il diaframma è sottile e flessibile non verrà trasmessa alcuna tensione di taglio al terreno, i piani paralleli alle facce della membrana saranno piani principali nel campione e la pressione del fluido sulla membrana sarà una tensione principale.**

condizioni di tensione e di deformazione	denominazione della prova	schema della prova
$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma$	compressione isotropa	
$\sigma_z \neq \sigma_x \neq \sigma_y$	compressione triassiale vera	
$\epsilon_x = 0$	deformazione piana	
$\sigma_x = 0$	tensione piana	
$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_r = 0$	compressione uniaassiale libera	
$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_r = 0$	compressione edometrica	
$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_r$	compressione cilindrica o «triaassiale»	

## Criterio di Coulomb riferito alle tensioni efficaci



## Criterio di Coulomb riferito alle tensioni efficaci (tensione di taglio agente su un piano di discontinuità)



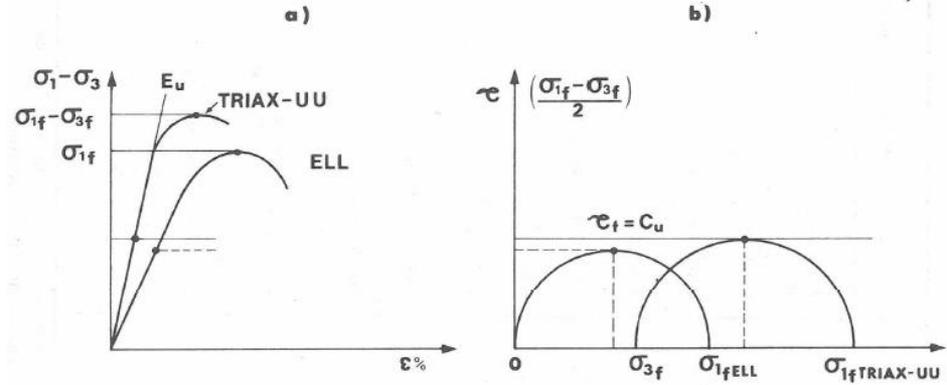
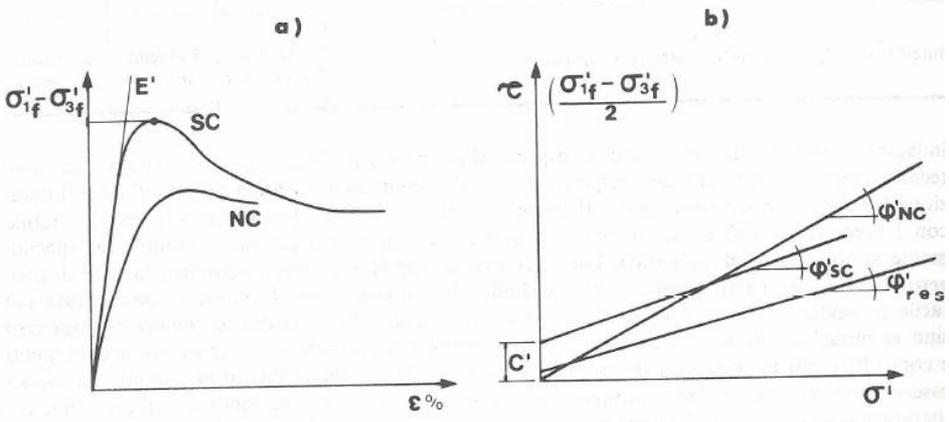
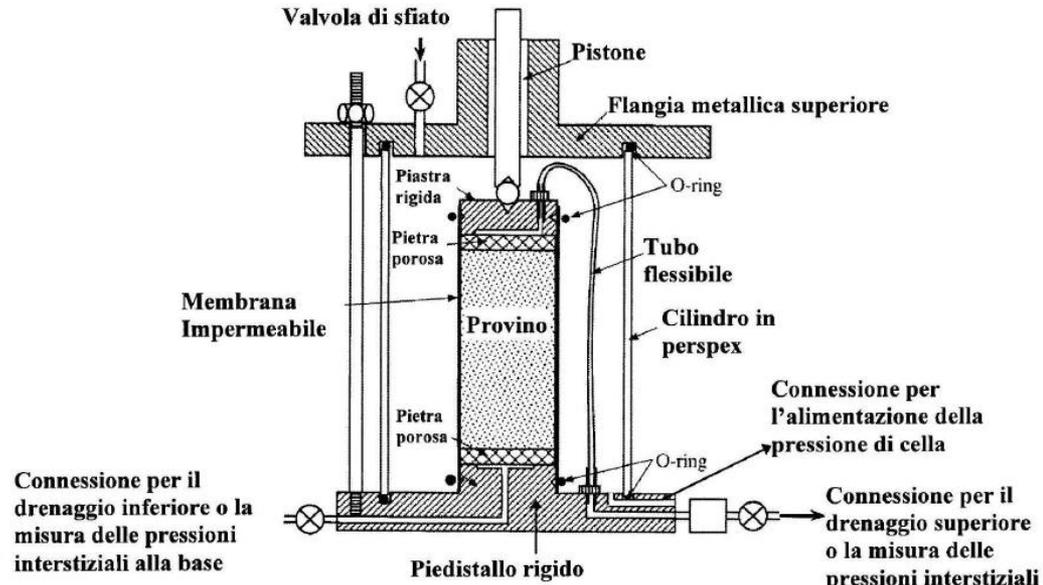
Prove di laboratorio utilizzate per determinare la resistenza delle terre con indicazione delle condizioni di carico e di contorno

## CLASSI DI ATTREZZATURE DI LABORATORIO

Una **prima classe di attrezzature** è caratterizzata dalla **coincidenza dei piani principali delle tensioni e delle deformazioni** e il campione è contenuto da **piastre rigide, lisce e non ruotanti, o da membrane flessibili**.

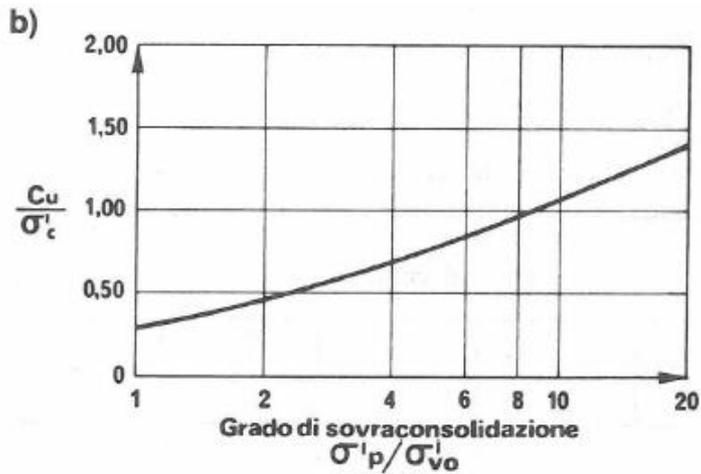
Se consideriamo un campione prismatico si ha che le tensioni  $\sigma_z$ ,  $\sigma_y$ , e  $\sigma_x$  sono tensioni principali che alternativamente possono essere la maggiore, la media e la minore; con un campione cilindrico usualmente si indica con  $\sigma_r$  la tensione radiale e con  $\sigma_a$ , la tensione assiale e si fa la semplice ipotesi che la tensione tangenziale  $\sigma_t$  sia uguale a  $\sigma_r$ .

In questa classe di attrezzature **le prove utilizzate comunemente per ricavare le caratteristiche del terreno da usare nella progettazione sono quelle di compressione cilindrica (usualmente e impropriamente detta triassiale)**, di compressione edometrica e di compressione uniassiale, mentre la prova triassiale vera o quella di deformazione piana o biassiale vengono eseguite nei laboratori di ricerca con apparecchiature speciali.

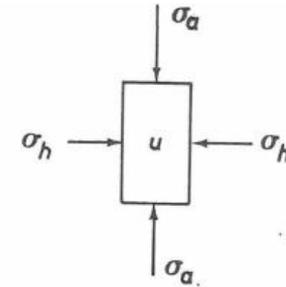


Prova triassiale consolidata drenata (CD) : risultati di prove su terreni normalconsolidati (NC) e sovraconsolidati (SC):  
 a) curve tensioni efficaci - deformazioni; b) rette intrinseche

Prova triassiale non consolidata non drenata (UU) e prove di compressione rapida ad espansione laterale libera (ELL):  
 a) curve tensioni-deformazioni; b) retta intrinseca



Variazione della coesione non drenata rapportata alla pressione di cella, al variare del grado di sovraconsolidazione riprodotto con il triassiale



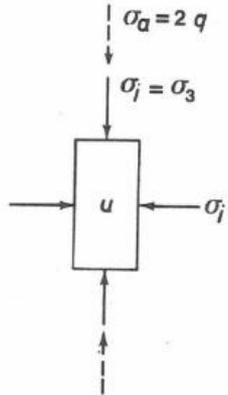
$\sigma_1 = \sigma_a$   
 $\sigma_3 = \sigma_2 = \sigma_h$  } *prova di compressione*



$\sigma_3 = \sigma_a$   
 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_h$  } *prova di estensione*



*in ambedue i casi*  
 $\bar{\sigma}_1 = \sigma_1 - u$  e  $\bar{\sigma}_3 = \sigma_3 - u$



$\sigma_3 = \sigma_2 = \sigma_j$   
 $\sigma_1 = \sigma_j + \sigma_a = \sigma_3 + 2q$   
 $\bar{\sigma}_3 = \bar{\sigma}_2 = \sigma_j - u$   
 $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_3 + \sigma_a = (\sigma_3 - u) + \sigma_a$

Sistema delle tensioni agenti sul provino in una cella triassiale convenzionale

Sistemi di tensione agenti sul provino in una cella triassiale nella quale è possibile cambiare in modo indipendente le tensioni principali  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$

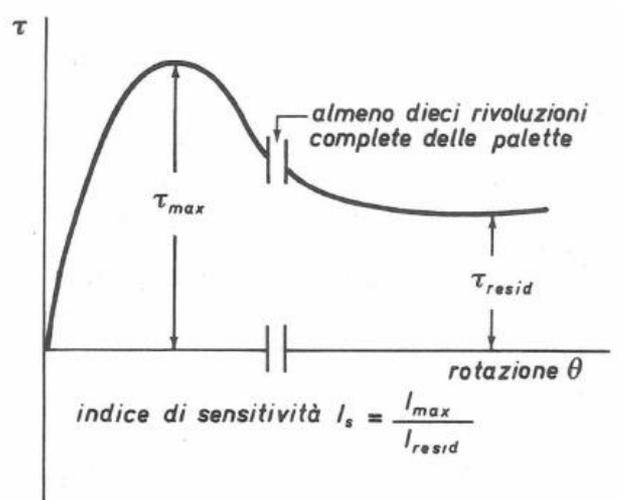
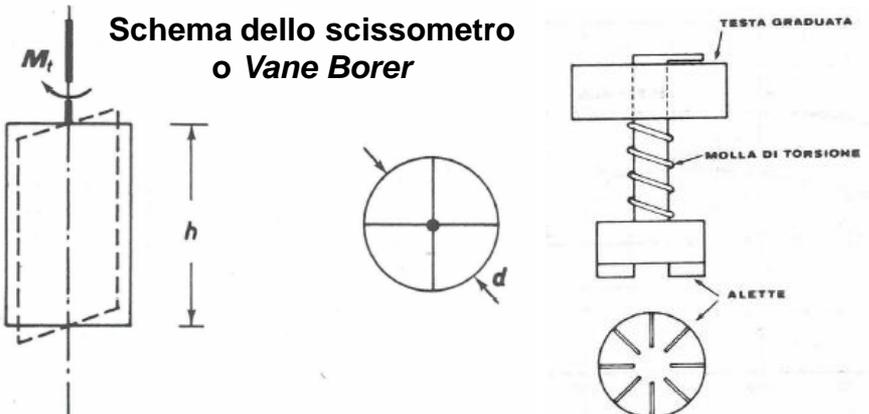
**PROVE NON DRENATE SEMPLICI.** La resistenza in condizioni non drenate può essere misurata tramite prove rapide di *compressione semplice* ovvero ad *espansione laterale libera* (ELL;  $\sigma_3=0$ ); in tal caso:  $\tau_f = c_u = \sigma_{1f} / 2$ .

La misura diretta di  $C_u$  può essere effettuata **anche** con lo **scissometro tascabile** (*tor vane*). **Le alette e la molla di contrasto alla torsione impressa al terreno sono generalmente tarate sulla predetta prova di compressione semplice.**

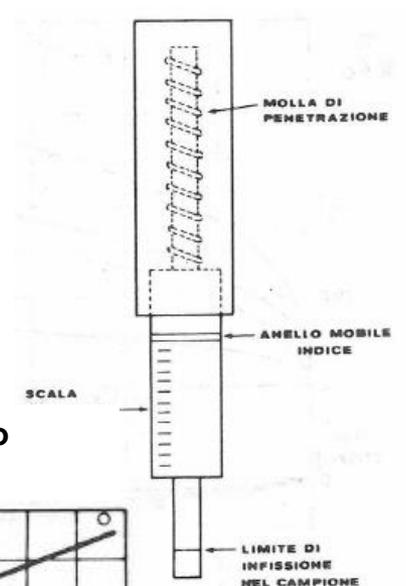
Analogo rilievo, **ma più grossolano**, può essere effettuato con il **penetrometro tascabile**, misurando la pressione  $Q_p$  necessaria per infiggere l'astina nel campione.

**Ambedue questi strumenti riproducono in piccolo l'apparecchio penetrometrico e quello scissometrico per prove in sito.** Tutte queste prove semplici possono essere condotte solo su campioni omogenei e che hanno una netta «memoria» dello stato tensionale efficace in sito. Pertanto sono prive di significato se svolte su campioni limo-sabbiosi o su campioni fessurati.

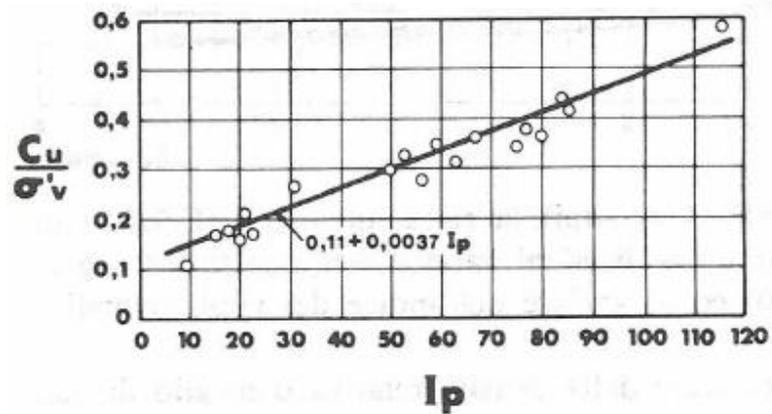
**Schema dello scissometro o Vane Borer**



**Resistenza al taglio rimaneggiata ottenuta mediante scissometro**



**Penetrometro tascabile**



**Andamento sperimentale rilevato con prove triassiali UU, della coesione non drenata  $C_u$  in rapporto alla tensione litostatica  $\sigma'_{vo}$  di prelievo ed al variare dell'indice di plasticità  $I_p$ .**

- a) Schema di un edometro;  
 b) curve di compressibilità tipiche di argille normalconsolidate in funzione dell'indice di plasticità  $I_p$ ;  
 c) curve di compressibilità tipo per una data argilla al variare del grado di sovraconsolidazione, ovvero del valore della tensione  $\sigma'_p$  di preconsolidazione: SC sovraconsolidata, NC normalconsolidata, R « rimaneggiata », S sensitiva.

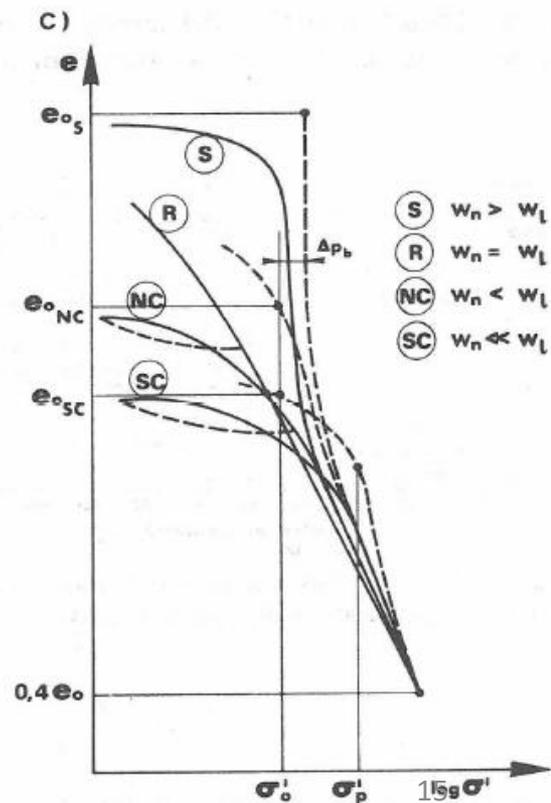
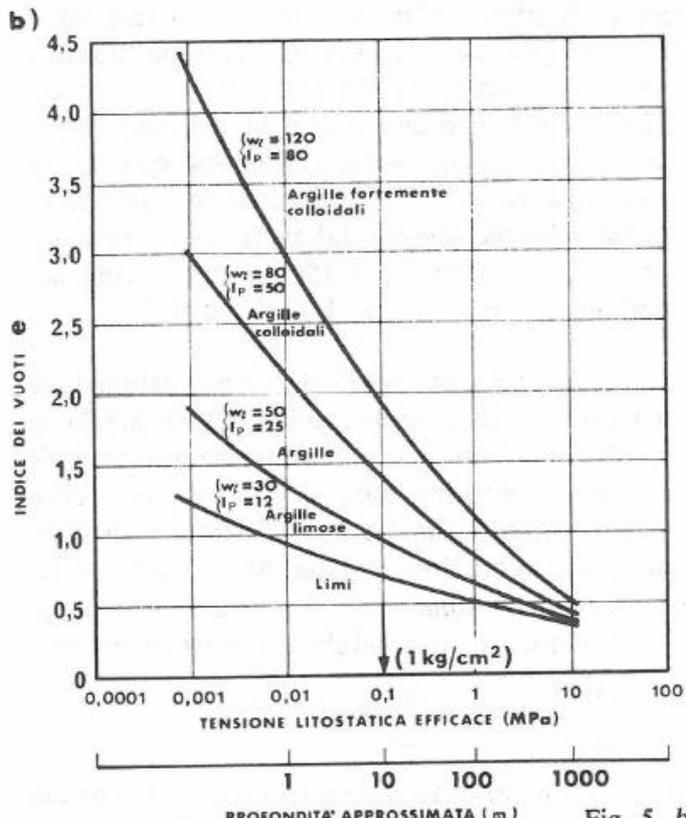
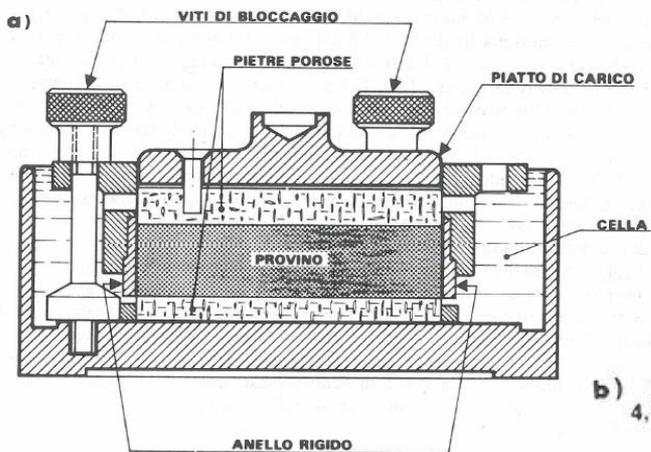
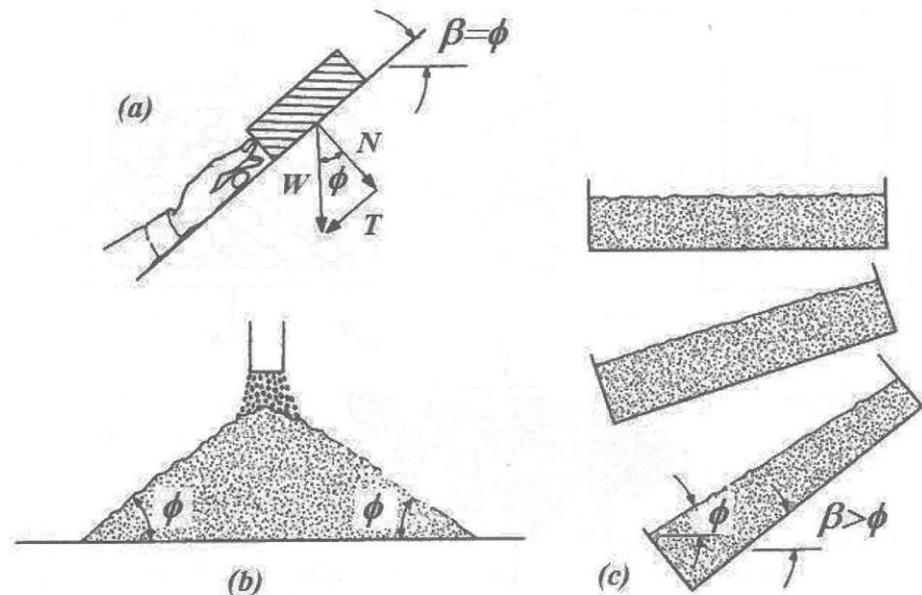
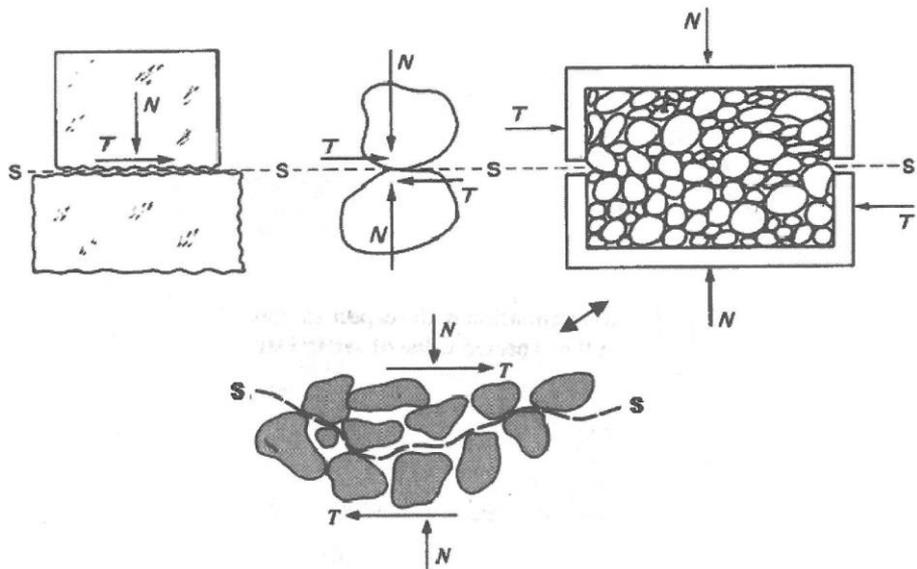


Fig. 5. b) c)



### Meccanismi e superfici di scorrimento tra elementi a contatto

TABELLA 2.14 - Caratteristiche usuali di alcuni materiali granulari

Classificazione	Angolo di natural declivio $i$	Attrito residuo (a volume costante) $\phi_{cv}$	Attrito di picco	
			Media densità $\phi$	Addensato $\phi$
Limo non plastico	25 - 30	25 - 30	28 - 31	30 - 34
Sabbia uniforme	26 - 30	26 - 30	30 - 34	32 - 36
Sabbia ben gradata	30 - 34	30 - 34	32 - 40	35 - 46
Sabbia e ghiaia	32 - 36	32 - 36	35 - 42	38 - 48

### Angolo di attrito interno e angolo di massima obliquità

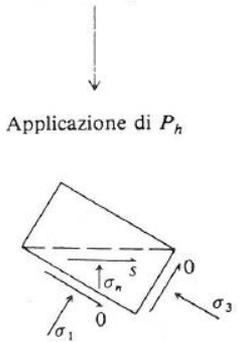
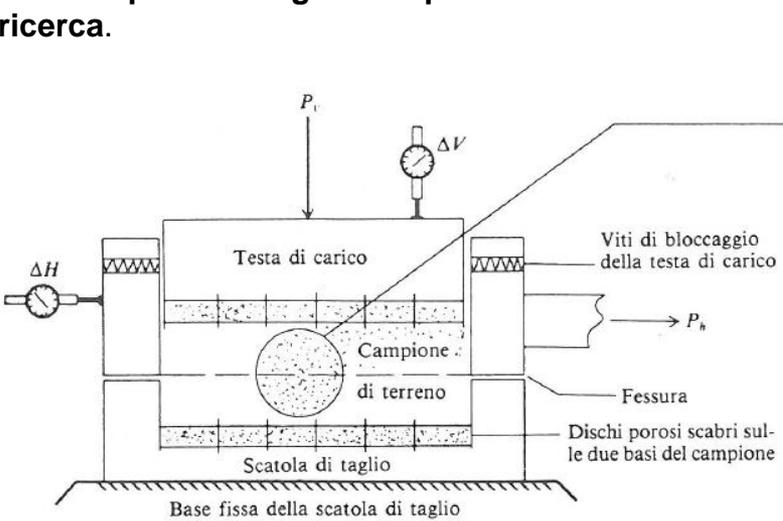
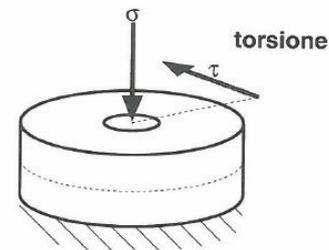
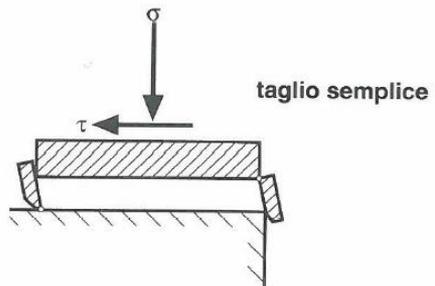
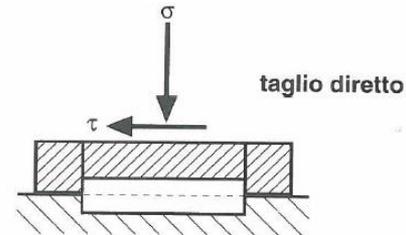
#### Effetto della forma dei granuli sull'attrito interno

Forma e gradazione	Media densità $\phi$	Addensato $\phi$
Granuli arrotondati, uniformi	30	36
Granuli arrotondati, più o meno gradati	32	40
Granuli angolari, uniformi	35	43
Granuli angolari, più o meno gradati	37	45

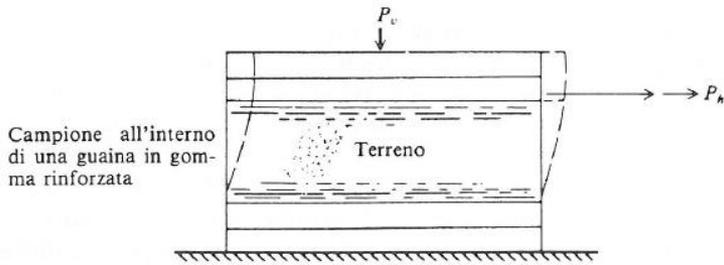
Un **secondo tipo di attrezzature** di prova riguarda le **prove di taglio** ed è caratterizzato da piastre usualmente ruvide e che possono non ruotare o ruotare; di conseguenza **i confini del campione non sono necessariamente piani principali delle tensioni o delle deformazioni e i piani principali possono ruotare**.

Si utilizzano **tre tipi di prova**: di taglio diretto (apparecchiatura di Casagrande), di taglio semplice e di torsione.

Lo stato di tensione nelle **prove di torsione** è uguale a quello che si ha nel taglio diretto, ma nella prova di torsione si possono applicare deformazioni di taglio molto rilevanti ed è così possibile studiare la **resistenza al taglio residua**. La prova di taglio diretto viene adoperata usualmente, mentre quelle di taglio semplice e di torsione sono utilizzate quasi solamente in laboratori di ricerca.



Rotazione degli sforzi principali conseguente al fatto che adesso sul piano orizzontale agisce il taglio



(b) Apparecchio di taglio semplice. Si noti che lo stato dell'acqua nei pori può essere controllato. L'applicazione di  $P_v$  produce una condizione  $CK_0$ .

**Scatola di taglio**

## PROVA DI TAGLIO DIRETTO

La prova di taglio diretto è la più antica, la più intuitiva e la più semplice fra le prove di laboratorio per la determinazione della resistenza al taglio dei terreni. Essa **può essere eseguita su campioni ricostituiti di materiali sabbiosi e su campioni indisturbati o ricostituiti di terreni a grana fine.**

In questa classe rientrano vari tipi di prove, ma la più usata è quella eseguita con l'apparecchio di Casagrande costituito da due telai sovrapposti di cui uno è scorrevole rispetto all'altro.

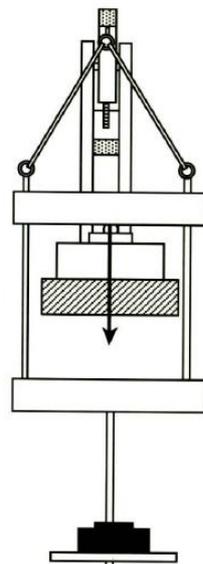
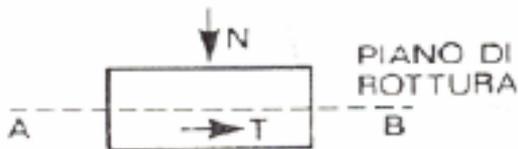
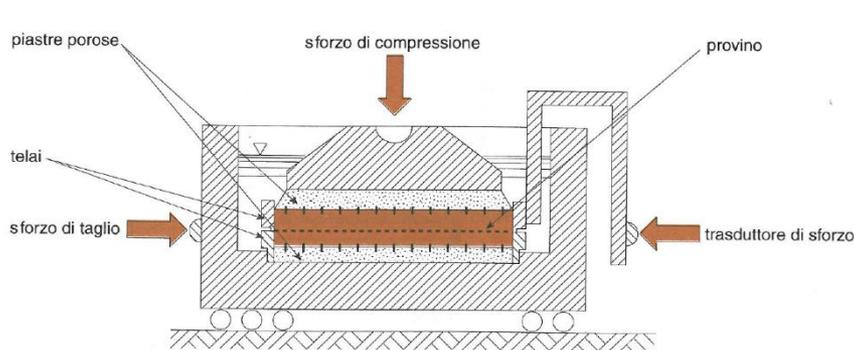
La **prova si esegue su almeno tre provini**, che in genere hanno sezione quadrata di lato  $60 \div 100$  mm (talvolta cilindrica con diam. 60 mm) e altezza  $20 \div 40$  mm. **La dimensione massima dei grani di terreno** deve essere almeno 6 volte inferiore all'altezza del provino, per cui **sono escluse le ghiaie e i ciottoli**, salvo che non si disponga di apparecchiature speciali, molto grandi.

**Nelle prove di taglio diretto la rottura viene raggiunta nel provino provocando il taglio secondo un piano prestabilito e lo stato tensionale è di tipo edometrico  $\sigma'_{h0} = K_0 \sigma'_{v0}$ .**

Il provino è inserito in un telaio metallico a sezione quadrata diviso in due parti da un piano orizzontale in corrispondenza della semialtezza, ed è verticalmente compresso tra due piastre metalliche nervate e forate, oltre ciascuna delle quali vi è una carta filtro ed una piastra di pietra porosa molto permeabile.

Attraverso una piastra di carico è possibile distribuire uniformemente sulla testa del provino una forza verticale di compressione. Il tutto è posto in una scatola piena d'acqua che può essere fatta scorrere a velocità prefissata su un'apposita rotaia.

La metà superiore del telaio metallico è impedita di traslare da un contrasto collegato ad un anello dinamometrico (per la misura delle forze orizzontali T applicate), cosicché il movimento della scatola produce la rottura per taglio del provino nel piano orizzontale medio.



**La prova si esegue in due fasi.**

Fase di applicazione della tensione verticale: si applica istantaneamente il **carico N** (di consolidazione).

Fase di taglio: si applica uno **scorrimento relativo** fra le due parti della scatola di taglio.

Di solito la prova viene effettuata a velocità di scorrimento controllata.

La **velocità di scorrimento** deve essere tale da assicurare che la prova avvenga in maniera **drenata**.

Nella **prima fase** viene applicata in modo istantaneo e mantenuta costante nel tempo una **forza verticale N** che dà inizio ad un processo di consolidazione edometrica. Durante la **prima fase** si misurano gli abbassamenti nel tempo del provino, controllando in tal modo il processo di consolidazione e quindi il raggiungimento della pressione verticale efficace media  $\sigma'_n = \frac{N}{A}$  essendo A la sezione orizzontale del provino.

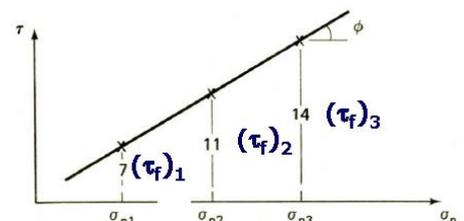
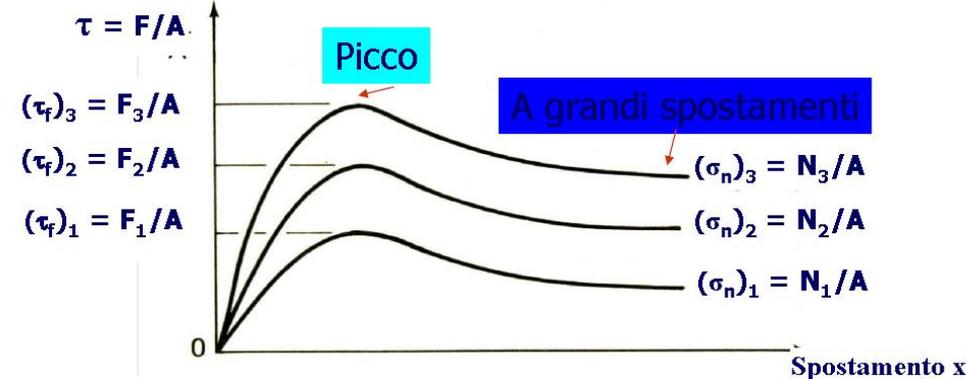
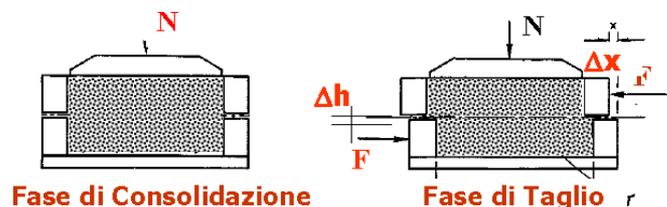
La **durata della prima fase** dipende dalla **permeabilità del terreno** e dall'**altezza del provino**.

Nella **seconda fase** si fa avvenire lo **scorrimento orizzontale relativo,  $\delta$** , a **velocità costante** fra le due parti del telaio producendo il taglio del provino nel piano orizzontale medio. Durante la fase di taglio si controlla lo spostamento orizzontale relativo e si misurano la forza orizzontale  $T(\delta)$ , che si sviluppa per reazione allo scorrimento, e le variazioni di altezza del provino.

La **velocità di scorrimento** deve essere **sufficientemente bassa** da non indurre **sovrappressioni interstiziali**. A tal fine la velocità può essere scelta in modo inversamente proporzionale al tempo di consolidazione della prima fase; **volendo procedere in termini di pressioni effettive, le velocità di scorrimento** dovranno essere dell'ordine di  $2 \cdot 10^{-2}$  mm/s per terreni sabbiosi e di  $10^{-4}$  mm/s per i terreni a grana fine.

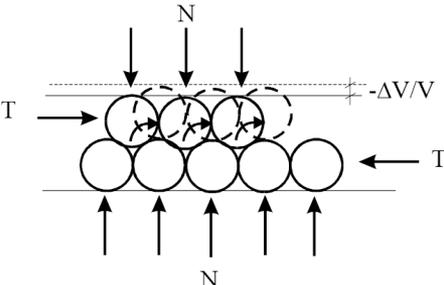
La **prova va continuata fino alla chiara individuazione della forza resistente di picco  $T_f$**  o fino ad uno spostamento pari al **20% del lato del provino**, quando non si possa individuare chiaramente un valore di picco della resistenza.

La prova è ripetuta per tre diversi livelli della tensione verticale.

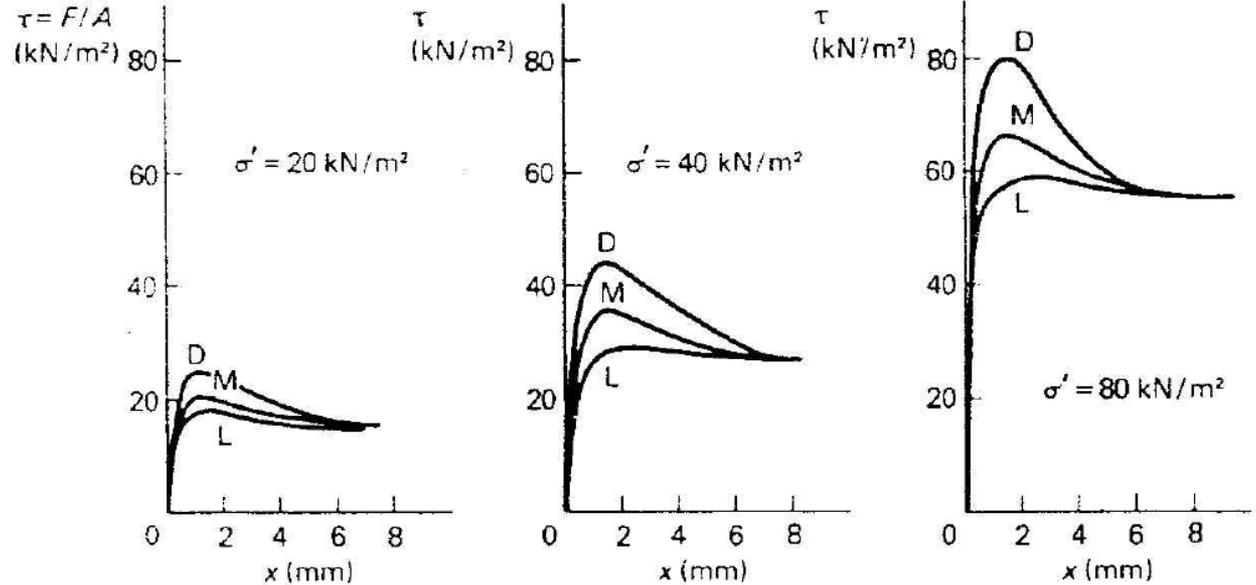


L'angolo di attrito del terreno granulare dipende dalla densità relativa e dallo stato tensionale applicato.

- **Un determinato tipo di terreno è caratterizzato da un unico angolo di attrito a grandi spostamenti indipendentemente dallo stato di addensamento iniziale.**
- **Terreni inizialmente addensati** mostrano continuo incrudimento (*hardening*) fino al picco nella curva tensioni tangenziali – spostamenti (associato a dilatazioni dello scheletro solido) oltre il quale la resistenza diminuisce (*softening*) verso una condizione di resistenza costante a grandi spostamenti.
- **Terreni inizialmente sciolti** richiedono grandi spostamenti per mobilitare la resistenza massima, senza mostrare alcun picco nella curva tensioni-spostamenti (solo *hardening*)



**Terreno granulare: effetto della densità e dello stato tensionale**

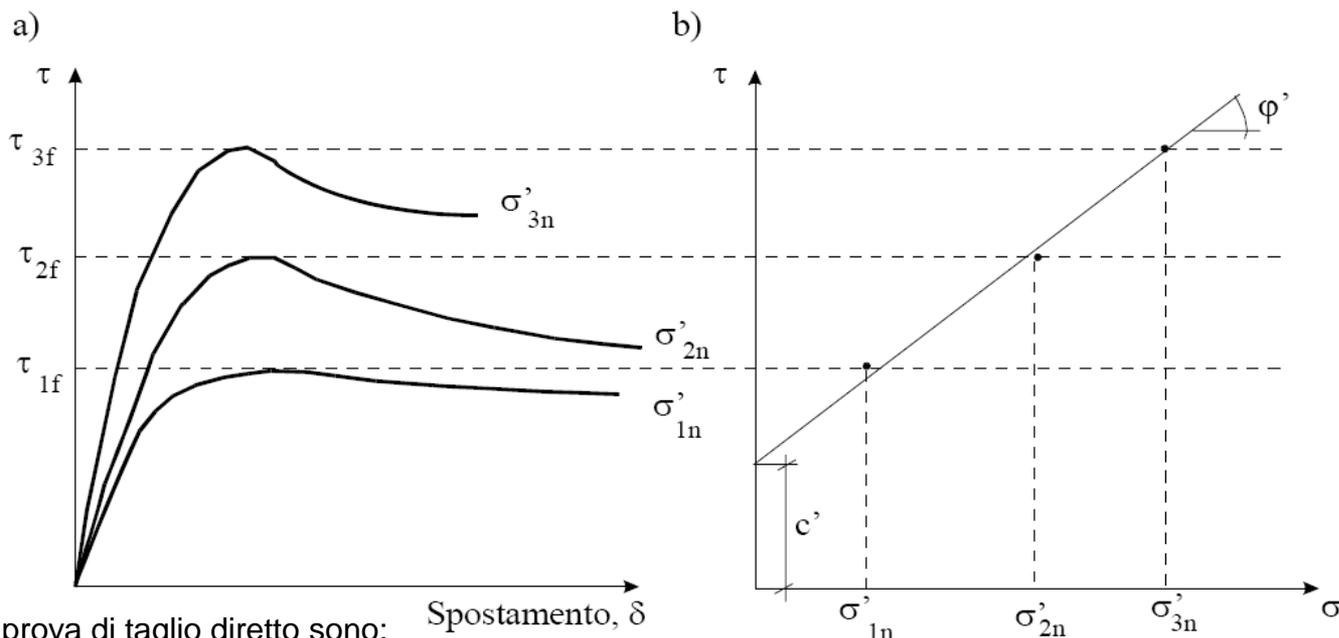


Stato del terreno: L=sciolto; M = mediamente denso; D = denso

La tensione efficace normale a rottura  $\sigma'_{n,f} = \sigma'_n$  e la tensione tangenziale media a rottura sul piano orizzontale,  $\tau_f = \frac{T_f}{A}$ , sono le coordinate di un punto del piano di Mohr appartenente alla linea involuppo degli stati di tensione a rottura.

Ripetendo la prova con differenti valori di N (almeno tre) si ottengono i punti sperimentali che permettono di tracciare la retta di equazione:  $\tau_f = c' + \sigma' \cdot \tan\phi'$  e quindi di determinare i parametri di resistenza al taglio  $c'$  e  $\phi'$ .

**I valori di N, e quindi di pressione verticale, devono essere scelti tenendo conto della tensione verticale efficace geostatica.**



I principali limiti della prova di taglio diretto sono:

- l'area A del provino varia (diminuisce) durante la fase di taglio,
- la pressione interstiziale non può essere controllata,
- **non sono determinabili i parametri di deformabilità,**
- **la superficie di taglio è predeterminata e, se il provino non è omogeneo, può non essere la superficie di resistenza minima;**
- si fa riferimento alla deformazione media del provino, mentre si ha uno stato di deformazione non uniforme, poiché il provino è contenuto da un telaio rigido.

Dato che non si possono controllare le condizioni di drenaggio né misurare la pressione neutra, la prova deve essere condotta in modo adeguato.

**Se la prova è condotta a velocità troppo elevate per consentire il drenaggio si ottiene una sovrastima di  $c'$  e una sottostima di  $\phi'$ .** L'esecuzione di prove di taglio diretto "rapide non drenate" è fortemente sconsigliata, poiché la rapidità della prova non è comunque sufficiente a garantire l'assenza di drenaggio ed i risultati non sono interpretabili né in termini di tensioni efficaci né in termini di tensioni totali.

## RESISTENZA AL TAGLIO RESIDUA

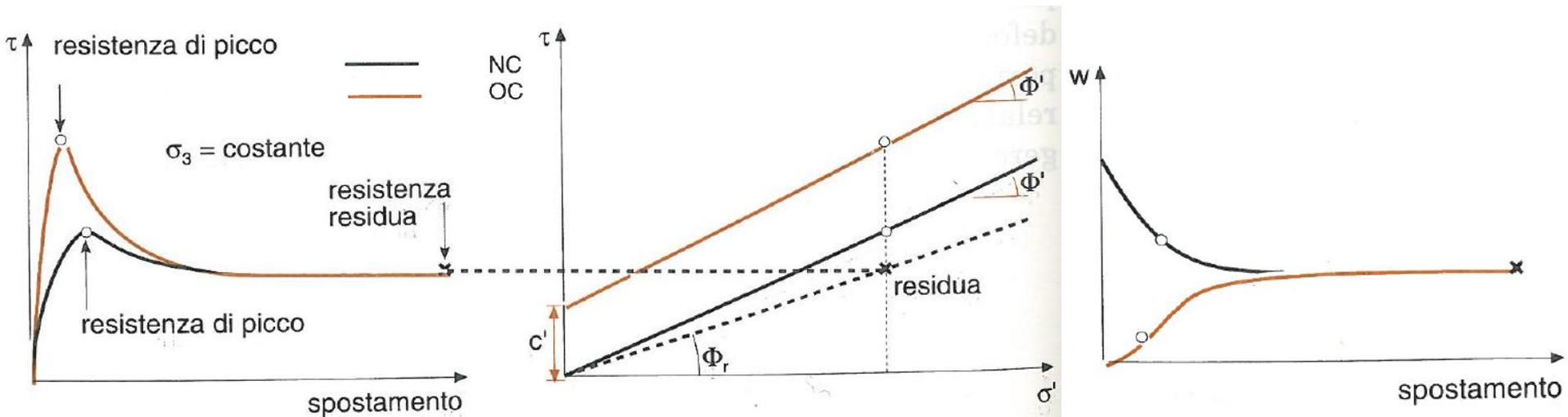
I valori della resistenza cui si fa riferimento nelle varie prove triassiali e di taglio diretto riguardano principalmente il valore di picco (massimo) della resistenza al taglio. Quando **la prova è prolungata fino a raggiungere valori molto elevati di deformazione**, si osserva una **diminuzione della resistenza** fino al raggiungimento di un valore indicato come **resistenza residua**, **che nel caso di materiali a grana grossa si indica come resistenza a volume costante, con un corrispondente angolo di attrito  $\phi_{cv}$** .

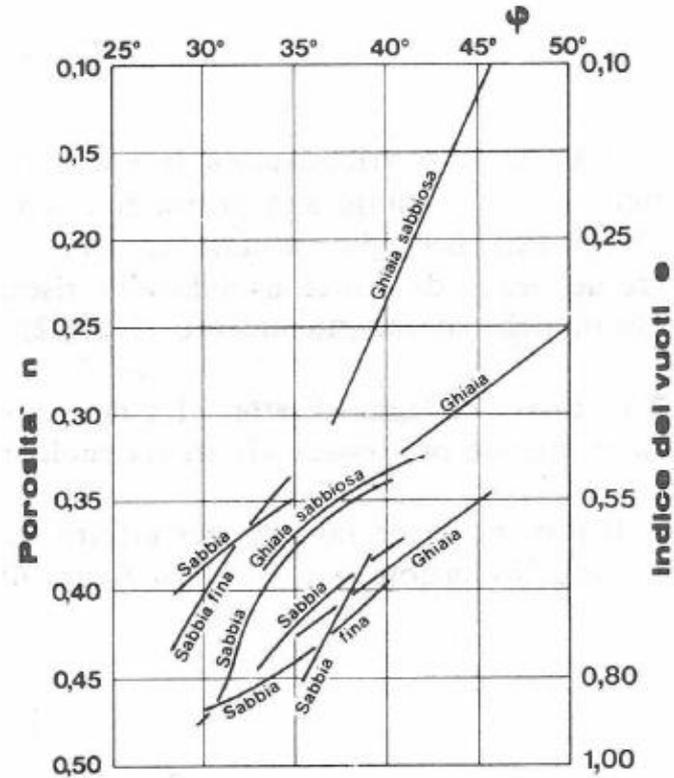
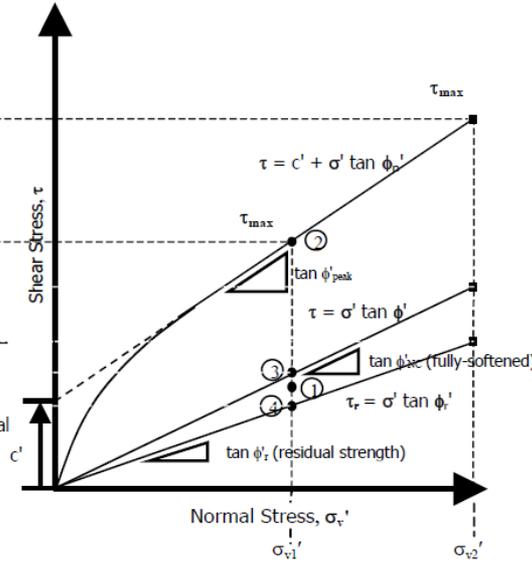
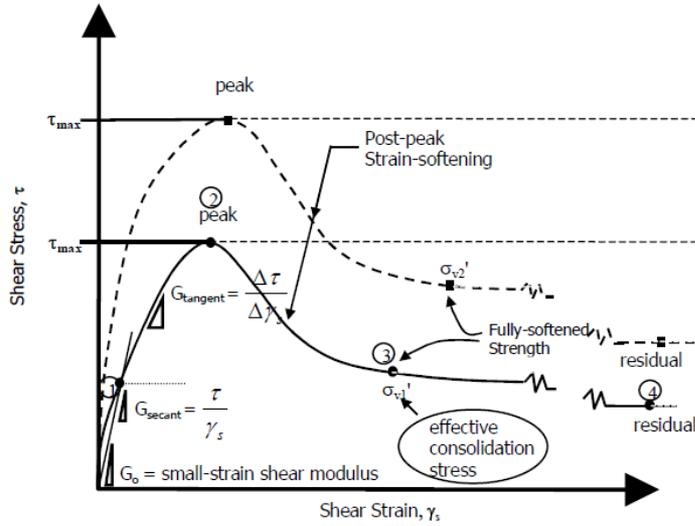
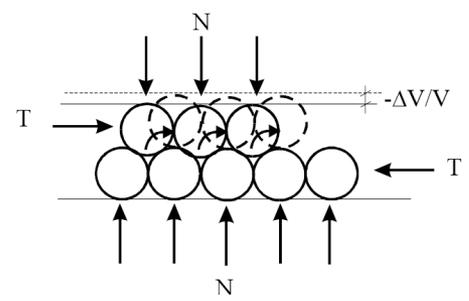
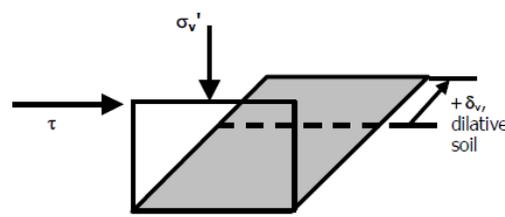
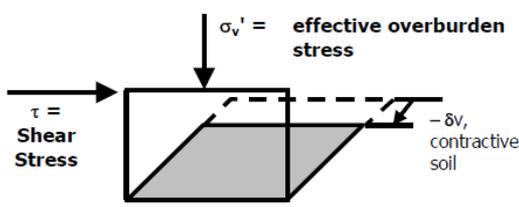
La diminuzione della resistenza di picco fino a quella residua nelle argille è legata principalmente al fenomeno di dilatanza, al riorientamento delle particelle nella zona di rottura e alla distruzione di eventuali legami di cementazione.

La differenza tra la resistenza di picco e quella residua **crece all'aumentare del grado di sovraconsolidazione, del contenuto di argilla ( $\% < 2 \mu m$ ) e dell'indice di plasticità  $I_p$  (quindi della composizione mineralogica dell'argilla)**.

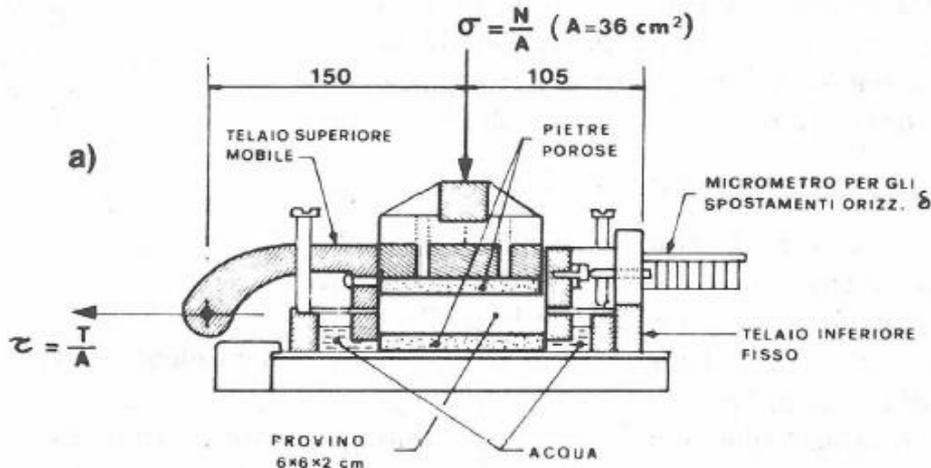
La resistenza residua è indipendente dalla storia tensionale dell'argilla e ciò sembra sia legato ad una rottura progressiva dei legami di adesione fra le particelle e ad un riorientamento delle particelle verso una disposizione parallela.

Per un'argilla possiamo riassumere in un unico diagramma tutte le caratteristiche di taglio in condizioni di tensioni efficaci: si vede che **per l'argilla NC  $c'=0$  e la resistenza residua è pure caratterizzata da  $c'=0$ , ma con un angolo d'attrito  $\Phi_r$  inferiore a quello della stessa argilla**.





Il **MODULO DI TAGLIO** può avere diverse definizioni: *iniziale* (corrispondente alle piccole deformazioni), *secante* (sempre passante per l'origine  $G = \tau/\gamma_s$ ), e *tangente* (pendenza locale della curva  $G = \Delta\tau/\Delta\gamma_s$ ).



Variatione dell'angolo d'attrito  $\phi$  al variare dell'indice dei vuoti e per vari tipi di terreni incoerenti.

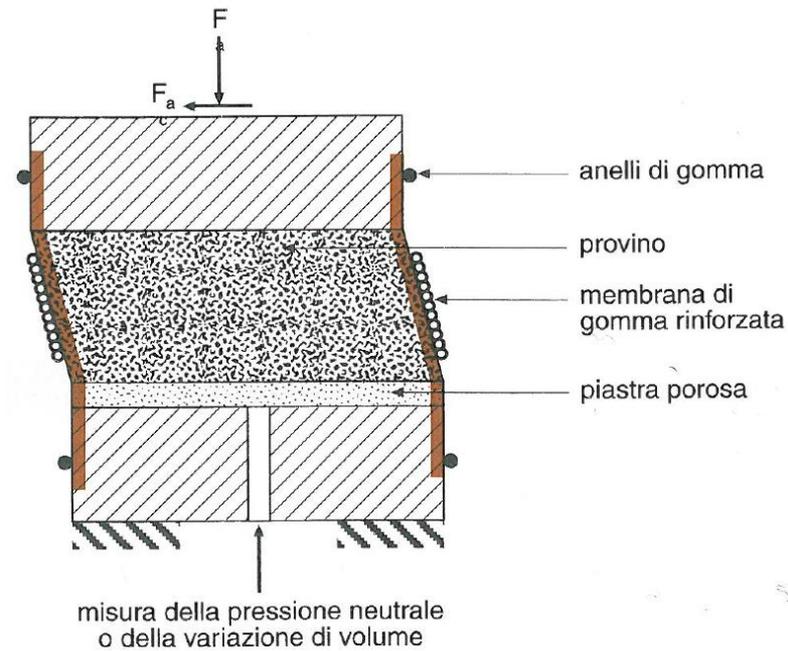
## PROVA DI TAGLIO SEMPLICE

L'apparecchiatura è stata studiata per applicare uno stato di taglio puro al campione.

Il provino circolare è all'interno di una membrana di gomma rinforzata con fili di acciaio, oppure di una membrana di gomma rinforzata esternamente con anelli metallici; **la membrana permette deformazioni di taglio  $\gamma$ , ma impedisce le deformazioni orizzontali ( $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$ ).**

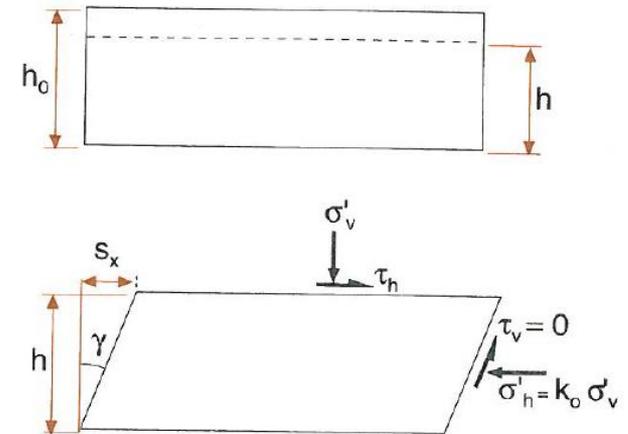
Il campione appoggia su una pietra porosa in comunicazione con l'esterno ed ha quindi possibile controllare il drenaggio ed eventualmente misurare la pressione neutra.

Lo stato tensionale è anche qui del tipo edometrico  $\sigma'_{h0} = K_0 \sigma'_{v0}$ .



Si possono eseguire prove con consolidazione e drenate (CK<sub>0</sub>D) e con consolidazione senza drenaggio (CK<sub>0</sub>U).

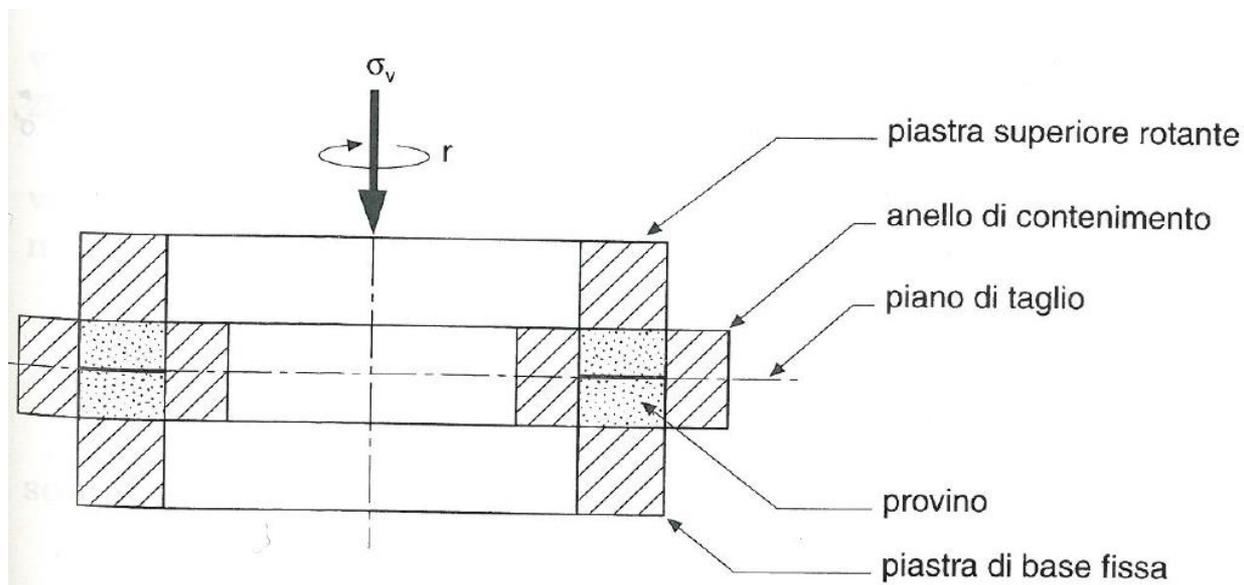
È possibile misurare il carico verticale, dello sforzo di taglio applicato esternamente, della pressione neutra e, misurando i movimenti della piastra, degli spostamenti orizzontali e verticali (rotazioni).



## APPARECCHIO DI TAGLIO TORSIONALE

Per determinare la resistenza residua ed i valori di  $\varphi_r$  corrispondenti si può ricorrere oltre che all'apparecchio di taglio diretto anche a quello di **taglio torsionale**.

Nella prova di taglio diretto, per arrivare a una stabilizzazione dei valori della resistenza residua, può essere necessario eseguire 15÷20 cicli di andata e ritorno della deformazione di taglio, mentre nella prova di taglio torsionale si porta a rottura un provino anulare aumentando lo spostamento relativo delle parti con un unico senso di rotazione fino a raggiungere la resistenza residua.



## RESISTENZA AL TAGLIO E DEFORMABILITA' DI TERRENI A GRANA GROSSA

I terreni a grana grossa saturi non cementati non hanno coesione per cui sono spesso indicati col termine “terreni incoerenti”.

Le sabbie parzialmente sature possono presentare una debole coesione apparente.

Le sabbie e le ghiaie cementate hanno coesione.

Con le usuali tecniche di campionamento non è quasi mai possibile prelevare nei terreni a grana grossa non cementati, campioni idonei alla preparazione di provini “indisturbati” per prove meccaniche di laboratorio.

Pertanto i risultati delle prove di laboratorio, anche se condotte su provini di sabbia ricostituiti alla stessa densità del terreno in sito, non sono rappresentativi del comportamento meccanico del terreno naturale in sito.

Di norma si ritiene più affidabile stimare la resistenza al taglio di sabbie e ghiaie in sito sulla base dei risultati di prove in sito.

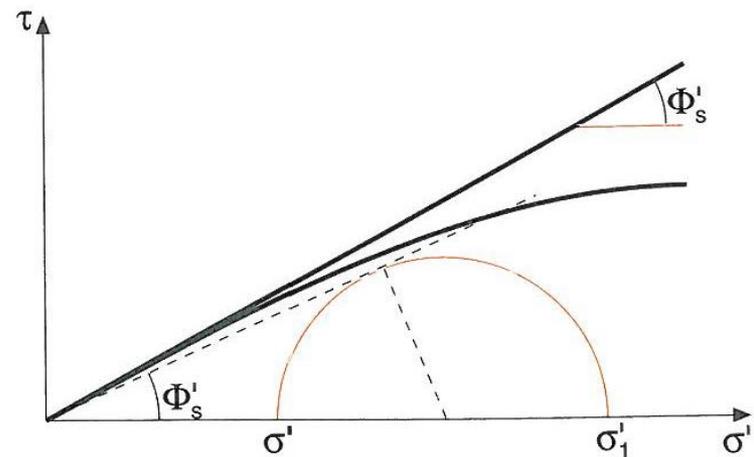
**Le prove di laboratorio sono tuttavia utili sia per determinare la resistenza al taglio di terreni sabbiosi da impiegare come materiale da costruzione, sia per lo studio delle leggi costitutive.**

Durante una prova di resistenza meccanica di laboratorio (ad esempio di taglio diretto o triassiale drenata), il comportamento di due provini della stessa sabbia ma con differente indice dei vuoti (ovvero con differente densità relativa) può essere sensibilmente diverso.

**Tenendo presente l'elevata permeabilità e quindi il fatto che le sovrappressioni si dissipano rapidamente, si può fare riferimento alle prove triassiali in condizioni drenate.**

**Nota.** Di seguito si farà riferimento a pressioni di confinamento (o comunque per pressioni normali al piano di taglio) relativamente basse  $< 0,3$  MPa ( $3 \text{ kg/cm}^2$ ). **Aumentando le pressioni di confinamento l'angolo di picco diminuisce e l'involuppo a rottura ha una curvatura che aumenta all'aumentare della densità della sabbia.**

Questa diminuzione è molto probabilmente legata alla riduzione del comportamento dilatante e alla frantumazione dei grani. L'angolo di attrito può essere influenzato ma in misura decisamente minore anche da fattori diversi dalla densità relativa iniziale e dalla tensione di confinamento.



L'angolo di attrito o meglio l'angolo di resistenza al taglio dipende dalla **dimensione, forma e distribuzione granulometrica** delle particelle.

L'angolo di attrito di una sabbia è influenzato dalla **granulometria** che si fa sentire sull'indice dei vuoti  $e_0$  a parità di  $e_0$  sul grado di mutuo incastro. Infatti **a parità di densità relativa una sabbia uniforme ha un angolo di attrito più basso di una sabbia graduata e particelle tondeggianti portano a valori più bassi di particelle angolose.**

La composizione mineralogica può avere importanza per le ghiaie ed i ciottoli.

Passando poi da sabbia asciutta a sabbia satura si ha una piccola riduzione di  $0,5^\circ \div 1^\circ$ .

**Nella prova triassiale standard le tensioni  $\sigma_2$  e  $\sigma_3 = \sigma_r$  sono eguali e quindi non si può indagare l'influenza di  $\sigma_2$ .** Le ricerche effettuate con apparecchiature di taglio piano e di compressione triassiale vera hanno permesso, di osservare un aumento di  $\phi'$  passando dalla compressione triassiale al taglio piano, aumento dell'ordine di  $4^\circ \div 9^\circ$  per sabbie dense e di  $2^\circ \div 4^\circ$  per sabbie sciolte.

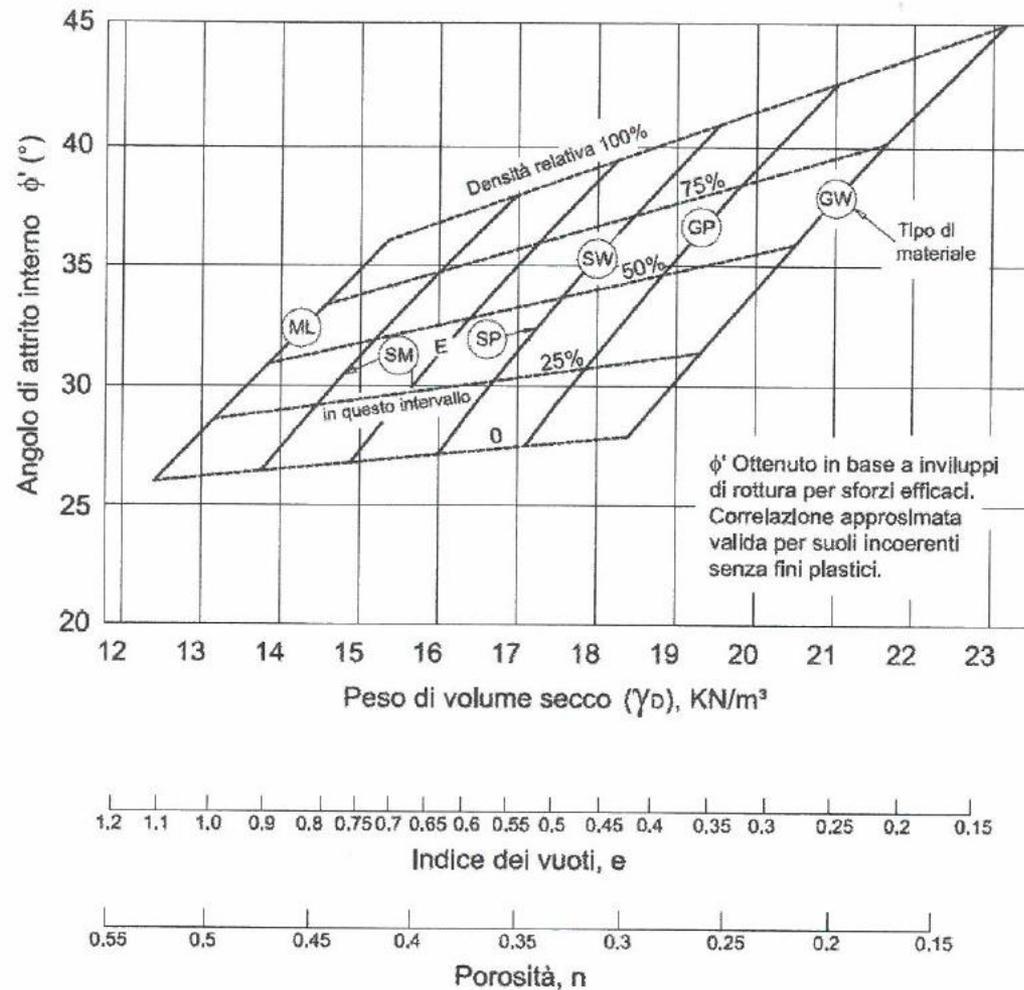
Si è soliti tuttavia fare riferimento al  $\phi'$  medio ottenuto con prove triassiali perché, pur tenendo conto che molti problemi di stabilità o di spinta sono di tipo piano e che quindi si dovrebbero applicare i  $\phi'$  corrispondenti a queste situazioni, si deve anche osservare che la resistenza che si sviluppa lungo la superficie di scorrimento varia da quella di picco per situazioni di spinta attiva (piccole deformazioni) a quella residua per situazioni di spinta passiva (grandi deformazioni).

I principali fattori che influenzano, in misura quantitativamente diversa, l'angolo di resistenza al taglio di picco dei terreni sabbiosi sono:

- la densità,
- la forma e la rugosità dei grani,
- la dimensione media dei grani,
- la distribuzione granulometrica.

Orientativamente il peso relativo dei fattori sopraelencati sul valore dell'angolo di resistenza di picco di un terreno incoerente è indicato in Tabella.

$\phi' = 36^\circ + \Delta\phi'_1 + \Delta\phi'_2 + \Delta\phi'_3 + \Delta\phi'_4$			
<i>Densità</i>	$\Delta\phi'_1$	<i>sciolta</i>	- 6°
		<i>media</i>	0°
		<i>densa</i>	+ 6°
<i>Forma e rugosità dei grani</i>	$\Delta\phi'_2$	<i>spigolo vivi</i>	+ 1°
		<i>media</i>	0°
		<i>arrotondati</i>	- 3°
<i>Dimensione dei grani</i>	$\Delta\phi'_3$	<i>molto arrotondati</i>	- 5°
		<i>sabbia</i>	0°
		<i>ghiaia fine</i>	+ 1°
<i>Distribuzione granulometrica</i>	$\Delta\phi'_4$	<i>ghiaia grossa</i>	+ 2°
		<i>uniforme</i>	- 3°
		<i>media</i>	0°
		<i>distesa</i>	+ 3°



· Angolo di attrito interno un funzione della densità relativa. Correlazione generale

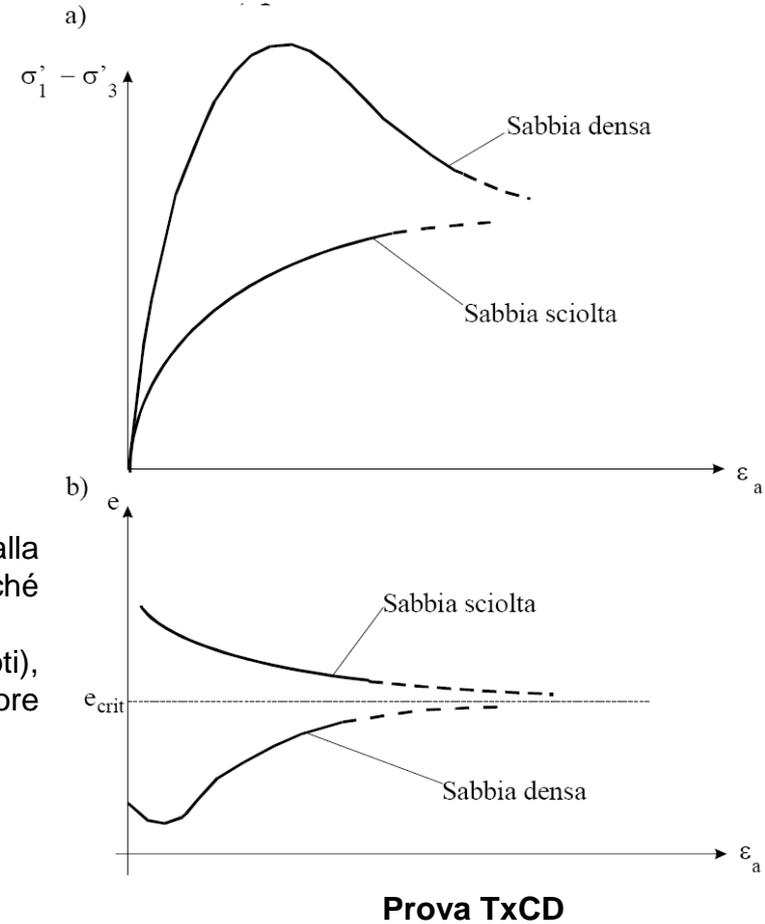
In Figura sono qualitativamente mostrati i diversi comportamenti di un provino di sabbia sciolta e di un provino della stessa sabbia ma più addensato, sottoposti ad una prova triassiale drenata alla stessa pressione di confinamento. Si analizzano gli andamenti dello **sforzo deviatorico** ( $\sigma_1 - \sigma_3$ ) e dell'indice dei vuoti «e», all'aumentare della deformazione assiale  $\epsilon_a$  con  $\sigma_3$  eguale per le due sabbie

Il provino di **sabbia sciolta** presenta al crescere della deformazione assiale  $\epsilon_a$ :

- un graduale aumento della resistenza mobilizzata ( $\sigma'_1 - \sigma'_3$ ) fino a stabilizzarsi su un valore massimo che rimane pressoché costante anche per grandi deformazioni,
- una progressiva e graduale diminuzione del volume (e quindi dell'indice dei vuoti) con tendenza a stabilizzarsi su un valore minimo, cui corrisponde un **indice dei vuoti critico**,  $e_{crit}$ , che rimane pressoché costante anche per grandi deformazioni.

Il provino di **sabbia densa**, invece, presenta al crescere della deformazione assiale  $\epsilon_a$ :

- una curva di resistenza con un massimo accentuato, corrispondente alla condizione di rottura, e un valore residuo, per grandi deformazioni, pressoché eguale al valore di resistenza mostrato dal provino di sabbia sciolta,
- una iniziale, piccola diminuzione di volume (e quindi di indice dei vuoti), seguita da un'inversione di tendenza per cui l'indice dei vuoti supera il valore iniziale e tende allo stesso valore di indice dei vuoti critico,  $e_{crit}$ .

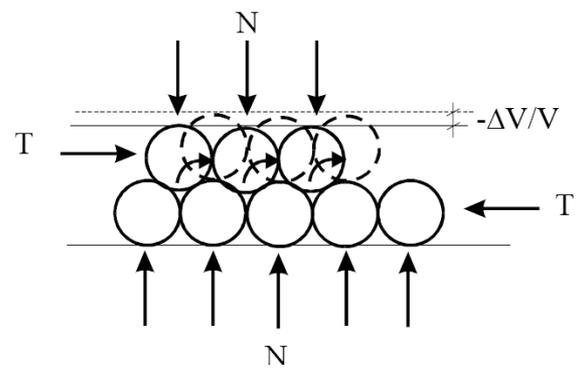


**In sintesi, il provino di sabbia densa, rispetto a quello di sabbia sciolta:**

- è più rigido,
- ha una maggiore resistenza di picco,
- ha eguale resistenza residua,
- aumenta di volume per grandi deformazioni, mentre il provino di sabbia sciolta diminuisce di volume,
- ha lo stesso indice dei vuoti critico, ovvero la stessa densità relativa per grandi deformazioni.

La sabbia densa, sotto l'applicazione dello sforzo deviatorico all'inizio aumenta leggermente di densità, poi diminuisce di densità con un **corrispondente aumento di volume**. Di conseguenza per arrivare a rottura occorre energia sia per il lavoro dovuto all'attrito legato agli spostamenti relativi delle particelle (traslazioni e rotazioni e per la sabbia sciolta sono in prevalenza traslazioni) sia per il lavoro svolto per permettere l'aumento di volume contrastato dalle componenti normali (tensione  $\sigma_3$  di contenimento).

La **resistenza per arrivare alla rottura è quindi maggiore di quella della sabbia sciolta**, la curva sforzi-deformazioni è corrispondente ad un **materiale rammollente (incrudente negativo) o dilatante** e nella curva è chiaramente individuato un valore massimo detto di rottura.

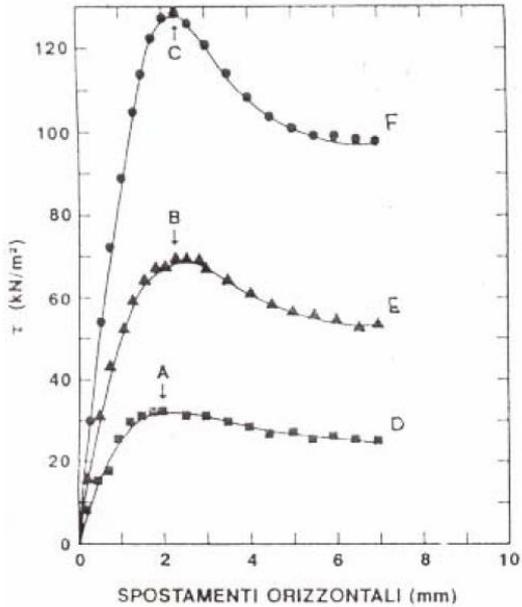


Inoltre si vede che, superata la rottura, si ha una **diminuzione di resistenza** attribuibile alla diminuzione del grado di incastro, **l'indice dei vuoti aumenta tendendo per grandi deformazioni verso il valore critico, cioè a quel valore che non varia con il procedere delle deformazioni (quindi senza variazioni di volume e di resistenza)**.

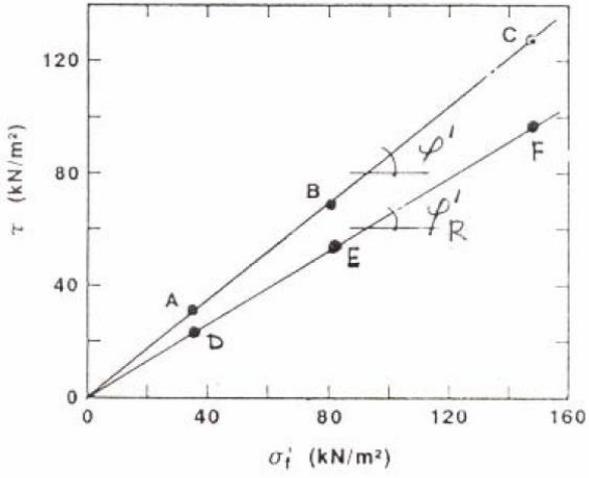
**Il valore dell'indice dei vuoti critico, che discrimina fra comportamento deformativo volumetrico dilatante e contrattivo, non è però una caratteristica del materiale ma dipende dalla pressione efficace di confinamento, per cui un provino di sabbia di una data densità relativa può avere comportamento dilatante a bassa pressione efficace di confinamento e contrattivo (incrudente positivo) ad alta pressione efficace di confinamento.**

Per una sabbia che presenta un massimo nelle curve tensioni – deformazioni si possono definire due diverse rette di involuppo della resistenza, ovvero due angoli di resistenza al taglio: **l'angolo di resistenza al taglio di picco (a rottura),  $\phi'_P$**  e **l'angolo di resistenza al taglio residuo (per grandi deformazioni),  $\phi'_R$** .

**L'angolo di resistenza residuo può essere determinato in laboratorio con prove di taglio diretto con più cicli di carico e scarico, poiché la semplice corsa della scatola di taglio non è sufficiente a produrre grandi spostamenti.**



**RESISTENZA AL TAGLIO DI PICCO E RESIDUA DI UNA SABBIA Densa**

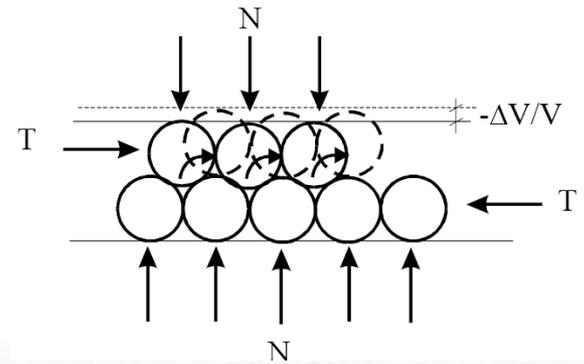


Il **diverso comportamento deformativo volumetrico** può essere spiegato considerando il terreno un insieme di sfere eguali e a contatto.

La disposizione che corrisponde al **massimo indice dei vuoti** è quella in cui i centri delle sfere sono i nodi di un **reticolo cubico**.

La disposizione che corrisponde al **minimo indice dei vuoti** è quella in cui i centri delle sfere sono i nodi di un **reticolo tetraedrico**.

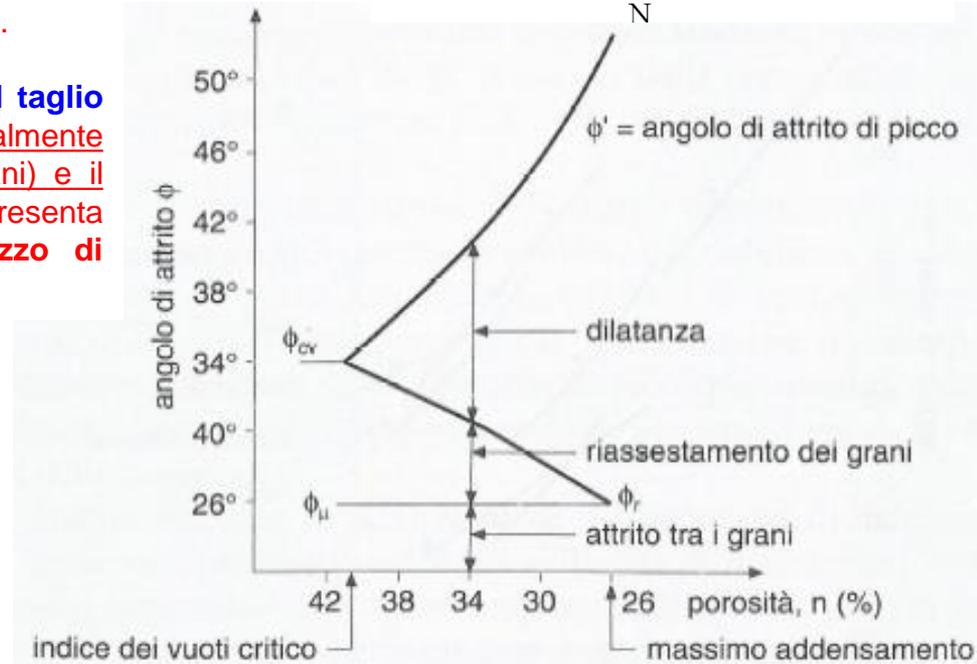
Nel primo caso lo scorrimento fra due parti dell'insieme implica una diminuzione di volume, nel secondo caso un aumento.



Si può definire:

- un valore massimo di  $\phi'$  (detto anche di picco)
- e un valore finale detto anche  $\phi_{cv}$  (angolo a volume costante).

$\phi'$  può essere meglio denominato **angolo di resistenza al taglio** invece che **angolo di attrito interno**, poiché rappresenta globalmente l'attrito tra i grani, il mutuo incastro (riassetamento dei grani) e il lavoro connesso all'aumento di volume, mentre  $\phi_{cv}$  rappresenta l'attrito tra i grani e l'assestamento dei grani a mezzo di traslazioni.



L'angolo di resistenza al taglio (d'attrito di picco) può quindi essere rappresentato nelle sue componenti che variano con la porosità indicando:

- $\phi_{\mu}$  l'angolo di attrito fra particelle;
- $\phi_{cv}$  l'angolo a volume costante;
- $\phi_r$  l'angolo corretto per il lavoro della dilatanza.

Le terre incoerenti presentano un angolo di picco generalmente compreso tra 30° e 45°.

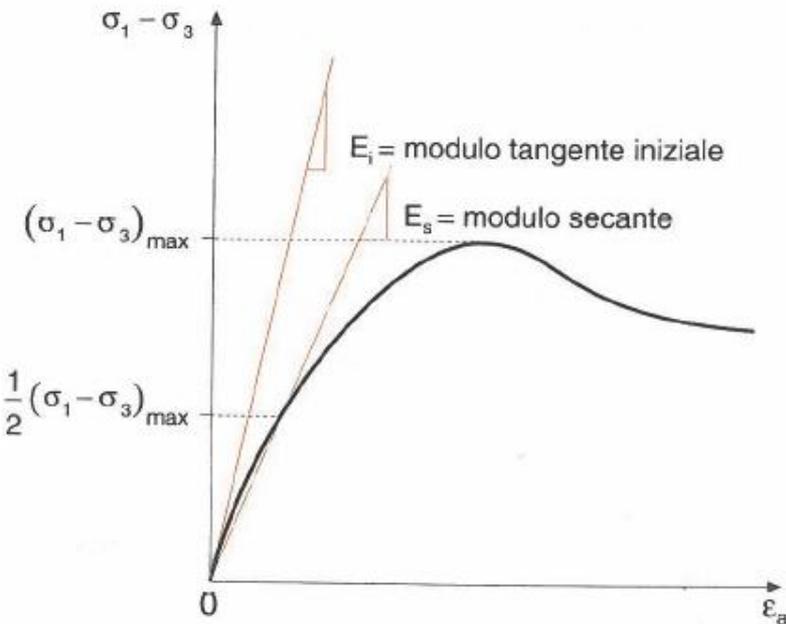
L'angolo  $\phi_{cv}$  legato invece principalmente alle caratteristiche mineralogiche del materiale, sembra generalmente compreso tra 30° e 35°.

## CARATTERISTICHE E PARAMETRI DI DEFORMABILITÀ DEI TERRENI INCOERENTI

Risultano evidenti le difficoltà di determinarli innanzitutto per la quasi impossibilità di avere campioni indisturbati, poi per le difficoltà connesse ad una corretta esecuzione ed interpretazione delle prove in situ e infine per la grande sensibilità dei parametri a molti fattori. D'altro lato però la deformabilità dei terreni a grana grossa, per il campo di tensioni più frequentemente interessate, è bassa.

**Con riferimento alle prove triassiali si può rappresentare la compressibilità a mezzo del modulo tangente, che indica la pendenza di una linea retta tangente ad un particolare punto della curva sforzi-deformazioni, o mediante il modulo secante che indica la pendenza della retta che collega due punti della curva sforzi-deformazioni.**

Si considera il **modulo tangente iniziale** riferito come tangente alla curva per l'origine o il **modulo secante** corrispondente alla retta passante per l'origine e per il punto corrispondente allo sforzo deviatorico pari al 50% di quello a rottura.



Limiti inferiori e superiori del modulo  $E_s$  per alcuni terreni

Suolo	$E_s$ (KPa)
Argilla:	
Molto soffice	350 : 3 000
Soffice	2 000 : 5 000
Media	4 000 : 8 000
Dura	7 000 : 18 000
Sabbiosa	30 000 : 40 000
Loess (secco)	15 000 : 60 000
Sabbia:	
Limosa	7 000 : 20 000
Sciolta	10 000 : 25 000
Addensata	50 000 : 80 000
Sabbia e ghiaia:	
Addensata	100 000 : 200 000

Valori tipici del coefficiente di Poisson

$\nu$	Tipo di suolo
0.40 - 0.50	Suoli argillosi in genere
0.45 - 0.50	Suoli argillosi saturi
0.30 - 0.40	Suoli incoerenti, addensati o molto addensati
0.30 - 0.42	Argilla con sabbia o limo
0.20 - 0.35	Suoli incoerenti, sciolti o addensati

## PROVE TRIASSIALI

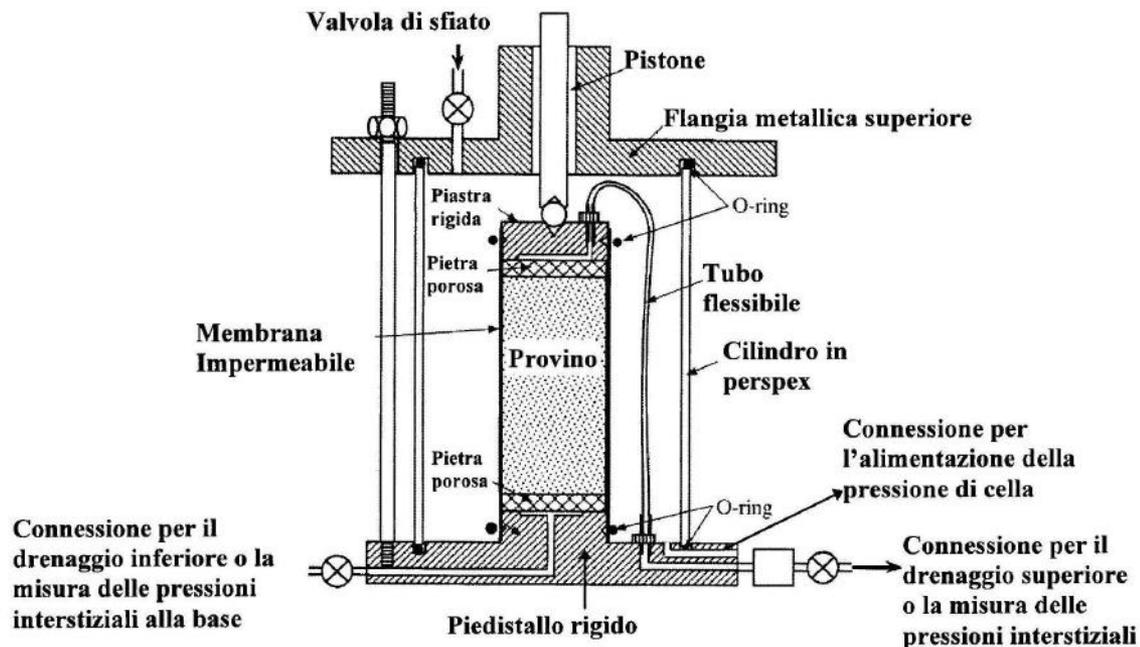
L'attrezzatura di prova fondamentale per lo studio del comportamento delle terre è quella per le **PROVE DI COMPRESSIONE "TRIASSIALE" O CILINDRICA**. Questa apparecchiatura è usata principalmente per determinare la resistenza al taglio poiché, pur presentando alcuni svantaggi, dà la possibilità di studiare il problema in un grande campo di combinazioni di tensioni e di controllare e misurare sia la pressione dei pori che le variazioni di volume del campione di terra.

Di solito il provino è cilindrico con altezza pari a 2÷2,5 volte il diametro: abbastanza usuali sono dimensioni di circa 38 mm (1,5 pollici) di diametro e di 75÷85 mm di altezza; più raramente si lavora con dimensioni di 70 ÷100 mm di diametro e 180 ÷ 220 mm di altezza.

Le **prove triassiali standard** sono eseguite, con modalità diverse, su **campioni ricostituiti di materiali sabbiosi** e su **campioni indisturbati o ricostituiti di terreni a grana fine** per determinarne le caratteristiche di resistenza al taglio e di rigidità.

Per i materiali a grana grossa il diametro del provino deve essere almeno pari a 5 ÷ 10 volte la dimensione del grano più grosso e quindi non è possibile eseguirle su terreni contenenti ghiaie o ciottoli salvo disporre di apparecchiature speciali di grandi dimensioni.

Nella prova triassiale il provino cilindrico di terra è racchiuso lateralmente da una sottile membrana di gomma fermata alle estremità da anelli pure di gomma; è separato dalla base e dal cappello di carico mediante piastre porose ed è posto in una cella cilindrica riempita d'acqua. Alcuni collegamenti all'estremità del campione permettono il drenaggio dell'acqua o dell'aria dei pori del provino, la misura della pressione neutra e **consentono di procedere alla saturazione del provino con l'applicazione di una pressione (back pressure) al fluido interstiziale**.



Il provino risulta idraulicamente isolato dall'acqua interna alla cella di perspex, ma in collegamento idraulico con l'esterno, poiché sia il basamento che la piastra di carico sono attraversati da condotti collegati con sottili e flessibili tubi di drenaggio.

I tubi di drenaggio possono essere anche utilizzati per mettere in pressione l'acqua contenuta nel provino (**contropressione interstiziale o back pressure**), o possono essere chiusi e collegati a strumenti di misura della pressione dell'acqua. Il tetto della cella è attraversato da un'asta verticale scorrevole (pistone di carico) che può trasmettere un carico assiale al provino attraverso la piastra di carico.

La **verifica dell'avvenuta saturazione** viene fatta mediante la misura del **coefficiente B di Skempton**: a drenaggi chiusi si incrementa la pressione di cella di una quantità  $\Delta\sigma$  e si misura il conseguente aumento di pressione interstiziale,  $\Delta u$ . Se il rapporto  $\Delta u/\Delta\sigma$ , ovvero il coefficiente B, risulta pari ad 1, il provino è saturo (in pratica si ritiene sufficiente  $B > 0.95$ ), se invece risulta  $B < 0.95$  il provino non è saturo. Pertanto, per favorire la saturazione, si incrementano della stessa quantità i valori di pressione di cella e di contropressione interstiziale (in modo da mantenere costante la pressione efficace di consolidazione), e si ripete la verifica dell'avvenuta saturazione eseguendo una nuova misura di B.

## ESECUZIONE DELLA PROVA

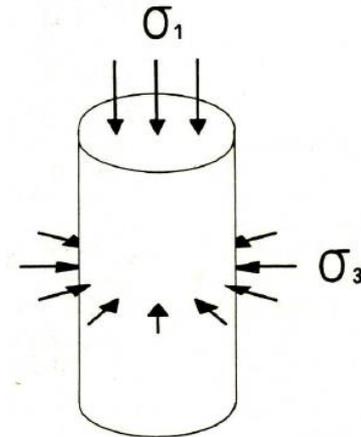
- **1a Fase: Compressione isotropa** del terreno con il fluido di cella mantenuto a pressione costante (indicata con  $\sigma_r$ ).  
**Se il terreno è collegato ad un condotto di drenaggio aperto, il terreno si consolida sotto la pressione di cella applicata e la prova si dirà CONSOLIDATA. In caso contrario la prova si dirà NON CONSOLIDATA.**
- **2a Fase (Taglio):** Fase di **rottura per compressione assiale del campione** con un pistone che avanza a velocità costante (tensione  $\sigma_a$ ), fino a grandi deformazioni assiali (20%).  
**La fase di rottura avviene in condizioni DRENATE se i drenaggi vengono mantenuti aperti.**  
**In caso di drenaggi chiusi la fase di rottura avviene in condizioni NON DRENATE.**

**La prova è ripetuta per tre diversi livelli della tensione di cella.**

Lo **stato tensionale** a cui è soggetto un provino durante una prova triassiale è di tipo **assialsimmetrico** e rimane tale durante tutte le fasi della prova, **quindi le tensioni principali agiscono sempre lungo le direzioni assiale e radiali del provino.**

Nella prova triassiale standard un provino cilindrico di terra è prima sottoposto ad una pressione isotropica  $\sigma_r = \sigma_a$  (fase di consolidazione), applicata mettendo in pressione l'acqua di cella (pressione di contenimento) e poi ad una pressione  $\sigma_a - \sigma_r$  in direzione assiale, applicata mediante una pressa a velocità di deformazione costante, fino ad arrivare alla rottura (fase di rottura).

Non essendovi tensioni di taglio sulle superfici del provino, la tensione assiale  $\sigma_a$  e quella di contenimento  $\sigma_r$  sono le tensioni principali maggiore e minore  $\sigma_1 = \sigma_3$ , e **l'incremento della tensione assiale  $\sigma_a - \sigma_r = \sigma_1 - \sigma_3$  è indicato come tensione o sforzo deviatorico.**



Le prove triassiali si distinguono principalmente in relazione alle condizioni di drenaggio che si hanno durante ogni stadio.

- a) prova triassiale non consolidata non drenata (TxUU):** nelle **prove senza drenaggio** non viene permesso alcun drenaggio e quindi nessuna dissipazione di pressione dei pori né durante l'applicazione della pressione di contenimento  $\sigma_2 = \sigma_3$  né durante l'applicazione della pressione verticale  $\sigma_1 - \sigma_3$ ; **non si misura la pressione neutrale.**
- b) prova triassiale consolidata isotropicamente drenata (TxCD):** nelle **prove con drenaggio** il drenaggio è possibile durante tutta la prova, cosicché si ha consolidazione completa sotto la pressione  $\sigma_3$ , durante l'applicazione della pressione verticale  $\sigma_1 - \sigma_3$  **non si ha formazione di pressione neutra in eccesso e si misurano le variazioni di volume del provino.**
- c) prova triassiale consolidata isotropicamente non drenata (TxCU):** nelle **prove con consolidazione senza drenaggio** viene permesso il drenaggio durante l'applicazione della pressione di contenimento  $\sigma_3$  finché il campione è completamente consolidato sotto questa pressione, mentre durante l'applicazione della pressione verticale  $\sigma_1 - \sigma_3$  non è permesso alcun drenaggio e **si misura la pressione neutra.**

Per ciascuno dei tre tipi di prova il provino è inizialmente saturato mediante la contemporanea applicazione di una tensione isotropa di cella e di una poco minore contropressione dell'acqua interstiziale.

TABELLA 2.13 – **Criteri di scelta dei parametri di resistenza a taglio delle argille e materiali fini per alcuni tipi di problemi ingegneristici (materiali saturi)**

Problema geotecnico	Condizioni	Esempi
Stabilità a breve termine	UU	Stabilità a breve termine di trincee e scavi, sollecitazioni simiche, fondazioni dirette in compressione (*), palificazioni in compressione (*), opere provvisorie di sostegno e paratie a breve termine, tiranti provvisorie a breve termine, aperture di cavità nel terreno per tempi limitati
Terreno consolidato, carichi brevi e intensi	CU	Stabilità di trincee e scavi, fondazioni dirette e palificazioni, sia monotonicamente in compressione sia sotto carichi variabili, problemi di paratie e muri paraterre con carichi variabili a monte, stabilità dei pendii quando i profili vengono modificati, costruzione di rilevati
Terreno consolidato, carichi di lungo periodo	CD	Fondazioni con intensi carichi poco variabili nel tempo, stabilità dei pendii a lungo termine, apertura di cavità nel terreno a lungo termine, paratie e muri con funzione di sostegno permanente, tiranti permanenti, casi (rari) di materiali stabilmente asciutti

(\*) In questi casi la consolidazione nel tempo del carico verticale di compressione contribuisce a migliorare la coesione in condizioni CU e CD (si veda la figura 2.26). Si considerano le condizioni UU perché sono normalmente più critiche dal punto di vista della verifica di capacità portante.

# PROVA TRIASSIALE NON CONSOLIDATA NON DRENATA (TXUU)

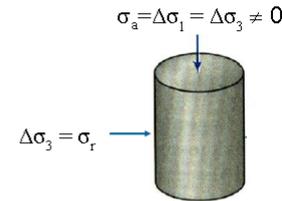
## Prova non consolidata e non drenata

Nella prima fase, dopo avere chiuso i drenaggi, il provino è sottoposto a compressione isotropa (**pressione di contenimento isotropa  $\sigma_c = \sigma_3$** ) portando in pressione il fluido di cella al valore assegnato di pressione totale  $\sigma_c$ .

Se il provino è saturo, e quindi il coefficiente B di Skempton è pari ad 1, il volume del provino non varia e l'incremento della pressione di cella (totale) comporta un uguale aumento della pressione interstiziale, mentre le tensioni efficaci non subiscono variazioni e quindi non varia la pressione efficace,  $\sigma'_c$ .

**L'applicazione di  $\sigma_3$  dà luogo ad un eguale aumento della pressione neutra u e quindi non avviene la consolidazione; con l'applicazione dello sforzo deviatorico si arriva a rottura praticamente a volume costante.**

### Fase 1: compressione isotropa non drenata



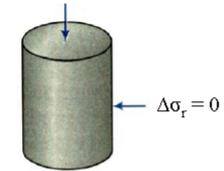
Dopo l'applicazione della pressione di cella:

$$\Delta u \neq 0$$

Rappresentazione in termini di tensioni totali perchè le tensioni efficaci non sono note

### Fase 2: rottura in condizioni non drenate

$$\frac{F_a}{A} = \sigma_a = \Delta \sigma_1 \neq 0$$



Durante la fase di taglio:

$$\Delta u \neq 0$$

$$\sigma_1 = \sigma_a = \sigma_r + \Delta \sigma_1 = \sigma_r + F/A$$

Rappresentazione in termini di tensioni totali perchè le tensioni efficaci non sono note

Nella seconda fase, a drenaggi ancora chiusi, si applica lo sforzo deviatorico  $\sigma_1 - \sigma_3$  fino a rottura, a tal fine si fa avanzare la pressa su cui si trova la cella triassiale a velocità costante, anche piuttosto elevata. Durante la seconda fase è controllata la variazione nel tempo dell'altezza del provino, ed è misurata la forza assiale esercitata sul provino, mentre di norma non è misurato l'incremento di pressione interstiziale.

Tali misure permettono di calcolare, al variare del tempo, fino ed oltre la rottura del provino:

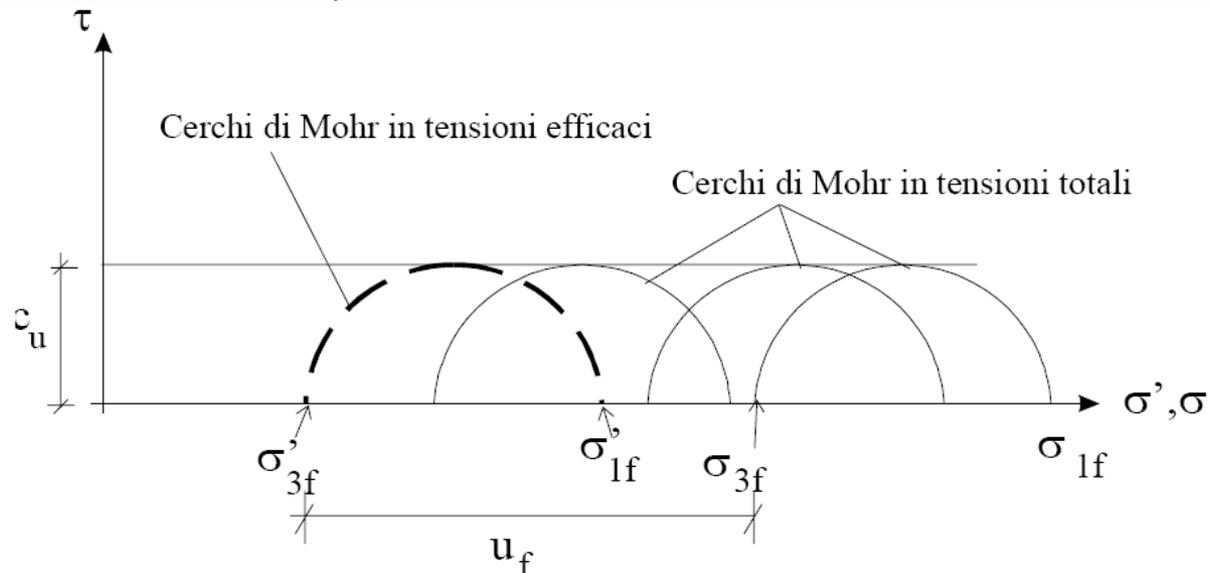
- la deformazione assiale media,  $\epsilon_a$ ,
- la tensione assiale media,  $\sigma_a$ , (e quindi anche la tensione deviatorica media,  $\sigma_a - \sigma_r = \sigma'_a - \sigma'_r$ , essendo  $\sigma_r$  la pressione radiale).

La prova viene eseguita su almeno tre provini a differenti pressioni totali di cella.

Poiché la **pressione efficace di consolidazione dei tre provini è la stessa**, **i cerchi di Mohr a rottura dei tre provini nel piano delle tensioni totali avranno lo stesso diametro e quindi saranno inviluppati da una retta orizzontale di equazione:  $\tau = c_u$**

Eseguendo la prova su tre provini dello stesso campione variando  $\sigma_3$  si trova uno sforzo deviatorico a rottura  $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$  **pressoché eguale** e nel diagramma  $\tau - \sigma$  in termini di tensioni totali si hanno tre cerchi di dimensioni pressoché eguali **poiché vi sono state variazioni di tensioni effettive eguali per i tre provini**.

Se si misurasse la pressione interstiziale a rottura per i tre provini e si traslassero i cerchi di Mohr di una quantità pari alla pressione interstiziale misurata a rottura per ciascuno di essi, si otterrebbero cerchi coincidenti in termini di tensioni efficaci.



$$c_u = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$$

**Risultati di prove TxUU su provini saturati e a differenti pressioni totali di cella ( $\sigma_c$ )<sub>i</sub>**

**Le prove senza drenaggio vengono eseguite generalmente su terre coerenti sature o parzialmente sature; nel caso di terre sature queste prove sono eseguite su campioni indisturbati di argille, limi, argille organiche per misurare la resistenza che hanno strati naturali di terreno. La resistenza al taglio in condizione non drenate,  $c_u$ , che si ricava dalle prove è dipendente, a parità di terreno, dalla pressione efficace di consolidazione in sito.**

Occorre tenere presente che durante le operazioni di prelievo, trasporto, estrazione dalla fustella, formazione dei provini, il terreno subisce comunque un disturbo ineliminabile. In particolare, anche se il campione fosse prelevato con la massima cura, non è fisicamente possibile ripristinare in laboratorio contemporaneamente lo stato tensionale e deformativo del campione in sito.

La coesione  $c_u$  che talvolta viene indicata con  $S_u$ , è detta **resistenza al taglio in condizione non drenata** (o senza drenaggio) o anche **resistenza al taglio iniziale** ed è usata nelle verifiche di stabilità eseguite in termini di tensioni totali e che, per questi tipi di terreno, sono conosciute anche come **verifiche con  $\varphi_u = 0$  o verifiche in condizioni non drenate**.

In realtà si potrebbero eseguire le verifiche in termini di tensioni effettive, ma bisognerebbe conoscere la variazione di pressione neutra  $u$ , il che è spesso molto difficile.

Il valore di  $c_u$  può essere ottenuto in laboratorio anche dalla prova di compressione con espansione libera ( $\sigma_3 = 0$ ) ma la tendenza attuale è quella di eseguire prove TxUU perché danno risultati più affidabili.

**La prova TxUU dà valori di  $c_u$  che sono influenzati dal disturbo nel campionamento, disturbo che a sua volta è influenzato, oltre che dal tipo di campionamento, anche dal grado di sovraconsolidazione OCR e dalla sensibilità delle argille.**

In genere  $c_u$  è:

- sottovalutata rispetto al valore in situ con le argille NC
- e sopravvalutata con le argille OC fessurate perché in genere si lavora su provini di piccole dimensioni.

L'utilizzazione di  $c_u$  nelle verifiche dà in genere risultati soddisfacenti fino a che non si pretenda di adottare coefficienti di sicurezza molto bassi.

Il **Modulo elastico non drenato  $E_u$**  per terreni coesivi può essere collegato a  $c_u$  con la relazione empirica  $E_u = \alpha c_u$  con **valori di  $\alpha$  variabili tra 50 e 1000 e in diminuzione all'aumentare dell'indice di plasticità  $I_p$  e del rapporto di consolidazione OCR.**

## TERRENO PARZIALMENTE SATURO

Se i provini di terreno sono sottoposti a prova TxUU senza averli preventivamente saturati, l'applicazione della pressione di cella, anche se a drenaggi chiusi, determina un incremento delle pressioni efficaci, una riduzione di volume, poiché l'aria contenuta nei vuoti è molto compressibile, ed un aumento del grado di saturazione.

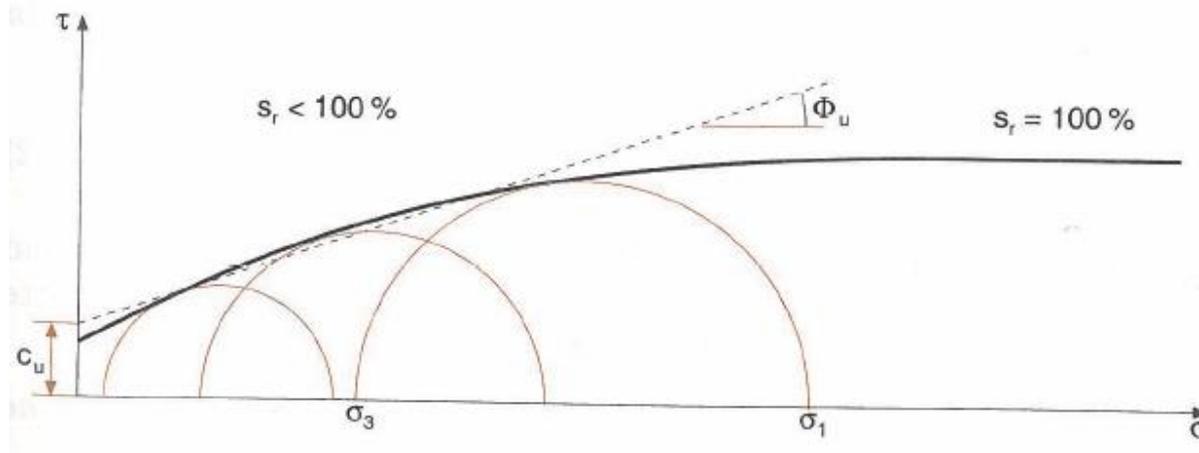
Le prove senza drenaggio su terre parzialmente sature sono generalmente eseguite su campioni di materiale di rilevato compattati in laboratorio con valori prefissati del contenuto di acqua e della densità.

Sono pure eseguite su campioni indisturbati di strati naturali parzialmente saturi e su campioni prelevati da rilevati esistenti.

**L'involuppo a rottura, in termini di tensioni totali, risulterà curvilineo per basse pressioni di confinamento e orizzontale per le pressioni più elevate.**

**La resistenza aumenta con la pressione della cella poiché la compressione dell'aria dei vuoti permette un aumento delle pressioni effettive. Tuttavia l'aumento di resistenza diventa sempre più piccolo man mano che l'aria viene compressa o va in soluzione e cessa quando le sollecitazioni sono sufficientemente grandi da determinare la saturazione e quindi  $\Phi_u$  si avvicina a zero.**

La linea di involuppo alla rottura espressa in termini di tensioni totali non è quindi lineare ed i valori di  $c_u$  e  $\phi_u$  devono essere stabiliti per campi delle tensioni ben determinati.



**Risultato di prove TxUU su provini non saturati**

# TRIASSIALE CONSOLIDATA ISOTROPICAMENTE DRENATA (TxCD)

## Prova consolidata e drenata

Dopo avere eseguito la saturazione, la prova si svolge in due fasi.

Nella prima fase il provino saturo è sottoposto a compressione isotropa mediante un incremento della pressione di cella, **a drenaggi aperti fino alla completa consolidazione**.

La pressione di consolidazione,  $\sigma'_c$ , è pari alla differenza fra pressione di cella (totale),  $\sigma_c$ , e contropressione interstiziale,  $u_0$ . Il processo di consolidazione è controllato attraverso la misura nel tempo del volume di acqua espulso e raccolto in una buretta graduata, che viene diagrammato in funzione del tempo.

Nella seconda fase, **ancora a drenaggi aperti**, si fa avanzare il pistone a velocità costante e sufficientemente bassa da non produrre sovrappressioni interstiziali all'interno del provino. La velocità può essere scelta in modo inversamente proporzionale al tempo di consolidazione della prima fase. Durante la seconda fase è controllata la variazione nel tempo dell'altezza del provino, e **sono misurate:**

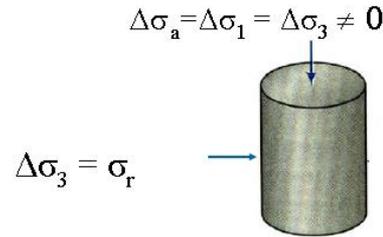
- la forza assiale esercitata dal pistone
- la variazione di volume del provino.

Tali misure permettono di calcolare, fino ed oltre la rottura del provino:

- la deformazione assiale media,  $\varepsilon_a$ ;
- la deformazione volumetrica media,  $\varepsilon_v$ , (e quindi anche la deformazione radiale media,  $\varepsilon_r = (\varepsilon_v - \varepsilon_a)/2$ ;
- la tensione assiale media,  $\sigma_a$ , (e quindi anche di tensione deviatorica media,  $\sigma_a - \sigma_r = \sigma'_a - \sigma'_r$ , essendo  $\sigma_r$  la pressione radiale che rimane costante durante la prova).

**L'esecuzione della prova TxCD richiede un tempo tanto maggiore quanto minore è la permeabilità del terreno, ed è pertanto GENERALMENTE RISERVATA A TERRENI SABBIOSI O COMUNQUE ABBASTANZA PERMEABILI.**

### Fase 1: consolidazione isotropa



Alla fine della consolidazione:

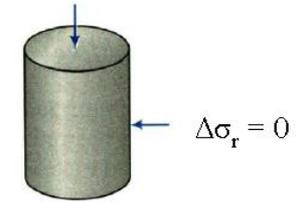
$$\Delta u = 0$$

$$\Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_1'; \quad \Delta\sigma_3 = \Delta\sigma_3'$$

$$\sigma_3 = \sigma_3' = \sigma_r; \quad \sigma_1 = \sigma_1' = \sigma_r$$

### Fase 2: rottura in condizioni drenate

$$\frac{F_a}{A} = \sigma_a = \Delta\sigma_1 \neq 0$$



Durante la fase di taglio:

$$\Delta u = 0$$

$$\Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_1'$$

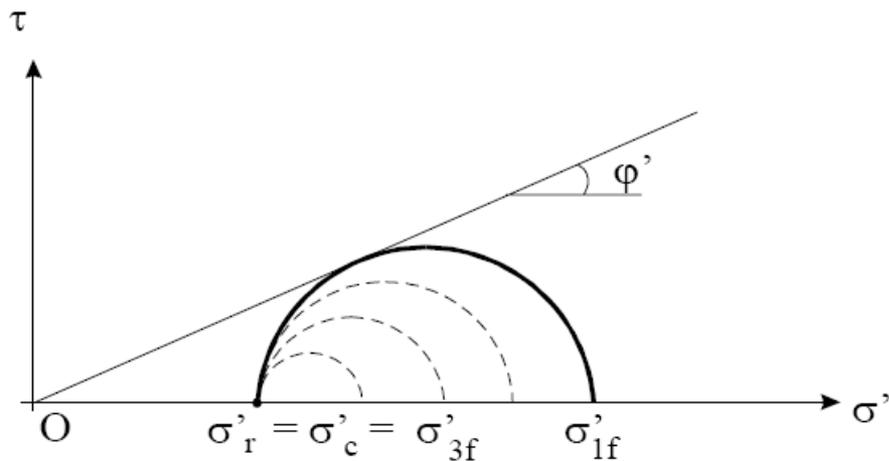
$$\sigma'_1 = \sigma_a' = \sigma_r + \Delta\sigma_1' = \sigma_r + F/A$$

$$\sigma_3' = \sigma_r$$

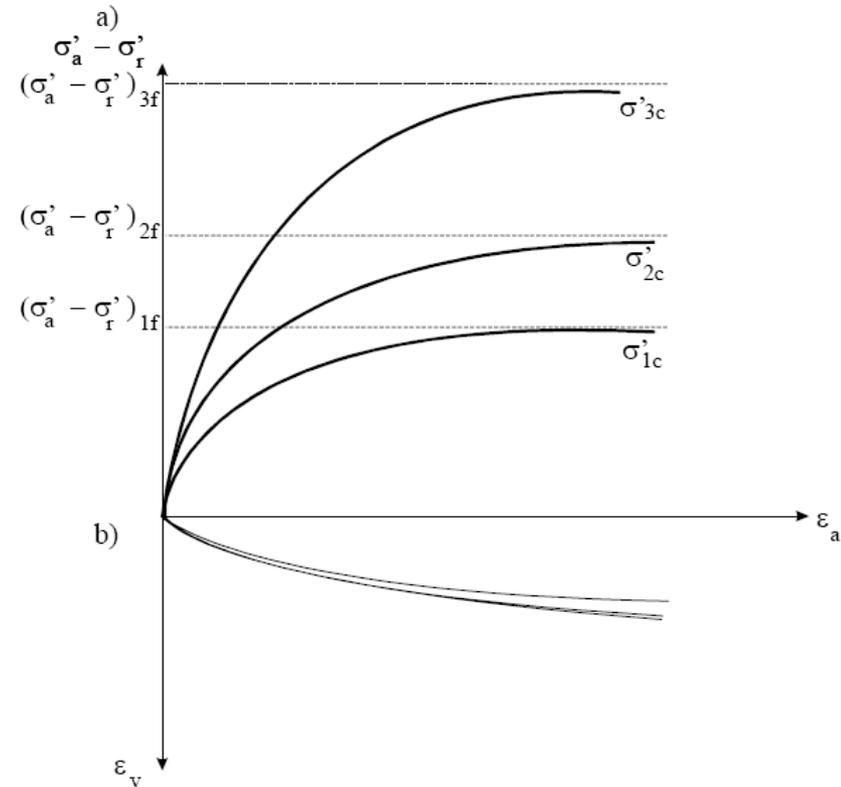
I risultati della prova sono di norma rappresentati in grafici  $\epsilon_a - (\sigma_a - \sigma_r)$ , e  $\epsilon_a - \epsilon_v$ .

Poiché durante la fase di compressione assiale la pressione di cella  $\sigma_c$  e la pressione interstiziale  $u_0$  rimangono costanti (e quindi anche la pressione radiale totale  $\sigma_r = \sigma_c$ ) e poiché non si sviluppano sovrappressioni interstiziali, essendo la prova drenata, allora rimane costante anche la pressione radiale efficace,  $\sigma'_r$ , che corrisponde alla tensione efficace principale minore ( $\sigma'_r = \sigma'_3$ ), mentre cresce la tensione efficace assiale media,  $\sigma'_a$ , che corrisponde alla tensione efficace principale maggiore ( $\sigma'_a = \sigma'_1$ ).  
**La prova deve essere eseguita su almeno tre provini a differenti pressioni di consolidazione.**

È possibile seguire l'evoluzione nel tempo del cerchio di Mohr corrispondente allo stato tensionale del provino fino ed oltre la rottura.



Le prove triassiali consolidate drenate vengono eseguite più raramente delle altre tx, specialmente a scopo di ricerca; questo perché con queste prove la seconda fase deve essere condotta così lentamente da non sviluppare pressioni neutre e sono perciò necessari tempi variabili da giorni a settimane.



# TRIASSIALE CONSOLIDATA ISOTROPICAMENTE NON DRENATA (TxCU) SU TERRE COESIVE SATURE

Le prove con consolidazione senza drenaggio (prova TxCU), con misura della pressione dei pori su terre coerenti sature, sono eseguite su campioni indisturbati e su campioni rimaneggiati per determinare i valori di  $c'$  e  $\phi'$  in termini di pressioni effettive e di  $c_u$  per diverse pressioni di consolidazione e per determinare il modulo di deformazione  $E_u$  in condizioni non drenate. Nella prova standard il campione viene lasciato consolidare sotto una pressione determinata  $\sigma_3$  della cella e in tali condizioni le tre tensioni principali sono eguali; il campione viene poi portato in assenza di drenaggio applicando una pressione assiale  $\sigma_1 - \sigma_3$ . Nella seconda fase durante l'applicazione della pressione verticale senza drenaggio viene misurata la pressione neutra.

Anche questa prova, una volta eseguita la saturazione, si svolge in due fasi, la prima delle quali è identica a quella della prova TxCD. Al termine della prima fase, e quindi a consolidazione avvenuta (ad una pressione di consolidazione,  $\sigma'_c$ , pari alla differenza fra la pressione di cella,  $\sigma_c$ , e la contropressione interstiziale,  $u_0$ ), vengono chiusi i drenaggi isolando idraulicamente il provino che, essendo saturo, non subirà ulteriori variazioni di volume.

Nella seconda fase, a **drenaggi chiusi e collegati a trasduttori che misurano la pressione dell'acqua nei condotti di drenaggio e quindi nei pori del provino**, si fa avanzare il pistone a velocità costante, anche relativamente elevata. Durante la seconda fase è controllata la variazione nel tempo dell'altezza del provino, e **sono misurate:**

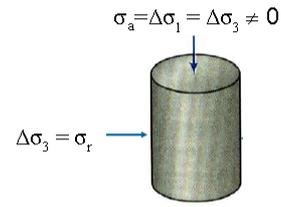
- la forza assiale esercitata dal pistone,
- la variazione di pressione interstiziale all'interno del provino.

Tali misure permettono di calcolare, al variare del tempo fino ed oltre la rottura del provino:

- la deformazione assiale media,  $\epsilon_a$ ,
- la tensione assiale media,  $\sigma_a$ , (e quindi anche la tensione deviatorica media,  $\sigma_a - \sigma_r = \sigma'_a - \sigma'_r$ , essendo  $\sigma_r$  la pressione radiale).

## Prova consolidata e non drenata

**Fase 1: consolidazione isotropa**



Alla fine della consolidazione:

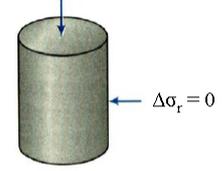
$$\Delta u = 0$$

$$\Delta \sigma_1 = \Delta \sigma_1' ; \Delta \sigma_3 = \Delta \sigma_3'$$

$$\sigma_3 = \sigma_3' = \sigma_r ; \sigma_1 = \sigma_1' = \sigma_r$$

**Fase 2: rottura in condizioni non drenate con misura della pressione neutrale**

$$\frac{F}{A} = \sigma_a = \Delta \sigma_1 \neq 0$$



Durante la fase di taglio:

$$\Delta u \neq 0$$

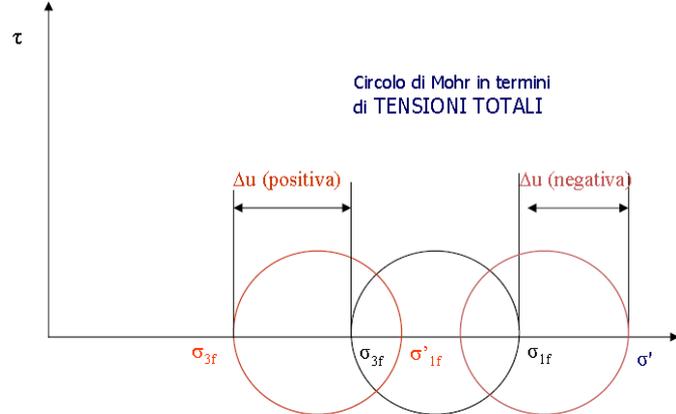
$$\sigma_1 = \sigma_a = \sigma_r + \Delta \sigma_1 = \sigma_r + F/A$$

$$\sigma_3' = \sigma_r - \Delta u$$

$$\sigma_1' = \sigma_r + F/A - \Delta u = \sigma_a - \Delta u$$

*Poiché sono note le tensioni principali totali a rottura  $\sigma_{1f}$  e  $\sigma_{3f}$ , si può tracciare sul piano  $(\sigma, \tau)$  il circolo di Mohr a rottura in termini di TENSIONI TOTALI.*

*Poiché sono note anche le sovrappressioni neutre a rottura  $\Delta u_f$ , si può tracciare sul piano  $(\sigma, \tau)$  il circolo di Mohr a rottura in termini di TENSIONI EFFICACI, applicando il principio delle tensioni efficaci.*



Circolo di Mohr in termini di TENSIONI TOTALI

L'esperienza ha mostrato che i parametri indicati dalle TxCU possono essere applicati ad un vasto campo di problemi pratici. La velocità di deformazione durante la prova deve essere sufficientemente piccola da permettere una misura corretta della pressione neutra.

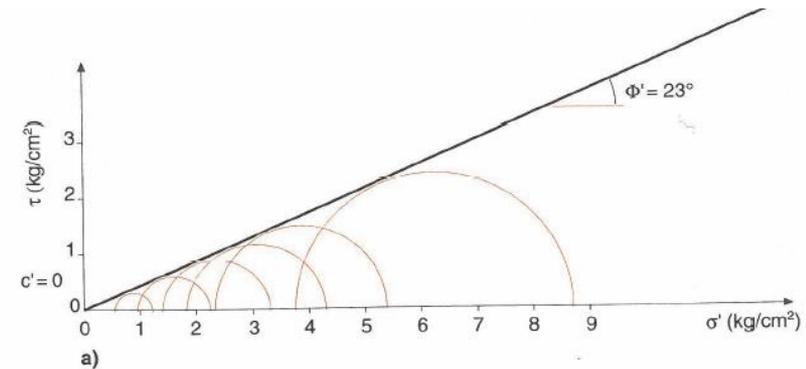
I risultati di queste prove sono espressi nel piano di Mohr, in termini di pressioni effettive, da cerchi di diametro crescente.

Per un dato terreno e a parità di pressioni di consolidazione, i risultati delle prove TxCU, interpretati in termini di tensioni efficaci, sono sostanzialmente analoghi ai risultati delle prove TxCD.

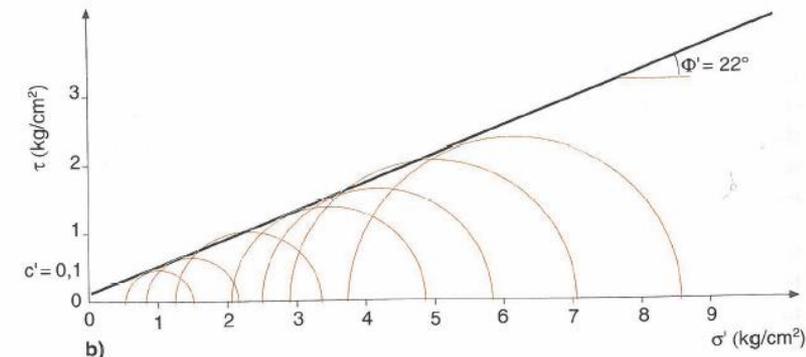
Pertanto esse sono generalmente riservate a terreni argillosi o comunque poco permeabili, per i quali l'esecuzione di prove TxCD richiederebbe tempi molto lunghi.

Pertanto con le argille si fa in genere riferimento ai parametri in termini di tensioni efficaci ricavati con prove TxCU in quanto queste prove possono essere condotte abbastanza velocemente.

Per **argille consolidate normalmente (NC)** la linea di involuppo è retta con  $c'=0$  e con il valore di  $\phi'$  dipendente dal tipo di terra. Se il terreno è normalmente consolidato si ha quindi  $c' = 0$  in termini di tensioni efficaci, mentre in termini di tensioni totali il rapporto  $\frac{c_u}{\sigma'_c}$  è costante.



L'involuppo dei cerchi di **argille sovraconsolidate (OC)** per il campo di tensioni inferiori alla pressione di consolidazione, indica generalmente una coesione  $c'$  ed un angolo di attrito interno  $\phi'$ .



Oltre alla prova triassiale standard, prova con consolidazione isotropa e con rottura per compressione, l'attrezzatura permette, a seconda dei valori assegnati alle tensioni  $\sigma_a$  e  $\sigma_r$  di ottenere le altre seguenti condizioni di prova.

Nella prima fase (fase di consolidazione) si distinguono:

- consolidazione isotropa  $\sigma'_1 = \sigma'_2 = \sigma'_3 = \sigma'_a = \sigma'_r$ ;
- consolidazione anisotropa  $\sigma'_r = K \sigma'_a$ ;
- consolidazione monodimensionale  $\sigma'_r = K_0 \sigma'_a$ ,  $\varepsilon_r = 0$ .

Nella seconda fase di prova (o fase di rottura) si distinguono:

- compressione per carico, aumentando  $\sigma_a = \sigma_1$  e tenendo costante  $\sigma_r = \sigma_2 = \sigma_3$ ;
- compressione per scarico, tenendo costante  $\sigma_a = \sigma_1$  e diminuendo  $\sigma_r = \sigma_2 = \sigma_3$ ;
- estensione per carico, aumentando  $\sigma_r = \sigma_2 = \sigma_3$  e tenendo costante  $\sigma_a = \sigma_1$ ;
- estensione per scarico, diminuendo  $\sigma_a = \sigma_1$  e tenendo costante  $\sigma_r = \sigma_2 = \sigma_3$ .

## SITUAZIONI REALI.

La **compressione per carico** corrisponde allo stato di sollecitazione che si ha nel terreno di **fondazione di un'opera**.

La **compressione per scarico** corrisponde a quello che si ha nel **terreno che spinge un muro di sostegno** (spinta attiva).

**L'estensione per scarico** corrisponde allo stato di sollecitazione nel **terreno subito al di sotto del fondo di uno scavo**.

**L'estensione in carico** corrisponde a quello che si ha nel terreno **al piede di una paratia (spinta passiva) e in corrispondenza di una piastra di ancoraggio**.

Le **principali limitazioni delle prove triassiali** sono date dal fatto che non si può studiare l'influenza della pressione principale  $\sigma_2$  sulle caratteristiche meccaniche del terreno perché  $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_r$ , e che non si possono studiare casi nei quali c'è la rotazione degli assi principali, poiché gli assi principali di sollecitazione sono prestabiliti; **inoltre tra le facce estreme del provino e le piastre porose a contatto si sviluppa dell'attrito che influenza la distribuzione delle deformazioni nel provino stesso, rendendole poco uniformi, e della pressione neutra**.

Nell'interpretare i risultati delle prove si ipotizza un **comportamento deformativo isotropo** del terreno.

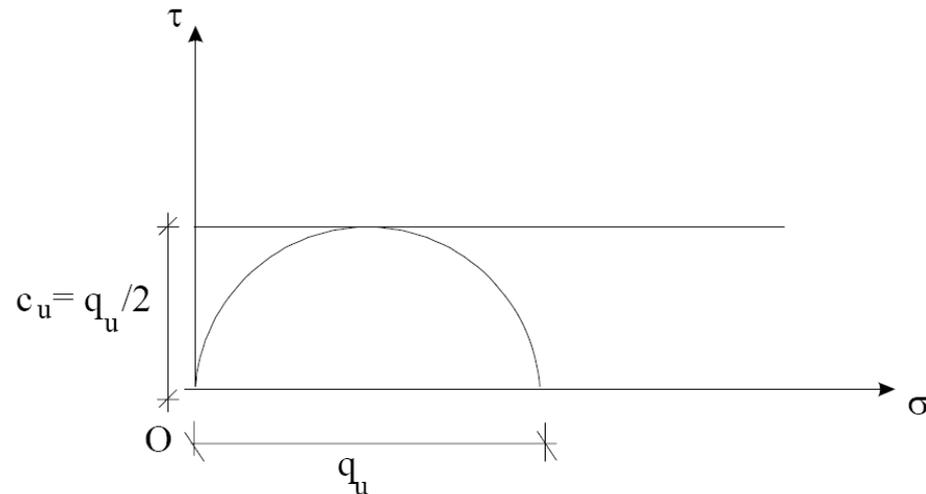
## PROVA DI COMPRESSIONE SEMPLICE O PROVE DI COMPRESSIONE CON ESPANSIONE LATERALE LIBERA (ELL)

La prova di compressione con espansione laterale libera può essere eseguita **solo su terreni a grana fine**. I provini hanno la forma e le dimensioni dei provini per le prove triassiali.

La prova consiste nel produrre la rottura del provino per compressione assiale mediante un pistone fatto avanzare a **velocità costante e piuttosto elevata**.

**Il provino non è avvolto da membrana e non è compresso in direzione radiale.**

Durante l'esecuzione della prova si controlla nel tempo la variazione di altezza del provino e si misura la forza assiale esercitata dal pistone.



Il cerchio di Mohr a rottura nel piano delle tensioni totali è tangente all'origine degli assi, in quanto la tensione totale principale minore è nulla (ovvero è la pressione atmosferica).

Sebbene non vi sia alcuna barriera fisica (membrana) che impedisca il drenaggio, l'elevata velocità di deformazione e la ridotta permeabilità del terreno fanno sì che le condizioni di prova siano praticamente non drenate, per cui il risultato che si ottiene è lo stesso che si avrebbe con una prova TxUU su un provino non saturato e a pressione di cella pari a zero.

La pressione assiale totale media a rottura è indicata con  $q_u$ , e nell'ipotesi di terreno saturo, e quindi di involucro a rottura in termini di tensioni totali rettilineo e orizzontale, risulta:

$$q_u = 2 \cdot c_u$$

**I principali vantaggi della prova consistono nella sua rapidità e semplicità di esecuzione, e quindi nel suo basso costo.**

Nella seguente tabella 2.18 (modificata, da Canadian Foundation Engineering Manual, 2006) sono fornite alcune definizioni all'interno delle quali inquadrare qualitativamente le terre coesive in base alla loro coesione non drenata. Il valore di penetrazione  $N_{SPT}$  è da intendere a livello di valutazione di confidenza, non essendo tale indice particolarmente significativo per le argille.

TABELLA 2.17 - **Consistenza dei materiali coesivi**

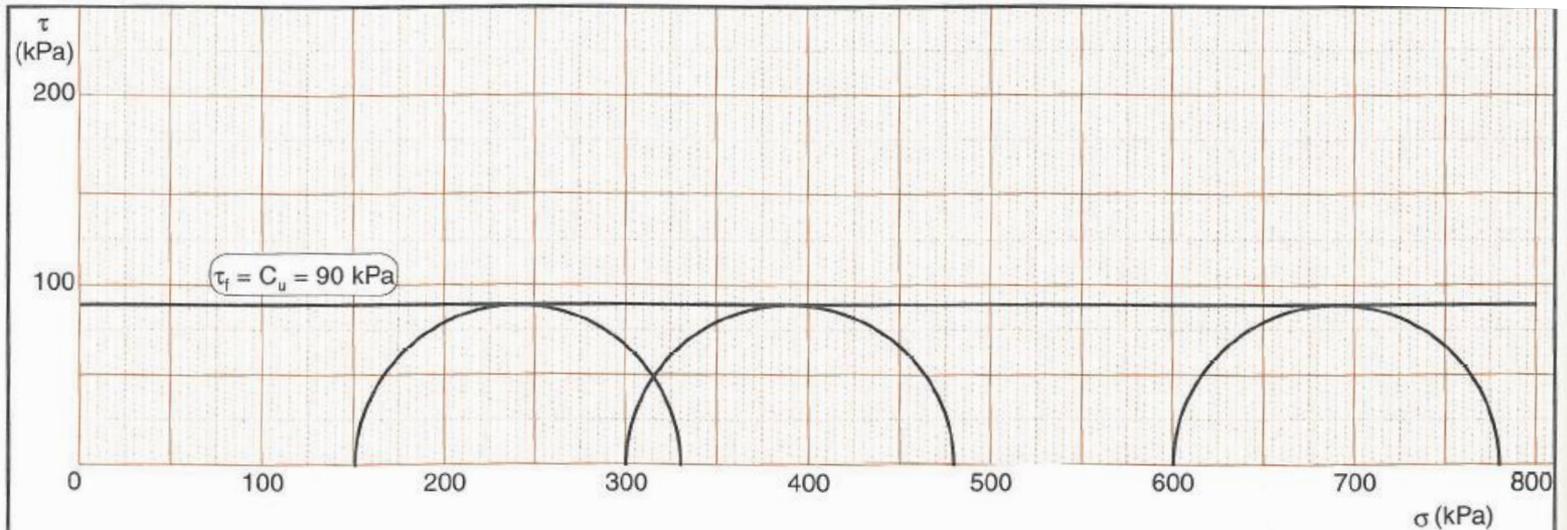
Consistenza	$c_u$ (KPa)	$\approx N_{SPT}$	Note
Molto soffice	< 12	< 2	Penetrabile a mano per diversi centimetri
Soffice	12 - 25	2 - 4	Penetrabile con il pollice per diversi centimetri
Media	25 - 50	4 - 8	Penetrabile con il pollice
Compatta	50 - 100	8 - 15	Incavabile con il pollice ma difficile da penetrare
Molto compatta	100 - 200	15 - 30	Incavabile con l'unghia del pollice
Dura	> 200	> 30	Difficilmente incavabile con l'unghia del pollice

## ESERCIZIO

Un campione di argilla satura caratterizzato da limite di liquidità  $w_L = 48\%$  e indice di plasticità  $I_p = 25\%$  è stato assoggettato ad una prova triassiale senza consolidazione e senza drenaggio (TxUU) su tre provini. I risultati delle prove sono riportati in figura. Determinare l'indice di consistenza  $I_c$  e tracciare l'involuppo a rottura nei diagrammi  $\sigma$ - $\tau$ .

Soluzione 
$$I_c = \frac{w_L - w}{I_p} = 0.88$$

Come si vede  $c_u = 90$  kPa.



$\sigma_3$ (kPa)	$\sigma_1 - \sigma_3$ (kPa)	$\sigma_1$ (kPa)	$w_{in}$ (%)				NATURA DEL CAMPIONE	DITTA .....
150	181	331	26,2			argilla satura	CANTIERE .....	
300	180	480	25,8				SONDAGGIO CAMPIONE PROFONDITÀ	
600	183	783	26,1					
							<b>DETERMINAZIONE DELLA RESISTENZA AL TAGLIO</b>	

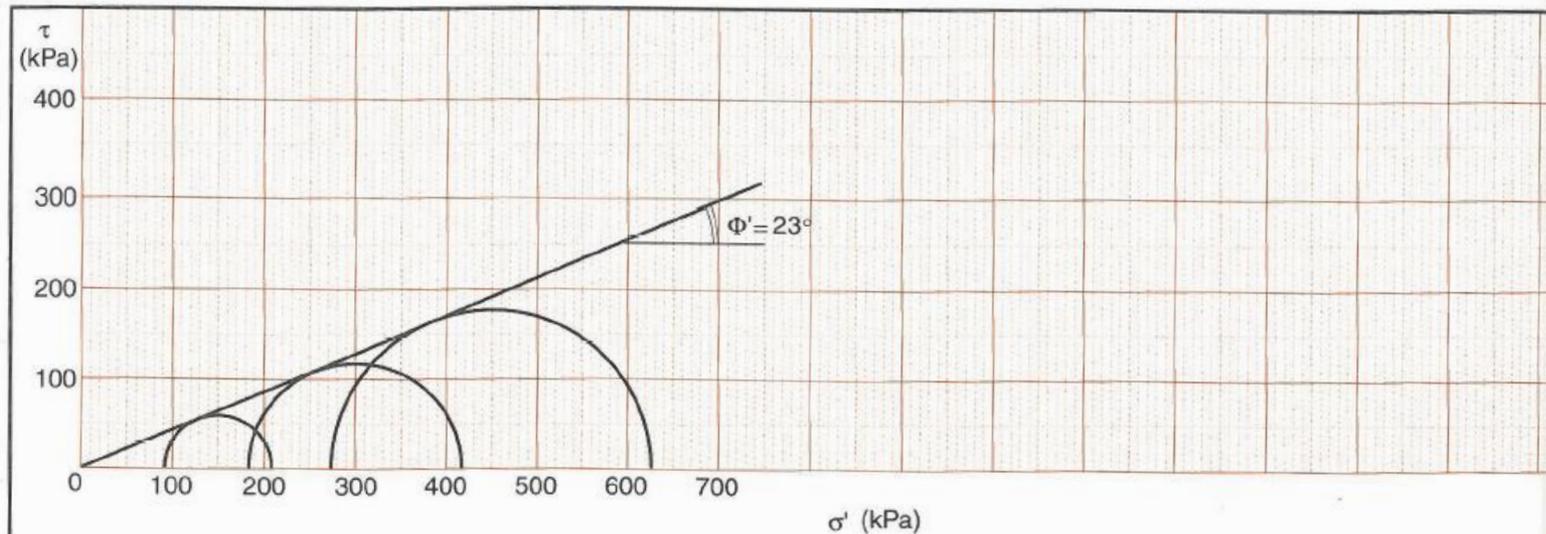
## ESERCIZIO

Un campione di argilla satura caratterizzata da limite di liquidità  $w_L = 45\%$  e indice di plasticità  $I_P = 22\%$  è stato assoggettato ad una prova triassiale con consolidazione, senza drenaggio e con misura della pressione dei pori (TxCU) su tre provini.

I risultati delle prove sono riportati nella figura.

Determinare l'indice di consistenza  $I_c$  tracciare l'involuppo a rottura nei diagrammi  $\sigma'$ - $\tau$ .

$$I_c = \frac{w_L - w}{I_P} = 0.31$$



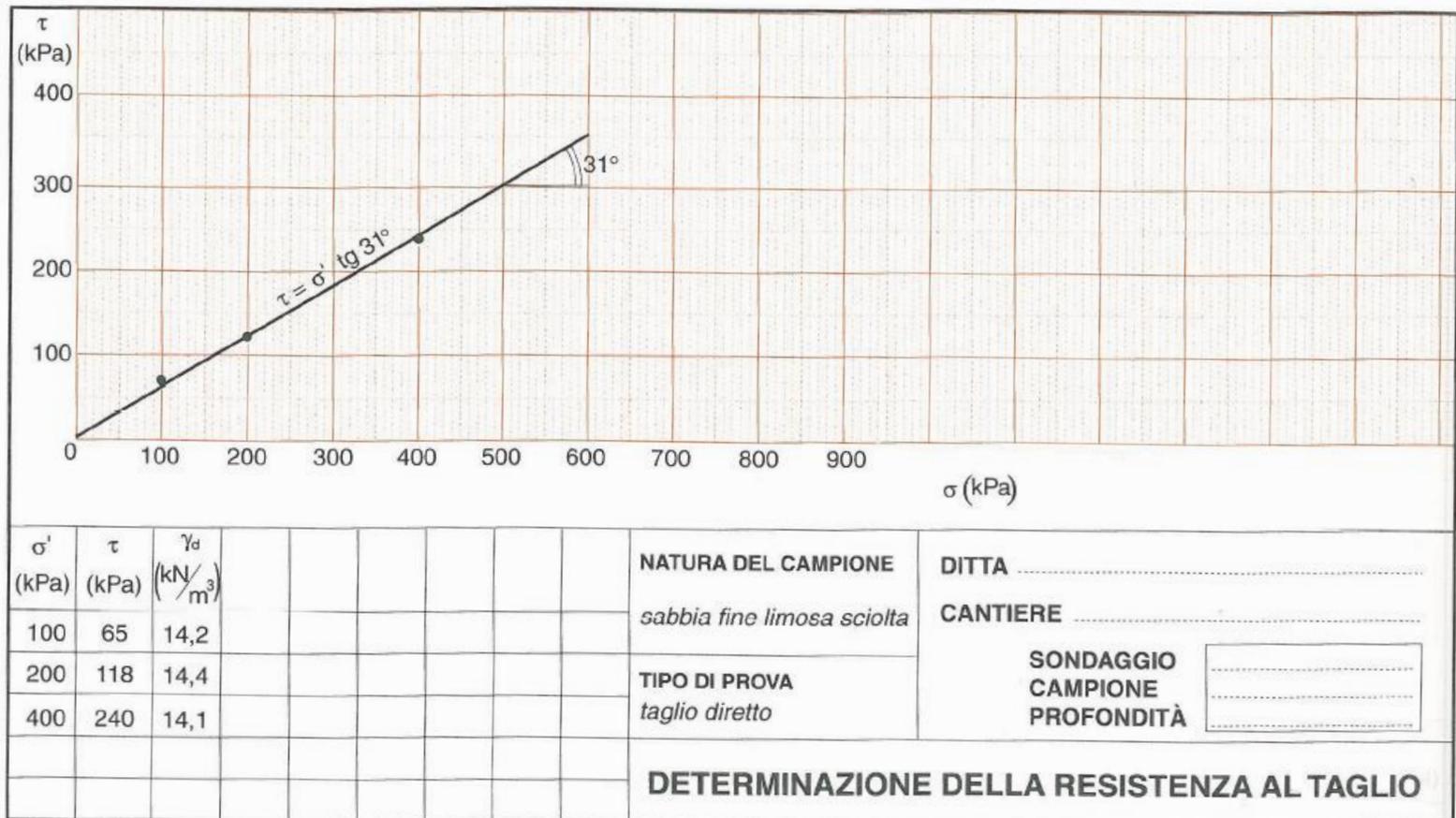
$\sigma_3$ (kPa)	$\sigma_1 - \sigma_3$ (kPa)	$u$ (kPa)	$\sigma'_3$ (kPa)	$\sigma'_1$ (kPa)	$w_{in}$ (%)	$I_c$	NATURA DEL CAMPIONE <i>argilla satura</i>	DITTA .....
200	120	110	90	210	38,5	0,29		
400	240	220	180	420	38,0	0,32		
600	350	320	280	630	38,2	0,31		
							TIPO DI PROVA <i>TxCU</i>	CANTIERE .....
								SONDAGGIO CAMPIONE PROFONDITÀ
<b>DETERMINAZIONE DELLA RESISTENZA AL TAGLIO</b>								

## ESERCIZIO

Un campione di sabbia fine limosa sciolta è stato assoggettato ad una prova di taglio diretto su tre provini con tensione normale pari a 100, 200 e 400 kPa; la tensione di taglio a rottura  $q$  ha raggiunto i valori di 65, 118 e 240 kPa. Determinare l'angolo di attrito  $\Phi$  e la tensione di taglio a rottura corrispondente ad una tensione normale pari a 300 kPa.

Soluzione

- Nell'ipotesi di  $c = 0$  accettabile per le sabbie sciolte,  $\Phi = 31^\circ$ .
- La  $\tau$  corrispondente a  $\sigma = 300$  kPa è pari a 180 kPa



La prova di compressione con espansione laterale libera, eseguita su campioni di terreno coerente in laboratorio, rappresenta uno dei metodi più semplici per la determinazione della resistenza al taglio dei terreni coerenti in assenza di drenaggio.

*Modalità della prova:*

Durante la prova vengono misurati:

- a) il carico assiale  $Q$  con un dinamometro (costante del dinamometro = 0,25 Kg/segno);
- b) l'abbassamento del provino  $\Delta H$  con un micrometro 1 segno = 0,001" = 0,00254 cm ( $v \cong 25$  segni/30s).

Il provino ha normalmente un diametro  $\phi = (3 \div 4)$  cm ed un'altezza  $H = (2 \div 3) \cdot \phi \cong (7 \div 9)$  cm, questo per limitare l'effetto dell'attrito sulle teste.

La deformazione assiale è  $\epsilon = \Delta H/H_0$ , dove  $\Delta H$  è l'abbassamento e  $H_0$  è l'altezza iniziale del provino; se ora indichiamo con  $A_0$  l'area iniziale del provino, nell'ipotesi di volume costante del campione durante la prova, l'area  $A$  del campione nelle varie fasi della prova si trova dalla equazione:

$$V = H_0 \cdot A_0 = H \cdot A$$

$$\epsilon = \frac{\Delta H}{H_0} = \frac{H_0 - H}{H_0}$$

$$H_0 A_0 = H_0 (1 - \epsilon) A \quad A = \frac{A_0}{1 - \epsilon}$$

La pressione assiale è

$$q = \frac{Q}{A}$$

## ESERCIZIO

Campione 2 (H = 8,84 cm)

3.1. – Utilizzando i dati di due prove di compressione con espansione laterale libera su terreni argillosi con le caratteristiche riportate, tracciare l'andamento della curva sforzi-deformazioni e individuare il carico di rottura  $q_u$ .

Campione 1 (H = 8,71 cm)

Tempo	Lett. din.	Carico (Kg)	$\Delta H(0,001''$ )	$\epsilon(\%)$	A (cm <sup>2</sup> )	q (Kg/cm <sup>2</sup> )
0	0	0	0	0	9.68	0
1'	15	3.75	58	1.69	9.78	0.38
2'	25	6.25	115	3.35	9.95	0.63
3'	33	8.25	167	4.78	10.11	0.81
4'	38	9.50	215	6.27	10.26	0.93
5'	41.5	10.375	285	8.31	10.49	0.99
6'	43	10.75	340	9.91	10.68	1.01
7'	40.5	10.125	394	11.49	10.87	0.93

Il carico di rottura corrisponde al massimo della curva sforzi-deformazioni. In questo caso il carico di rottura è  $q_u = 1.01 \text{ Kg/cm}^2$  che corrisponde a una deformazione del 9,9%.

Qualora, come nel nostro caso, la compressione unitaria assiale  $q$  cresca lentamente con la deformazione, convenzionalmente il carico di rottura  $q_u$  viene preso in corrispondenza di  $\epsilon = 20\%$  e quindi in questo caso  $q_u = 0.20 \text{ Kg/cm}^2$ .

Le curve tensioni-deformazioni sono riportate in fig. 3.1.

Tempo	Lett. din.	Carico (Kg)	$\Delta H(0,001''$ )	$\epsilon(\%)$	A (cm <sup>2</sup> )	q (Kg/cm <sup>2</sup> )
0	0	0	0	0	8.65	0
1'	1.5	0.375	66	1.85	8.81	0.04
2'	2.5	0.625	125	3.59	8.97	0.07
3'	3.5	0.875	179	5.14	9.12	0.09
4'	4	1.0	240	6.89	9.29	0.11
5'	4.5	1.125	302	8.67	9.47	0.12
6'	5	1.25	358	10.28	9.64	0.13
7'	5.5	1.375	411	11.81	9.81	0.14
8'	6	1.5	468	13.44	9.99	0.15
9'	7	1.75	521	14.97	10.17	0.17
10'	7.5	1.875	576	16.34	10.36	0.18
11'	8	2.0	623	18.07	10.56	0.19
12'	8.5	2.125	685	19.68	10.77	0.20
13'	9	2.25	737	21.17	10.97	0.20
14'	9	2.25	792	22.75	11.19	0.19

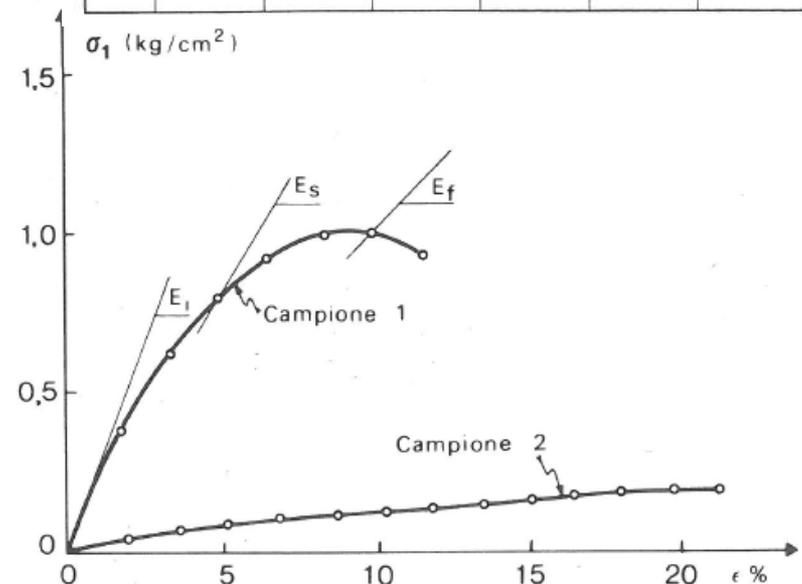


FIGURA 3.1.

## ESERCIZIO

3.2. — Si vuole conoscere, relativamente alla curva tensioni-deformazioni, del campione 1 di fig. 3.1, il modulo tangente iniziale  $E_i$ , il modulo secante a rottura  $E_f$  e il modulo secante corrispondente alla deformazione pari al 50% di quella di rottura  $E_s$ .

Si definisce il modulo di Young  $E$  non drenato:

$$E = \frac{q}{\epsilon}$$

Tale modulo può essere calcolato, per una stessa curva sforzi-deformazioni, come:

1) modulo tangente iniziale  $E_i$  cioè tangente alla curva sforzi-deformazioni all'inizio della prova:

$$E_i = \frac{0,27}{0,01} \text{ Kg/cm}^2 = 27 \text{ Kg/cm}^2$$

2) modulo secante alla rottura  $E_f$  cioè pendenza della retta passante per l'origine ed il punto di rottura:

$$E_f = \frac{1 \text{ Kg/cm}^2}{0,099} = 10 \text{ Kg/cm}^2$$

3) modulo secante  $E_s$  cioè pendenza della retta per l'origine e passante per determinati valori dello sforzo o della deformazione (2%÷5%), oppure a metà della deformazione di rottura come nel caso in esame:

$$E_s = \frac{0,82}{0,05} = 16 \text{ Kg/cm}^2$$

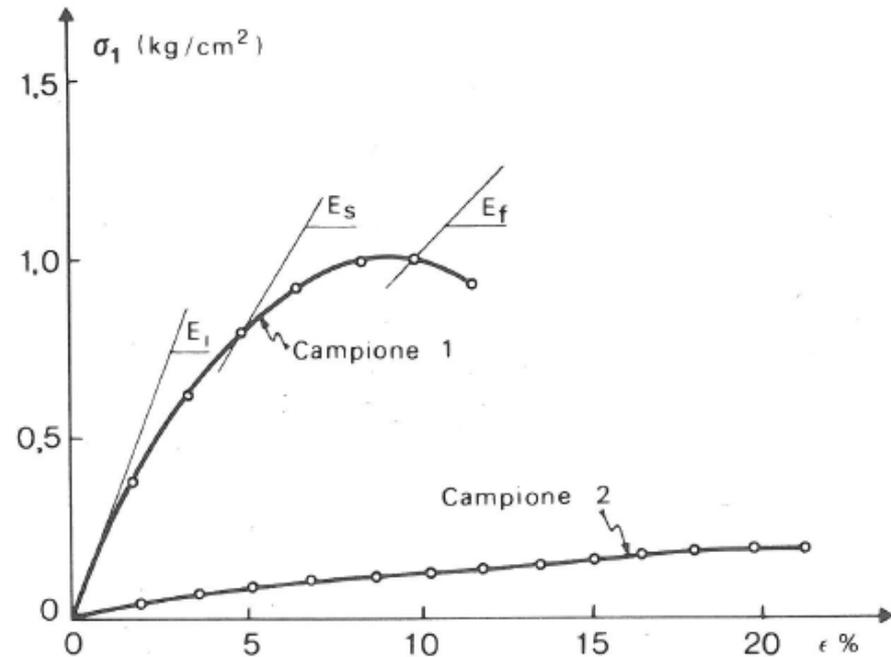


FIGURA 3.1.

## RESISTENZA AL TAGLIO

La determinazione della resistenza al taglio dei terreni si può ottenere da prove di laboratorio diverse sia per modalità di sollecitazione che di drenaggio dei provini.

La resistenza al taglio viene espressa facendo riferimento al criterio di rottura di Coulomb, che è molto spesso esplicitato in forma grafica nel piano di Mohr. Tra le prove per misurare la resistenza al taglio delle terre ne esiste una molto semplice e che viene usata principalmente per terreni incoerenti sabbiosi. Si tratta della prova di taglio diretto, eseguita con l'apparecchio di Casagrande, che è schematizzato nella fig. 5.1.

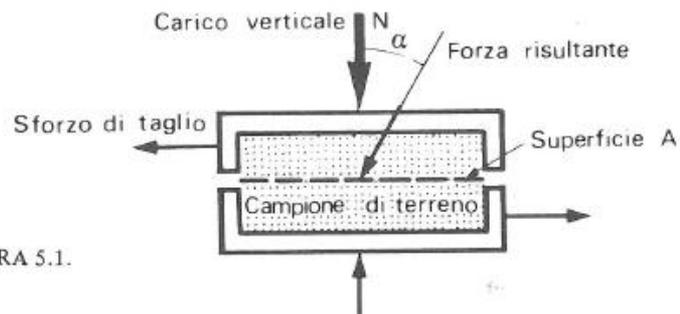


FIGURA 5.1.

Il campione che viene introdotto nella scatola a pareti rigide ha in genere le seguenti dimensioni:  $\phi = 2,5''$ ;  $h = 1'' = 2,54 \text{ cm}$ ; la velocità di deformazione orizzontale è di:  $0,02''/\text{minuto}$  ( $0,05 \text{ cm}/\text{minuto}$ ) per i materiali granulari.

Un carico  $N$  verticale viene applicato alla sommità del campione; successivamente il campione viene sollecitato con uno sforzo di taglio orizzontale  $T$  fino a rottura. La prova viene ripetuta su provini con diversi carichi  $N$  verticali. Ponendo in un diagramma le tensioni normali  $p = N/A$  e la resistenza al taglio  $\tau = T/A$  sulla superficie orizzontale, per le diverse prove, si ottiene la retta  $\tau = p \tan \phi$  e quin-

di l'angolo di attrito interno del terreno  $\phi$ . La prova di taglio diretto, di facile esecuzione, ha tuttavia due difetti principali.

a) durante le prove la sezione del campione su cui agisce la forza  $N$  si riduce con un incremento delle pressioni verticali  $p$ ; questo fenomeno è particolarmente pronunciato nel caso di terreni che vengono portati a rottura con deformazioni rilevanti.

b) Il campione è costretto a rompersi lungo una superficie prestabilita orizzontale; ciò comporta un aumento dell'angolo di attrito e quindi i risultati di tali prove debbono essere considerati con una certa cautela.

## ESERCIZIO

5.1. – Individuare l'angolo di attrito  $\phi$  di una sabbia limosa, con le seguenti caratteristiche granulometriche, dai risultati da una prova di taglio diretto:

CARATTERISTICHE GRANULOMETRICHE		RISULTATI DI UNA PROVA DI TAGLIO DIRETTO	
Vaglio N.	% pass.	p(Kg/cm <sup>2</sup> )	t(Kg/cm <sup>2</sup> )
20	100		
40	97	1,0	0,65
60	77	2.0	1,31
80	58	4.0	2,53
200	15		

La densità secca e l'umidità naturale del materiale hanno rispettivamente i seguenti valori:

$$\gamma_d = 1,50 \text{ t/m}^3$$

$$w = 31\%$$

Si ottiene un angolo di attrito  $\phi = 33^\circ$ ;  $\tan \phi = 0,64$  come riportato in fig. 5.2a.

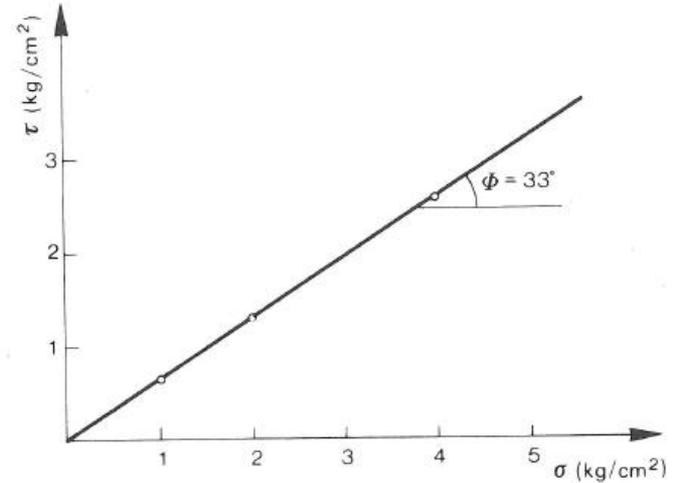


FIGURA 5.2a – Rappresentazione di prove di taglio diretto eseguite su sabbia.

La curva granulometrica della sabbia in esame è riportata in fig. 5.2b.

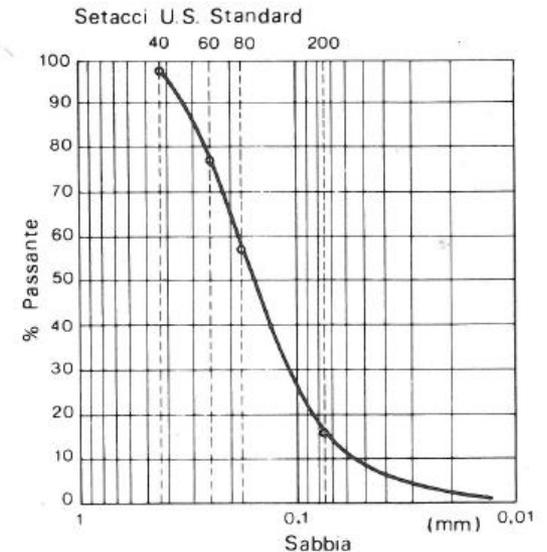


FIGURA 5.2b.

Nella sabbia densa si sviluppa la resistenza al taglio fino a raggiungere un valore massimo in cui inizia la rottura; quindi lo sforzo tagliante diminuisce fino a raggiungere un valore costante, che si indica come sforzo di taglio residuo. Il valore dell'angolo d'attrito ottenuto in corrispondenza dei valori del taglio massimo rappresenta la resistenza al taglio della sabbia densa mentre quello ottenuto dai valori dello sforzo di taglio residuo corrisponde alla resistenza della sabbia sciolta. In fig. 5.3 viene rappresentata l'evoluzione della resistenza al taglio al crescere della deformazione

nel caso di una sabbia densa o sciolta.

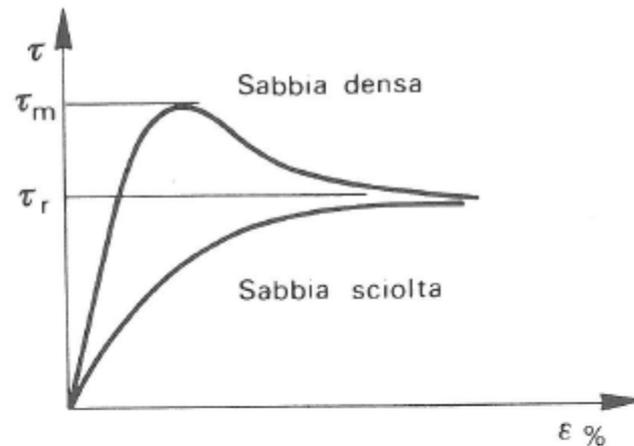


FIGURA 5.3 – Evoluzione delle tensioni taglianti in funzione delle deformazioni in una prova di taglio diretto.

La differenza del comportamento nello sviluppo della resistenza al taglio è collegata alle variazioni di volume, e quindi di densità, del campione di sabbia nel corso della prova. La densità finale, corrispondente al valore residuo per la sabbia densa e del taglio massimo per quella sciolta, che non varia

ad un ulteriore incremento delle deformazioni, è nota come “densità critica”.

## ESERCIZIO

5.2. – Due campioni di una stessa sabbia, caratterizzati da diverse densità, sono sottoposti a prove di taglio diretto. La densità secca nello stato denso è  $1.6 \text{ t/m}^3$  mentre nello stato sciolto  $\gamma_d = 1.5 \text{ t/m}^3$ . I campioni posti in un contenitore cilindrico avente una sezione trasversale di  $32 \text{ cm}^2$  sono sollecitati con un carico verticale  $N$  di valore costante in ogni prova e pari a 32, 64, 128 Kg. Si incrementa quindi il valore dello sforzo orizzontale fino alla rottura del provino. Uno schema di questo apparato è riportato in fig. 5.1.

Procedendo nella maniera indicata si ottengono i seguenti valori:

Carico verticale (Kg)	32	64	128
Sforzo di taglio (Kg) (sabbia densa)	29,74	59,16	119,92
Sforzo di taglio (Kg) (sabbia sciolta)	23,35	47,97	92,74

Lo sforzo unitario verticale risulta essere:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{32}{32} = 1 \text{ Kg/cm}^2$$

quelli orizzontali corrispondenti sono:

$$\text{(sabbia densa)} \quad \tau = \frac{T_m}{A} = \frac{29,74}{32} = 0,93 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\text{(sabbia sciolta)} \quad \tau = \frac{T_r}{A} = \frac{23,35}{32} = 0,73 \text{ Kg/cm}^2$$

Procedendo analogamente negli altri casi si ha:

Sforzo normale	1	2	4	$\text{Kg/cm}^2$
Sforzo di taglio (sabbia densa)	0,93	1,85	3,75	$\text{Kg/cm}^2$
Sforzo di taglio (sabbia sciolta)	0,73	1,50	2,90	$\text{Kg/cm}^2$

I risultati sono riportati in fig. 5.4; segue che l'angolo di attrito  $\phi$  risulta essere:

$$\text{per la sabbia densa} \quad \phi = \arctan (2/2,15) = 43^\circ$$

$$\text{per la sabbia sciolta} \quad \phi = \arctan (2/2,75) = 36^\circ$$

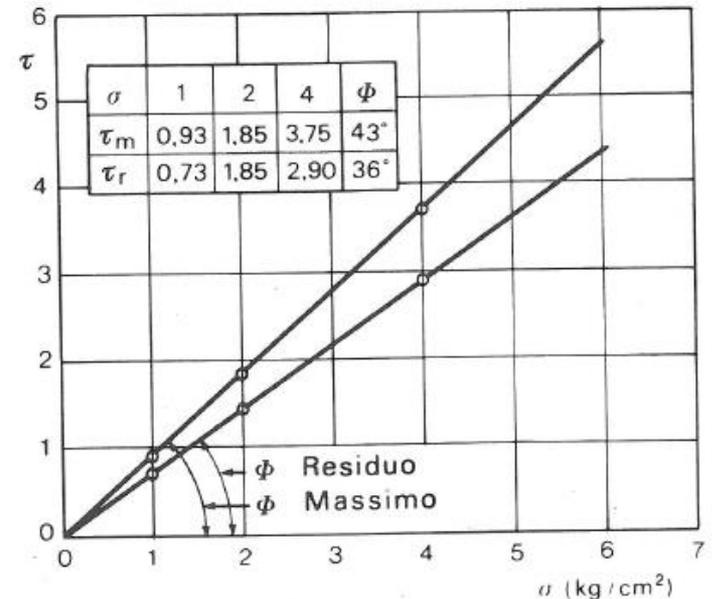


FIGURA 5.4.

Le prove triassiali, che rappresentano un metodo più accurato per ottenere i parametri di resistenza al taglio, si possono dividere in tre tipi:

- a) prove triassiali senza drenaggio (prove U.U.);
- b) prove triassiali con consolidazione e senza drenaggio con eventuale misura della pressione dei pori (prove C.U.);
- c) prove triassiali con consolidazione e con drenaggio (prove C.D.).

I primi due tipi di prove si eseguono normalmente su campioni argillosi in quanto in tali terreni esiste il problema, data la loro bassa permeabilità, di un comportamento a breve o a lungo termine in relazione all'eventualità che il terreno possa o meno drenare e quindi consolidarsi. Per i materiali incoerenti (sabbie e ghiaie) si usa il terzo tipo di prova in quanto la loro permeabilità elevata consente un rapido drenaggio. Anche il terzo tipo di prova viene utilizzato per i terreni argillosi, ma i tempi di prova sono molto lunghi in quanto non si devono creare sovrappressioni all'interno del provino durante la prova stessa. Nel caso di prove senza drenaggio bisogna distinguere situazioni in cui i campioni sono saturi da situazioni in cui i campioni sono parzialmente saturi. Nel primo caso i risultati delle prove indicano che al variare della pressione di contenimento  $\sigma_3$  la tensione effettiva ( $\sigma_1 - \sigma_3$ ) rimane costante e l'involuppo dei cerchi di Mohr in termini di tensioni totali è una retta orizzontale ( $\phi_u = 0$ ) e la resistenza al taglio è costante ed uguale a  $c_u = 1/2 (\sigma_1 - \sigma_3)$ .

Sempre nell'ipotesi di campione saturo le prove di compressione con espansione laterale libera, data la loro velocità e breve durata (5÷10 minuti), si possono considerare come prove triassiali senza drenaggio con  $\sigma_3 = 0$  e quindi  $c_u = 1/2 q_u$ .

Nel secondo caso le prove indicano che la resistenza al taglio varia, al variare della pressione di contenimento  $\sigma_3$ , la quale non va più ad incrementare totalmente la pressione neutrale ma anche ad aumentare la pressione effettiva tendendo, per alte pressioni di contenimento, che riducono i vuoti di gas, ad un comportamento simile a quello dei terreni saturi.

## ESERCIZIO

5.3. – In base ai risultati di una prova triassiale senza drenaggio su campione di argilla limosa satura individuare la resistenza al taglio:

$\sigma_3$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_1$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\epsilon_T$ (%)
0	0,39	5
0,5	0,87	6
1,5	1,89	8

I risultati relativi alla rottura del primo provino si riferiscono ad una prova di compressione con espansione laterale libera.

L'argilla esaminata è caratterizzata da:  $w = 38\%$ ,  $w_L = 43\%$ ,  $w_P = 28\%$ ,  $I_P = 15$  e  $\gamma = 1,93 \text{ t/m}^3$ .

Si ottiene

$$c_u = 0,20 \text{ Kg/cm}^2 \quad \text{e} \quad \phi = 0^\circ$$

come si vede in fig. 5.5.

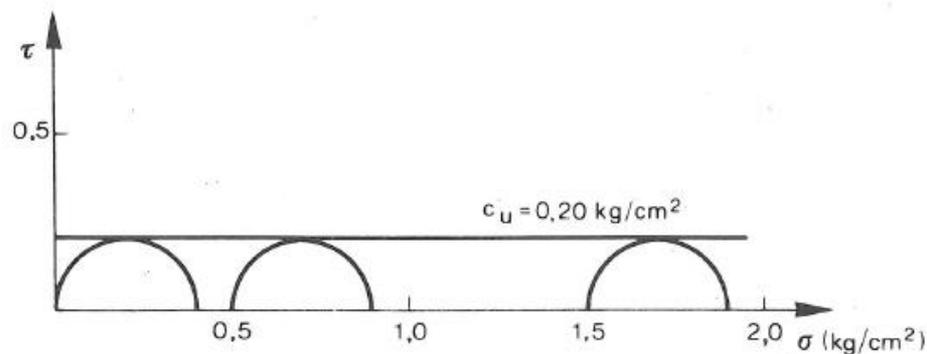


FIGURA 5.5 - Rappresentazione grafica nel piano di Mohr degli stati tensionali di rottura di prove triassiali senza drenaggio eseguite su terreni saturi.

## ESERCIZIO

5.4. - In base ai risultati di una prova triassiale senza drenaggio su un campione di argilla parzialmente satura individuare la resistenza al taglio:

$\sigma_3$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_1$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\epsilon_r$ (%)
0	1,30	2
2,0	4,24	4
4,0	7,43	2
6,0	9,87	5

L'argilla esaminata è caratterizzata da:

$$w = 23\%, \quad w_L = 49\%, \quad w_P = 24\%,$$

$$I_p = 25, \quad \gamma = 2,0 \text{ t/m}^3$$

La resistenza al taglio varia da  $c_u = 0,55 \text{ Kg/cm}^2$  e  $\phi_u = 12^\circ$  a  $c_u = 1,32 \text{ Kg/cm}^2$  e  $\phi_u = 4^\circ$  tendendo a  $c_u = 2 \text{ Kg/cm}^2$  e  $\phi_u = 0^\circ$ , come si può notare in fig. 5.6.

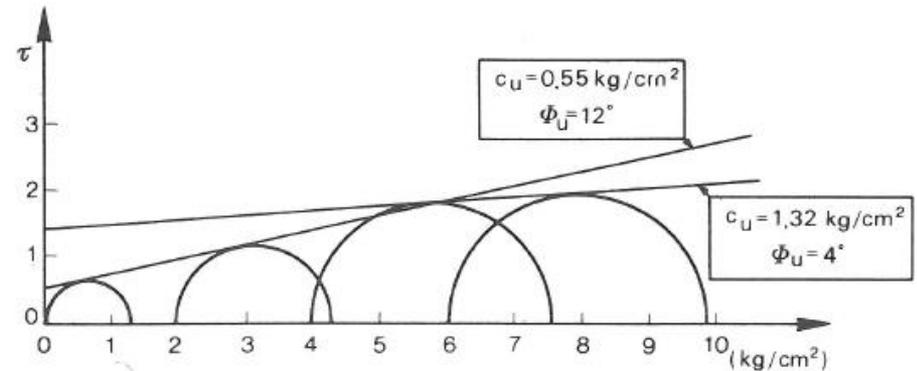


FIGURA 5.6 – Rappresentazioni tensionali degli stati di rottura relative a prove triassiali senza drenaggio eseguite su retteni parzialmente saturi.

La prova triassiale con consolidazione e senza drenaggio serve a determinare, dopo una prima fase di consolidazione a pressione  $\sigma_3$  costante, attraverso le misure della pressione dell'acqua nei pori durante le prove, i parametri di resistenza al taglio,  $c'$  e  $\Phi'$ , in termini di pressioni effettive. Nel caso di argille consolidate normalmente si ha  $c' = 0$  e  $\phi' \neq 0$  ( $20 \div 30^\circ$ ) in quanto al variare di  $\sigma_3$  si ha un incremento costante di pressione effettiva, mentre per le argille sovraconsolidate si ha  $c' \neq 0$  e  $\phi' \neq 0$ .

## ESERCIZIO

5.5. – In tre prove triassiali con consolidazione e senza drenaggio con la misura della pressione dei pori eseguite su un campione di argilla si ottengono i risultati riportati nel seguito. Descrivere l'andamento delle curve sforzi-deformazioni e individuare i parametri di resistenza al taglio.

Caratteristiche dell'argilla:

w (%)	w <sub>L</sub> (%)	w <sub>P</sub> (%)	I <sub>P</sub>	q <sub>u</sub> (Kg/cm <sup>2</sup> )	pen.(Kg/cm <sup>2</sup> )
30	39	24	15	0,89	0,6
				0,93	1,0

con  $\sigma_3 = 2 \text{ Kg/cm}^2$   $\phi_0 = 3,58 \text{ cm}$   
 $H_0 = 8,08 \text{ cm}$   $w = 29,5 (\%)$

velocità di deformazione = 0,09 mm/minuto.

$\sigma_1 - \sigma_3$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	u (Kg/cm <sup>2</sup> )	$\epsilon$ (%)
0,84	0,09	0,50
1,12	0,31	1,06
1,32	0,55	2,02
1,41	0,77	3,08
1,465	1,00	5,45
1,466	1,01	6,00
1,467	1,05	6,55
1,473	1,07	7,11
1,42	1,09	9,21
1,40	1,13	10,55

con  $\sigma_3 = 4 \text{ Kg/cm}^2$   $\phi_0 = 3,61 \text{ cm}$   
 $H_0 = 8,14 \text{ cm}$   $w = 27,1\%$

velocità di deformazione = 0,08 mm/minuto.

$\sigma_1 - \sigma_3$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	u (Kg/cm <sup>2</sup> )	$\epsilon$ (%)
0,93	0,03	0,59
2,01	0,17	1,13
2,48	0,48	2,11
2,75	0,86	3,08
2,96	1,63	5,21
2,99	2,00	7,13
3,01	2,07	8,58
2,98	2,11	10,54
2,96	2,15	12,52
2,93	2,16	14,68
2,89	2,17	16,68

con  $\sigma_3 = 6 \text{ Kg/cm}^2$   $\phi = 3,54 \text{ cm}$   
 $H_0 = 8,23$   $w = 24,9\%$

velocità di deformazione = 0,09 mm/minuto.

$\sigma_1 - \sigma_3$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	u (Kg/cm <sup>2</sup> )	$\epsilon$ (%)
2,37	0,12	0,46
2,94	0,22	0,92
3,63	0,53	1,77
4,10	0,96	2,70
4,59	2,08	4,63
4,68	2,64	5,84
4,71	3,16	8,17
4,68	3,25	9,42
4,61	3,32	10,91
4,54	3,38	12,66
4,52	3,44	14,64

Il criterio di Mohr-Coulomb esprime la resistenza al taglio delle terre nella forma generale  $\tau = c' + (p - u) \cdot \tan \phi'$ . Nel nostro caso nelle tre prove triassiali i cerchi corrispondenti alla pressione effettiva massima sono:

$$\sigma_3 = 2 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma'_1 - \sigma'_3 = \sigma_1 - \sigma_3 = 1,47 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_1 = 1,47 + 2 = 3,47 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_1 - u = \sigma'_1 = 3,47 - 1,04 = 2,43 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_3 - u = \sigma'_3 = 2 - 1,04 = 0,96 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\epsilon \text{ a rottura} = 6,3\%$$

$$\sigma_3 = 4 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma'_1 - \sigma'_3 = \sigma_1 - \sigma_3 = 3,01 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_1 = 3,01 + 4 = 7,01 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_1 - u = \sigma'_1 = 7,01 - 2,08 = 4,93 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_3 - u = \sigma'_3 = 4 - 2,08 = 1,92 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\epsilon \text{ a rottura} = 8,3\%$$

$$\sigma_3 = 6 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma'_1 - \sigma'_3 = \sigma_1 - \sigma_3 = 4,73 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_1 = 4,73 + 6 = 10,73 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_1 - u = \sigma'_1 = 10,73 - 2,94 = 7,79 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_3 - u = \sigma'_3 = 6 - 2,94 = 3,06 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\epsilon \text{ a rottura} = 7,0\%$$

Ponendo in un diagramma di Mohr i cerchi trovati si ottiene che l'involucro dei tre cerchi è una retta che passa per l'origine ed è inclinata di un angolo  $\phi' = 26^\circ$  rispetto alla orizzontale da cui:  $= (p - u) \cdot \tan 26^\circ$  come si vede in fig. 5.7.

Dalle curve tensioni  $(\sigma_1 - \sigma_3)$  - deformazioni di fig. 5.8 è possibile ricavare il modulo tangente iniziale  $E_i$  in  $\text{Kg/cm}^2$ ; si ha infatti:

$E_i = 150 \text{ Kg/cm}^2$	con	$\sigma_3 = 2 \text{ Kg/cm}^2$
$E_i = 215 \text{ Kg/cm}^2$	con	$\sigma_3 = 4 \text{ Kg/cm}^2$
$E_i = 545 \text{ Kg/cm}^2$	con	$\sigma_3 = 6 \text{ Kg/cm}^2$

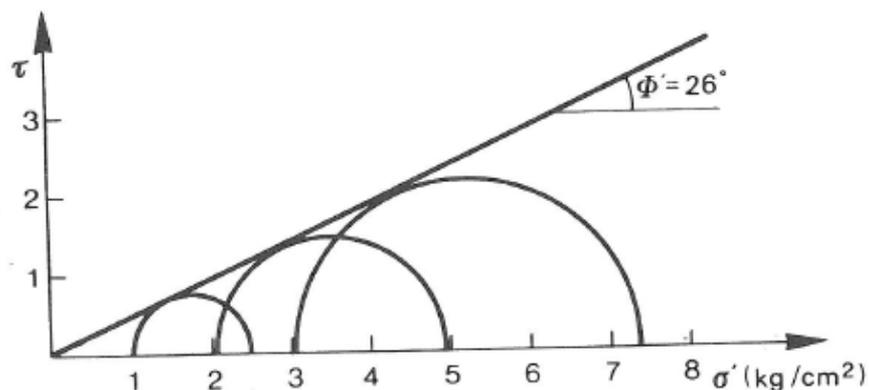


FIGURA 5.7 – Risultati di prove triassiali con consolidazione e senza drenaggio eseguite su una argilla consolidata normalmente.

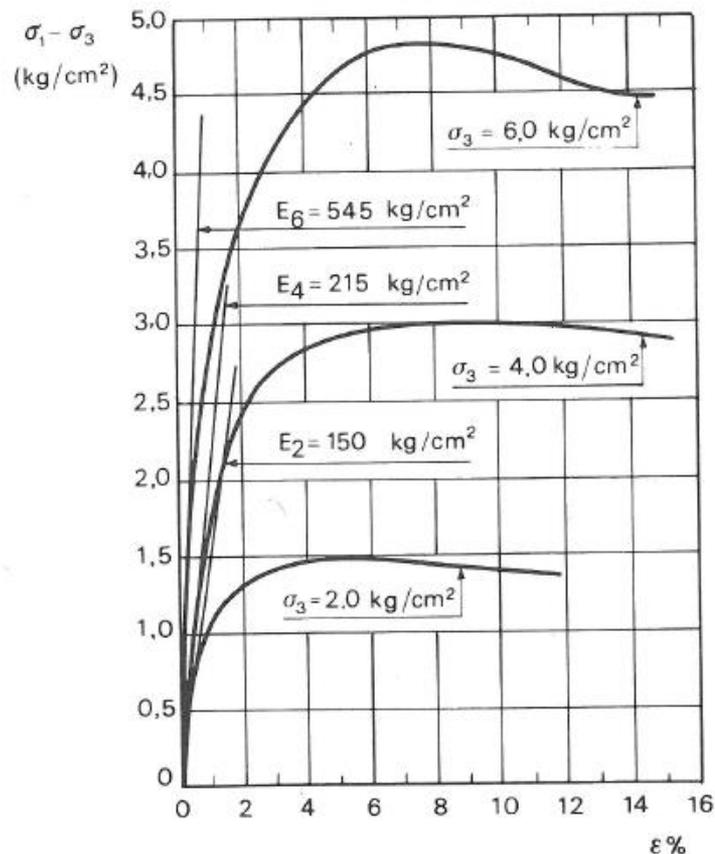


FIGURA 5.8 – Relazioni tra sforzi e deformazioni nel corso di prove triassiali con consolidazione e senza drenaggio.

## ESERCIZIO

Nelle prove triassiali con consolidazione e con drenaggio, essendo le sovrappressioni neutrali nulle, i risultati in termini di tensione totali od effettive coincidono. Queste prove vengono eseguite principalmente su terreni incoerenti e servono ad individuare l'angolo di attrito  $\phi$  ( $c = 0$ ) che varia generalmente per sabbie e ghiaia tra  $30^\circ$  e  $45^\circ$  in funzione della densità e delle caratteristiche granulometriche (la presenza dell'acqua ha una influenza molto piccola).

5.6. – Su una sabbia ricostipata in laboratorio a diversi gradi di densità sono state eseguite due prove triassiali con drenaggio, con pesi di volume di  $\gamma_d = 1,56$  e di  $\gamma_d = 1,65 \text{ t/m}^3$ . In base ai risultati di tali prove individuare l'angolo di attrito  $\phi$ .

Dalla tabella di pagina seguente si ottiene  $\phi = 37^\circ$  e  $\phi = 41^\circ$  rispettivamente come si può controllare in fig. 5.9a e b.

Vaglio U.S.S. N.	% pass.	$\gamma_d = 1,56 \text{ (t/m}^3\text{)}$			$\gamma_d = 1,65 \text{ (t/m}^3\text{)}$		
		$\sigma_3$	$\sigma_1$	$\epsilon_r$ (%)	$\sigma_3$	$\sigma_1$	$\epsilon_r$ (%)
40	100	1,0	4,45	5	1,0	4,85	6
60	91	3,0	12,70	7	3,0	14,70	8
80	70	5,0	22,01	9	5,0	23,00	11
200	5	(Kg/cm <sup>2</sup> )			(Kg/cm <sup>2</sup> )		

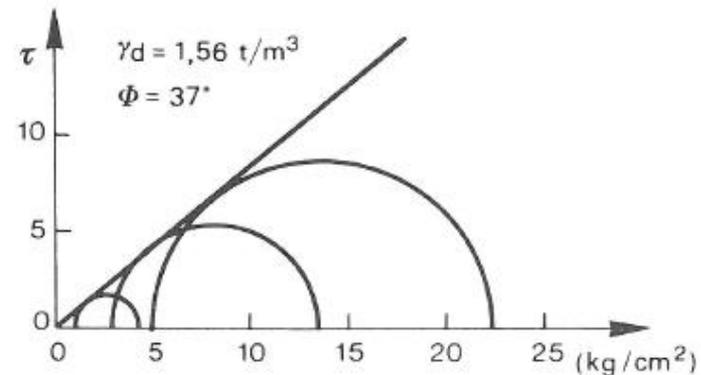


FIGURA 5.9a.

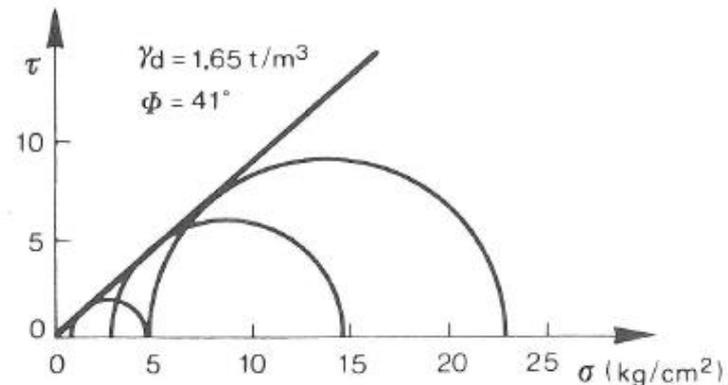


FIGURA 5.9b.

## ESERCIZIO

5.7. – In una prova triassiale senza drenaggio, lo stato tensionale che provoca la rottura di un campione di argilla è caratterizzato dalle seguenti tensioni principali:

$$\sigma_1 = 5 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_3 = 1 \text{ Kg/cm}^2$$

Determinare le tensioni normali e tangenziali agenti su un piano che formi un angolo di  $30^\circ$  con la direzione delle tensioni principali  $\sigma_1$ .

$$\sigma_n = 4 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\tau = 1,75 \text{ Kg/cm}^2$$

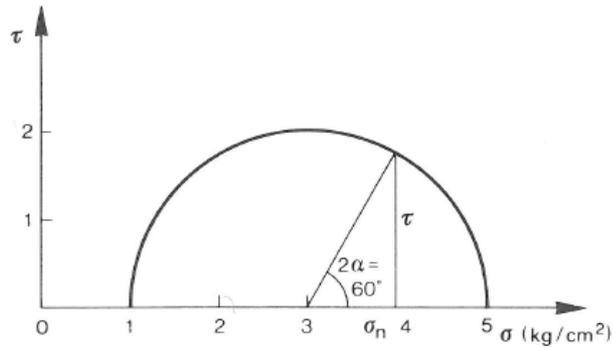


FIGURA 5.10.

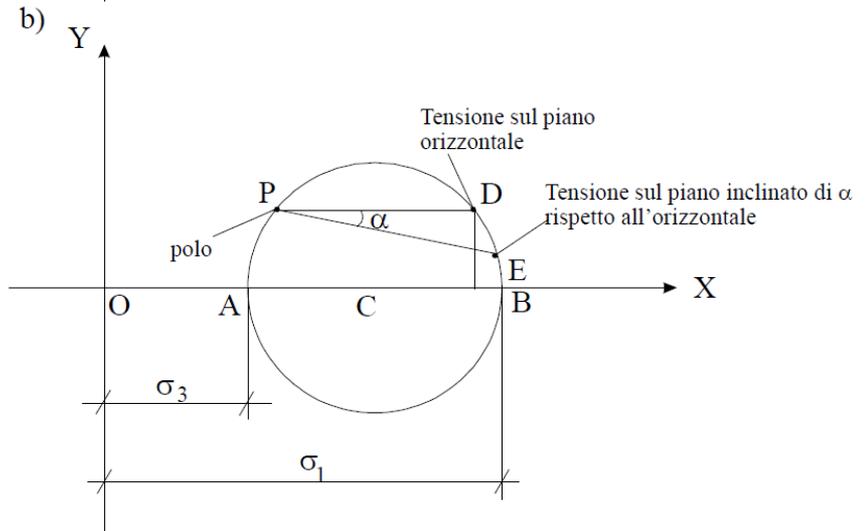
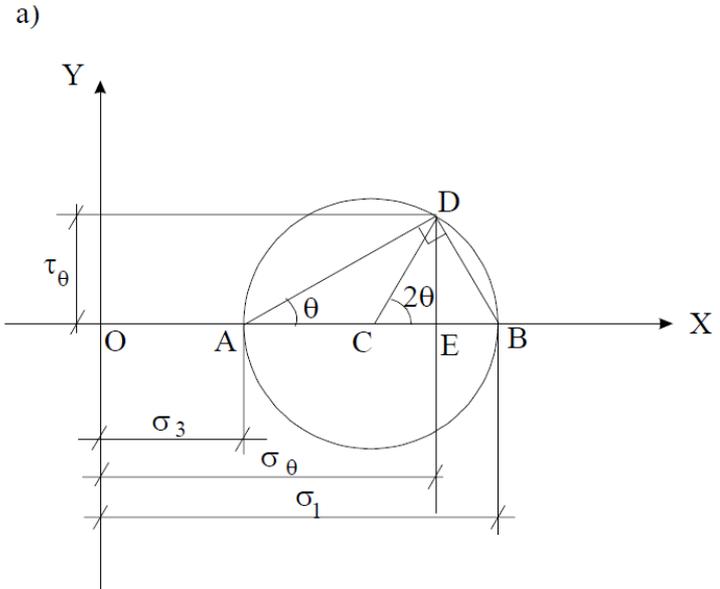
Il problema può anche essere risolto analiticamente, in questo caso si ha:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha$$

$$\tau = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cong 1,73 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_n = 3 + 2 \cos 60^\circ = 4 \text{ Kg/cm}^2$$



tensione tangenziale:  $\tau_\theta = DE = DC \cdot \sin 2\theta = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \sin 2\theta$

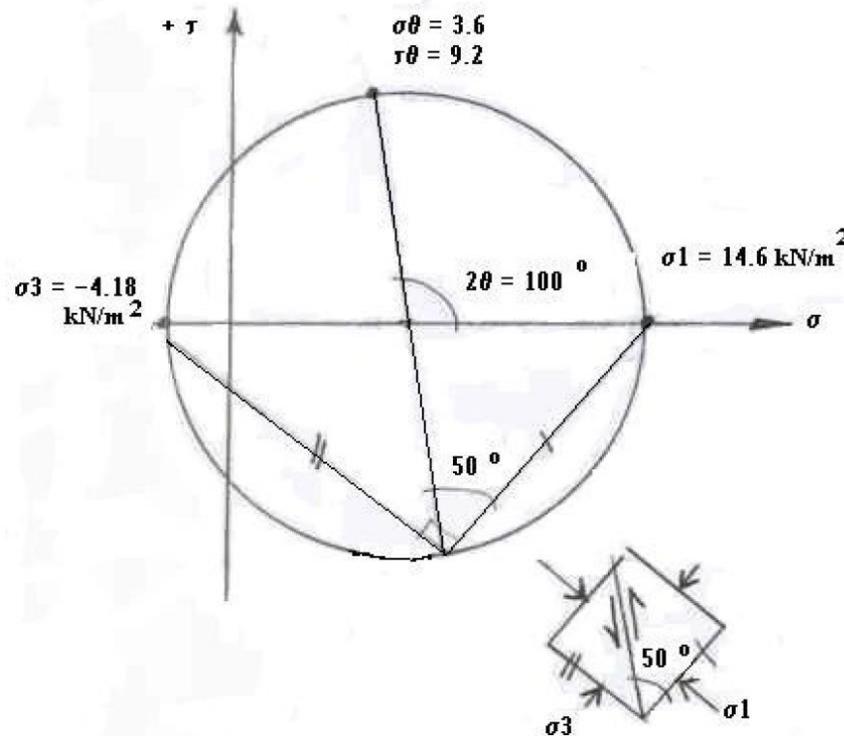
tensione normale:  $\sigma_\theta = OE = OA + AE = \sigma_3 + AD \cdot \cos \theta = \sigma_3 + AB \cdot \cos^2 \theta = \sigma_3 + (\sigma_1 - \sigma_3) \cdot \cos^2 \theta$

**\*Mohr-01: Simple transformation from principal to general stress state.**

(Revision: Jan-09)

A soil particle is found to be subjected to a maximum stress of  $14.6 \text{ kN/m}^2$ , and a minimum stress of  $-4.18 \text{ kN/m}^2$ . Find the  $\sigma$  and  $\tau$  on the plane of  $\theta = 50^\circ$  with respect to the major principal stresses, and also find  $\tau_{\text{max}}$ .

(a) The graphical solution,



(b) The calculated solution,

$$\sigma_\theta = \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) + \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) \cos 2\theta = \left( \frac{14.6 - 4.18}{2} \right) + \left( \frac{14.6 + 4.18}{2} \right) \cos 2(50^\circ) = 3.6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

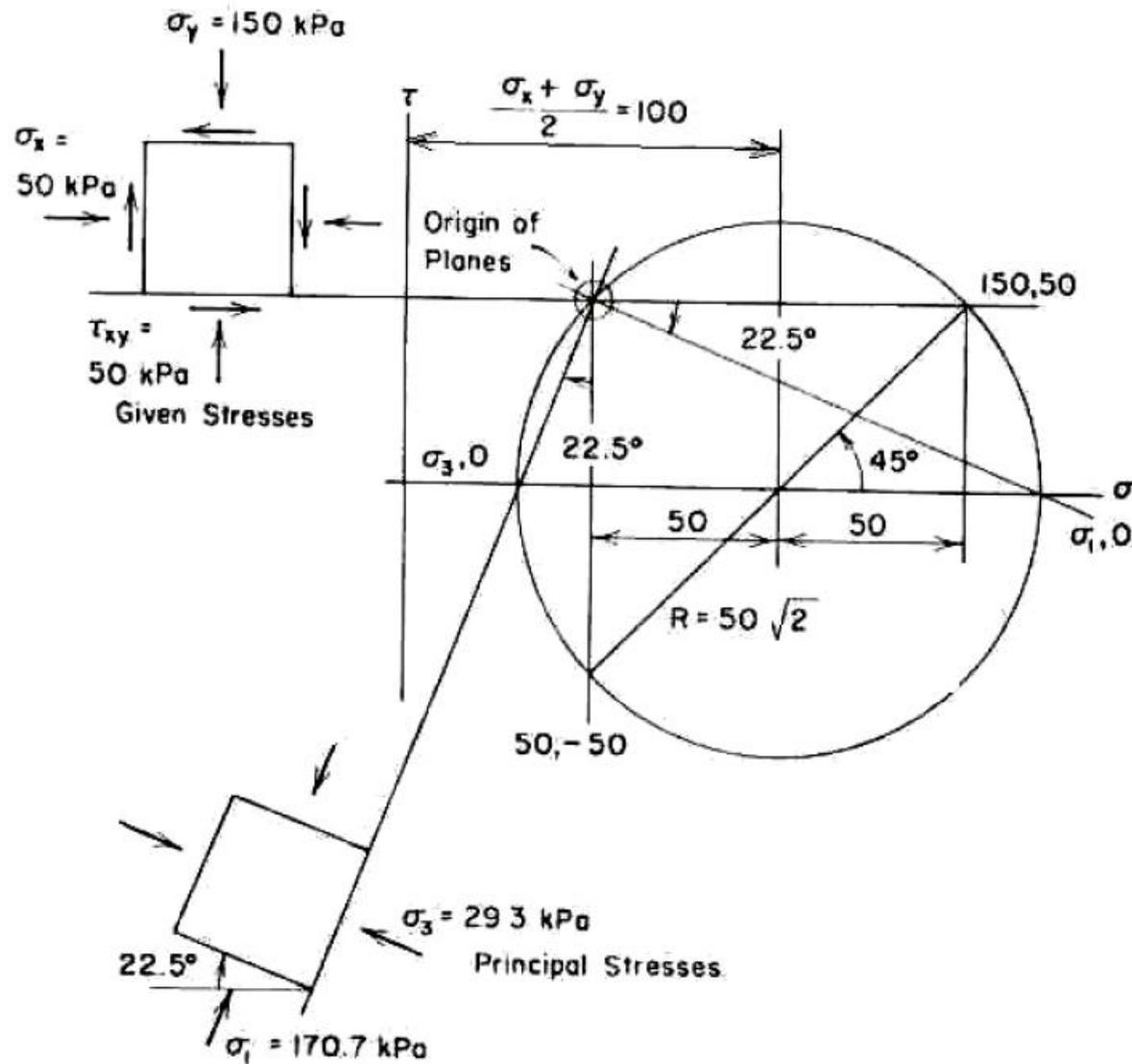
$$\tau_\theta = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) \sin 2\theta = \left( \frac{14.6 + 4.18}{2} \right) \sin 2(50^\circ) = 9.2 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$\tau_{\text{maximum}} = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) = 9.4 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

**\*Mohr – 03: Find the principal stresses and their orientation.**

(Revision: Sept-09)

Given the general stresses at a point in a soil, determine the principal stresses and show them on a properly oriented element.



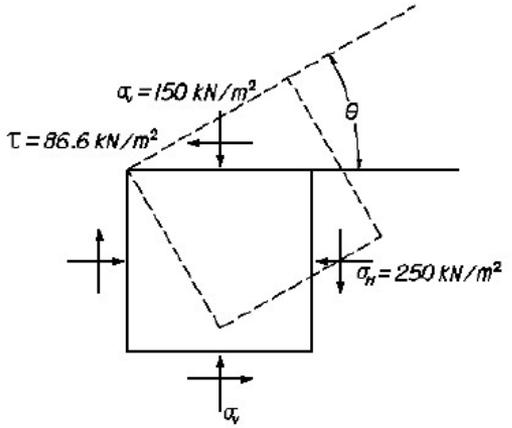
**\*Mohr - 04:**

FIGURA 2.13 Origine dei piani.

(Revision: Sept-09)

A sample of clean sand was retrieved from 7 m below the surface. The vertical load of 150 kN/m<sup>2</sup>, a horizontal load of 250 kN/m<sup>2</sup>, and a shear stress angle  $\theta$  between the vertical stress and the principal stress is 60°, what is the friction  $\phi$  of this sample?

Solution:

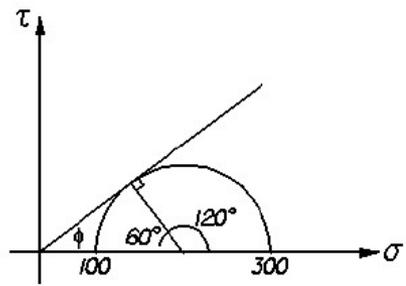


$$\sigma_1 = \frac{\sigma_v + \sigma_h}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_v - \sigma_h}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_1 = \frac{150 + 250}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{150 - 250}{2}\right)^2 + 86.6^2}$$

$$\sigma_1 = 200 + 100 = 300 \text{ kN/m}^2$$

$$\therefore \sigma_3 = 200 - 100 = 100 \text{ kN/m}^2$$



$$\sin \phi = \frac{1/2(\sigma_1 - \sigma_3)}{1/2(\sigma_1 + \sigma_3)} = \frac{3}{3}$$

$$\sin \phi = 0.5$$

$$\phi = \sin^{-1}(0.5)$$

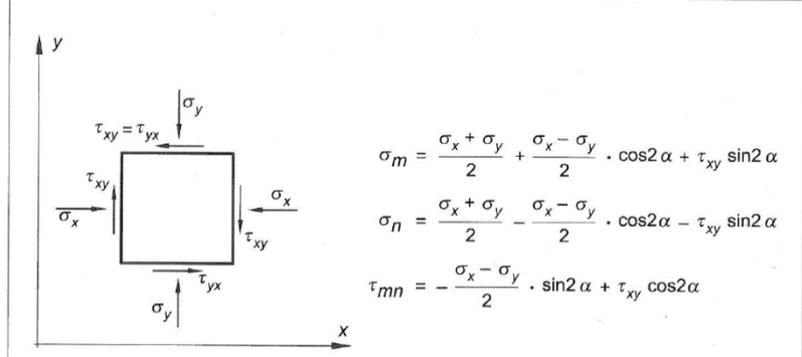
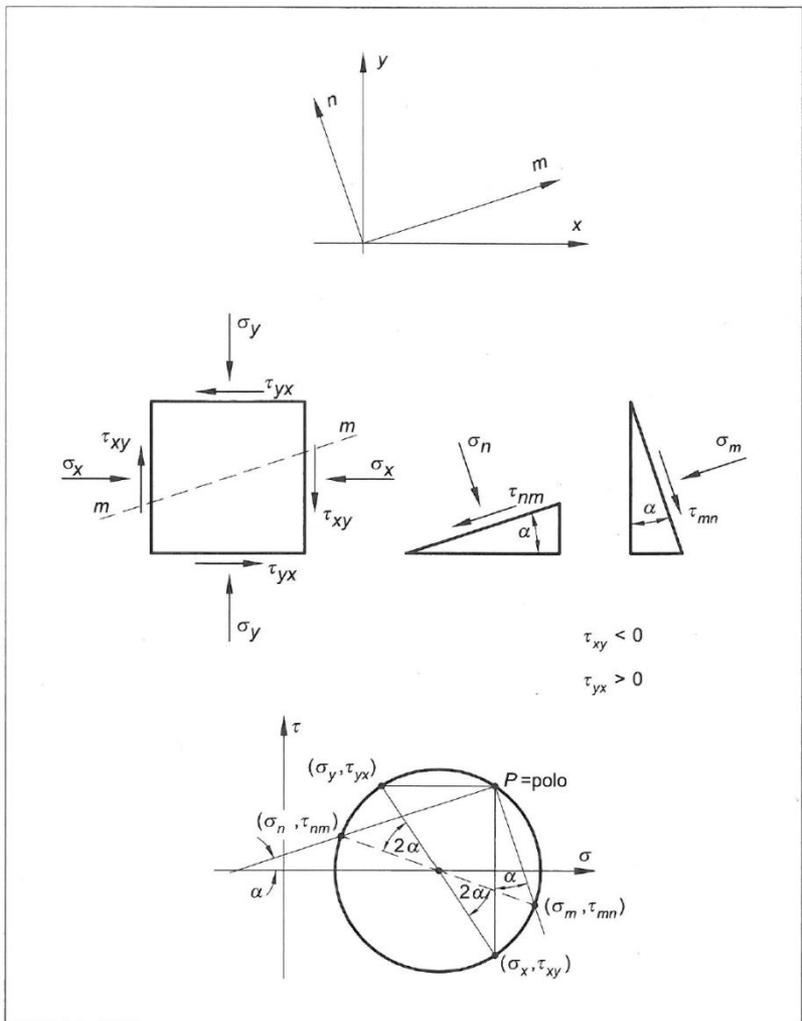
$$\phi = 30^\circ$$

La legge di Mohr-Coulomb può essere rappresentata in termini di tensioni principali effettive:

$$\frac{1}{2}(\sigma'_1 - \sigma'_3) = \left(\frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2} + c' \cotg \Phi'\right) \sin \Phi'$$

e si può anche scrivere:

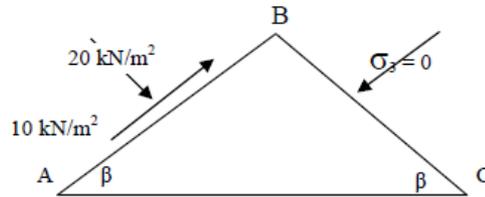
$$\sigma'_1 = \left(\frac{1 + \sin \Phi'}{1 - \sin \Phi'}\right) \sigma'_3 + 2c' \left(\frac{\cos \Phi'}{1 - \sin \Phi'}\right) = \text{tg}^2\left(45^\circ + \frac{\Phi'}{2}\right) \sigma'_3 + 2c' \text{tg}\left(45^\circ + \frac{\Phi'}{2}\right)$$



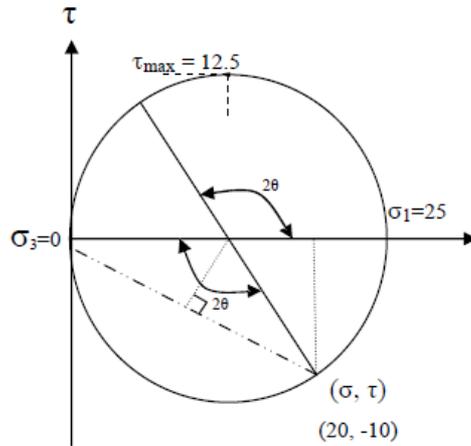
**\*\*Mohr – 07: Back figure the failure angle**

(Revised: Sept-09)

From the stress triangle shown below, find (a) the maximum and minimum principle stresses, (b) the angle alpha, as shown, (c) the angle theta, and (d) the value for the maximum shear stress.



(A) Graphical Solution:



(a)  $\sigma_1 = 25 \text{ kN/m}^2$  and  $\sigma_3 = 0$

(b)  $\alpha$  in the figure is in the angle  $2\theta$  between  $(\sigma, \tau)$  and  $\sigma_3$

.....  $\alpha = 2\theta = 126.9^\circ$

(c) .....  $\theta = 63.4^\circ$

and  $\tau_{\max} = 12.5 \text{ kN/m}^2$

OR (B) Analytical Solution:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \sigma_1 &= \frac{\sigma_1 + \sigma_1}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_1}{2} \cos 2\theta \\ 20 &= \frac{\sigma_1 + \sigma_1}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_1}{2} \cos 2\theta \quad \therefore \sigma_1 = \frac{40}{1 + \cos 2\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \tau_n &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\theta \\ 10 &= \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\theta \quad \therefore \theta = \frac{20}{\sin 2\theta} \end{aligned}$$

$$\therefore 1 - 2 \sin 2\theta + \cos 2\theta = 0$$

.....  $\theta = 63.4^\circ$

.....  $\sigma_1 = \frac{20}{\sin 126.9^\circ} = 25 \text{ kN/m}^2, \quad \sigma_3 = 0$

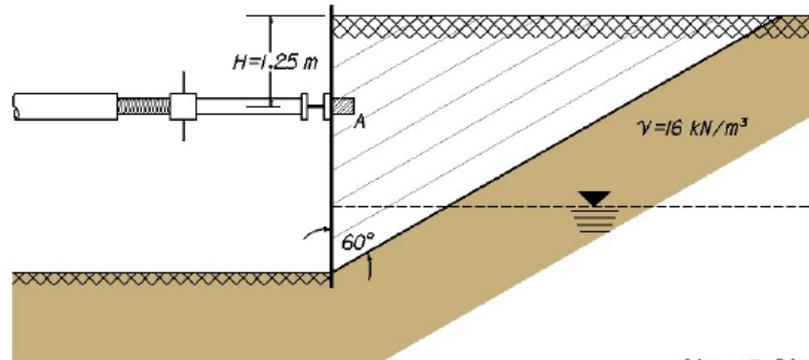
.....  $\tau_{\max} = 12.5 \text{ kN/m}^2$

### \*Mohr – 08: find the Principle pressure using Mohr

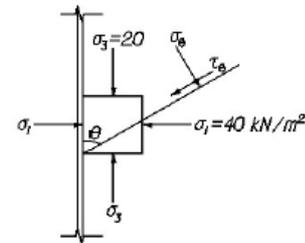
(Revised Sept-09)

The temporary excavation shown below is braced with a steel tube strut. Every morning, a misguided foreman tightens the screw mechanism on the strut “just to be safe”. The stress on a soil particle at point A, just behind the wall, has been measured with a pressure sensor installed by the Engineer. It now measures  $40 \text{ kN/m}^2$ . If the potential failure planes in the soil behind the wall sustain  $60^\circ$  angles with respect to the vertical wall, estimate the normal and shear stresses at that point A along a potential failure plane.

Solution:



SOIL AT POINT A



At point A:

$$\sigma_v = h\gamma = (1.25 \text{ m}) (16 \text{ kN/m}^3) = 20 \text{ kN/m}^2$$

$\therefore \sigma_v$  is the minor principal stress at A,

Since  $\theta = 60^\circ$  is with respect to the major principal stress ( $\sigma_1$ ) plane, then  $\sigma_v = \sigma_3$

$$\therefore \sigma_\theta = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 + (\sigma_1 - \sigma_3)/2 \cos 2\theta = (40 + 20)/2 + (40 - 20)/2 \cos 120^\circ$$

$$\therefore \sigma_\theta = \boxed{25 \text{ kN/m}^2}$$

$$\text{and } \tau_\theta = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 \sin 2\theta = (40 - 20)/2 \sin 120^\circ$$

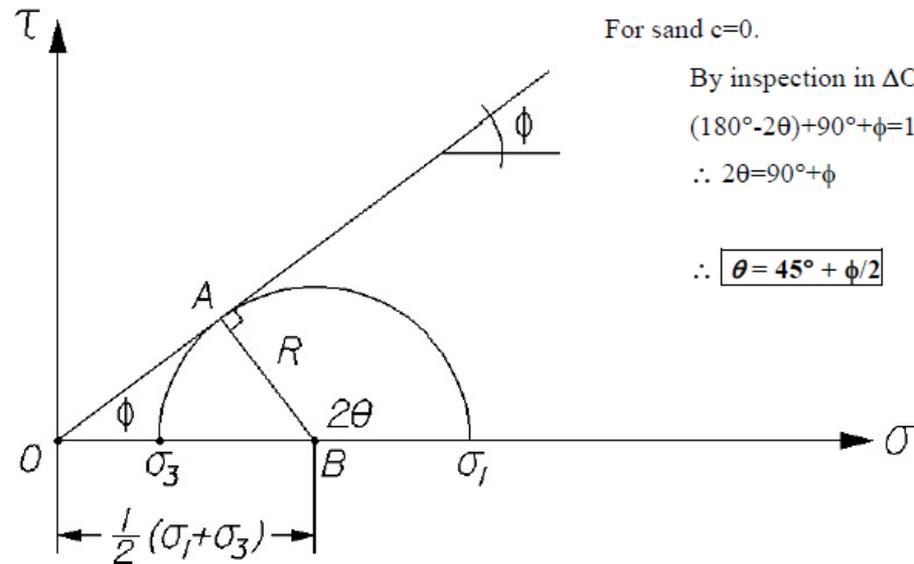
$$\therefore \tau_\theta = \boxed{8.7 \text{ kN/m}^2}$$

### \*Mohr – 09: Relation between $\theta$ and $\phi$ .

(Revised Sept-09)

For a clean sand, prove that  $\theta = 45^\circ + \phi/2$  using Mohr's circle.

Solution:



A failure test on a clean sand (i.e.  $c=0$ ) shows that  $\sigma_1=11.5$  ksf and  $\sigma_3=3.2$  ksf at failure. Find the angle  $\phi$  for this sand.

In the  $\Delta OAB$  above,  $R = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$

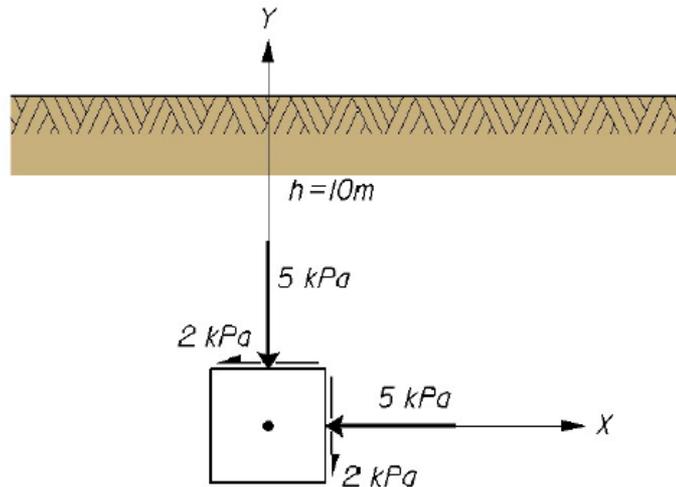
$$\therefore \sin \phi = \frac{\left[\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\right]}{\left[\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)\right]} = \frac{(11.5 - 3.2)}{(11.5 + 3.2)} = 0.565$$

$$\therefore \phi = 34.5^\circ$$

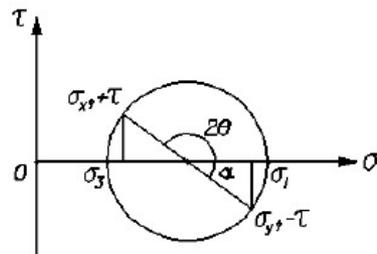
**\*Mohr-11:**

(Revised Sept-09)

- (37) Derive the equation that transforms a general state of stress to the principal state of stress.  
(Hint: Use Mohr's circle for a graphical solution).
- (38) Determine the value of the major principal stress.
- (39) Determine the angle  $\theta$  between the major principal stress and the state of stress shown in the figure above.



a)



By inspection,

$$\sigma_1 = \sigma_x + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$b) \quad \sigma_1 = \frac{5+5}{2} + \sqrt{0+2^2} = \boxed{7 \text{ kPa}}$$

$$c) \quad \sin \alpha = \frac{\tau}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}} = \frac{2}{\sqrt{0+2^2}} = 1 \quad \therefore \alpha = 90^\circ$$

$$\text{but } \alpha + 2\theta = 180^\circ$$

$$\therefore 2\theta = 180^\circ$$

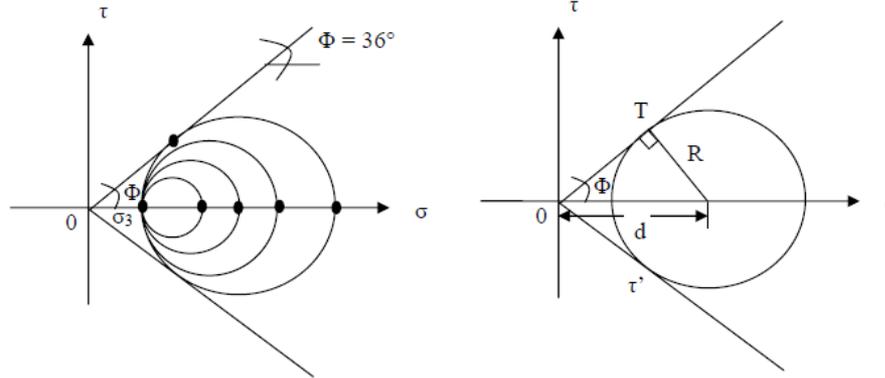
$$\boxed{\theta = 45^\circ}$$

**\*\*Mohr – 14:**

(Revised Sept-09)

A dry sample of sand was tested in a triaxial test. The angle of internal friction was found to be  $36^\circ$ . If the minor principal stress was 300 kPa, at what value of maximum principal stress will the sample fail? The same test was then performed on a clay sample that had the same  $\phi$ , and cohesion of 12 kPa. What was the new maximum principal stress?

Solution:



a) Failure will occur when the Mohr circle becomes tangent to the failure envelopes.

$$\frac{R}{d} = \sin \phi$$

$$\sigma_3 = d - R = \frac{R}{\sin \phi} - R = R \frac{(1 - \sin \phi)}{\sin \phi}$$

$$\sigma_1 = d + R = \frac{R}{\sin \phi} + R = R \frac{(1 + \sin \phi)}{\sin \phi}$$

$$\therefore \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{(1 + \sin \phi)}{(1 - \sin \phi)} = \tan^2 \left( 45^\circ + \frac{\phi}{2} \right)$$

$$\therefore \sigma_1 = (300 \text{ kPa}) \tan^2 \left( 45^\circ + \frac{36^\circ}{2} \right) = 1160 \text{ kPa}$$

b)

$$H = c(\cot \phi)$$

$$\sigma_1 + H = (\sigma_3 + H) \tan^2 \left( 45^\circ + \frac{\phi}{2} \right)$$

$$H = (12 \text{ kPa})(\cot 36^\circ) \approx 17 \text{ kPa}$$

$$\sigma_1 = (300 + 17) \tan^2 \left( 45^\circ + \frac{36^\circ}{2} \right) - 17 = 1,200 \text{ kPa}$$

