Appunti di equazioni differenziali

1 Equazioni differenziali scalari di ordine N.

Dato un insieme aperto e non vuoto $\tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N+1}$, con $N \geq 1$, e una funzione $F : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ continua, scriviamo la seguente *equazione differenziale ordinaria in forma **implicita** di ordine N*:

$$F(t, x, x', \dots, x^{(N)}) = 0 \,. \tag{1}$$

Diremo che una funzione $x : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita su un intervallo I aperto,[1] è una **soluzione** di (1) se

- la funzione x è differenziabile N volte sul suo dominio I,
- le derivate $x^{(k)} : I \to \mathbb{R}$ sono continue per ogni indice $k \in \{1, \dots, N\}$,
- vale $\big(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(N)}(t)\big) \in \tilde{\Omega}$ per ogni $t \in I$,
- vale l'equazione $F\big(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(N)}(t)\big) = 0$ per ogni $t \in I$.

Supponiamo di poter isolare la variabile $x^{(N)}$ nella funzione F, allora possiamo scrivere (1) come una *equazione differenziale ordinaria in forma **esplicita** di ordine N* nel modo seguente

$$x^{(N)} = g(t, x, x', \dots, x^{(N-1)}) \,. \tag{2}$$

dove la funzione $g : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è una funzione continua definita in un aperto Ω non vuoto. In questo caso diremo che la funzione $x : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una **soluzione** di (2) se

- la funzione x è differenziabile N volte sul suo dominio I,
- le derivate $x^{(k)} : I \to \mathbb{R}$ sono continue per ogni indice $k \in \{1, \dots, N\}$,
- vale $\big(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(N-1)}(t)\big) \in \Omega$ per ogni $t \in I$,
- vale l'equazione $x^{(N)}(t) = g\big(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(N-1)}(t)\big)$ per ogni $t \in I$.

Da qui in avanti tratteremo la teoria per equazioni differenziali scritte in forma esplicita.

Definizione 1.1 (Problema di Cauchy)**.** *Dato $(t_0, \overline{x}_0, \dots, \overline{x}_{N-1}) \in \Omega$. Diremo che la funzione $x : I \to \mathbb{R}$ risolve il **Problema di Cauchy***

$$\begin{cases} x^{(N)} = g(t, x, x', \dots, x^{(N-1)}) \,, \\ x(t_0) = \overline{x}_0 \,, \\ \qquad \vdots \\ x^{(N-1)}(t_0) = \overline{x}_{N-1} \,. \end{cases}$$

se sono soddisfatte le seguenti condizioni

- $t_0 \in I$,
- *x è una soluzione di* (2),
- *sono soddisfatte le N condizioni iniziali:*

$$x(t_0) = \overline{x}_0 \,, \quad \dots \,, \quad x^{(N-1)}(t_0) = \overline{x}_{N-1} \,.$$

[1] Da qui in avanti, salvo diversa segnalazione, con I intendiamo un generico intervallo reale non degenere.

2 Sistemi di equazioni differenziali del primo ordine

2.1 Definizioni

Ora presentiamo una classe di equazioni differenziali che generalizzano le equazioni del tipo (2).

L'espressione

$$u' = f(t, u) \tag{3}$$

rappresenta un'equazione differenziale del primo ordine in forma esplicita. In queste note tratteremo funzioni $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ continue, dove il dominio Ω è un aperto.

Obiettivo di questa parte del corso è determinare le soluzioni di questo tipo di equazioni differenziali.

Definizione 2.1 (Soluzione)**.** *Diremo che una funzione $u : I \to \mathbb{R}^N$ è una soluzione dell'equazione differenziale* (3) *se e solo se soddisfa le seguenti richieste*

S1. I è un intervallo non degenere di $\mathbb{R}$,

S2. vale $(t, u(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in I$;

S3. la funzione u è derivabile in I;

S4. vale $u'(t) = f(t, u(t))$ per ogni $t \in I$.

La dinamica di un punto materiale di massa $m > 0$ soggetto ad una forza $F = F(t, x, x')$ che può dipendere dal tempo, dalla posizione x e dalla velocità x' del punto è descritta da un'equazione differenziale così come enunciato dal secondo principio, ovvero dall'equazione $mx'' = F(t, x, x')$. Supponendo per semplicità che il moto si sviluppi su una retta, allora avremo che la posizione x del corpo al variare del tempo sarà descritta da una funzione $x : I \to \mathbb{R}$ tale che $mx''(t) = F(t, x(t), x'(t))$. Il secondo principio della dinamica è un'equazione differenziale del secondo ordine che può essere scritta nella forma (3) aggiungendo la variabile velocità $v(t) = x'(t)$ ottenendo le equazioni

$$x' = v\,, \qquad v' = \frac{1}{m} F(t, x, v)\,.$$

Se definiamo la variabile $u = (x, v)$ e la funzione $f(t, u) = f(t, (x, v)) = (v, \frac{1}{m} F(t, x, v))$ otteniamo proprio l'equivalenza fra la (3) e le precedenti equazioni.

Se ora vogliamo prevedere quale sia il moto di una particella considerata in un dato campo di forze ci è necessario conoscere la posizione x_0 e la velocità v_0 ad un certo istante di tempo t_0. Una volta noti questi due dati dovremmo ricavare il moto della particella.

La precedente idea si traduce in linguaggio matematico con la scelta di fissare una condizione iniziale

$$u(t_0) = u_0$$

che deve essere soddisfatta dalla soluzione dell'equazione (3). In questo caso si parla di problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{PC}$$

dove abbiamo sempre $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ continua e consideriamo $(t_0, u_0) \in \Omega$.

Definizione 2.2. *Diremo che una funzione $u : I \to \mathbb{R}^N$ è una soluzione del problema di Cauchy* (PC) *se e solo se soddisfa le seguenti richieste*

P1. I è un intervallo contenente t_0 all'interno,

P2. la funzione u è soluzione di (3)*,*

P3. vale $u(t_0) = u_0$.

Il seguente enunciato ci fornisce un metodo alternativo per cercare una soluzione di (PC).

Proposizione 2.3 (Formulazione integrale del Problema di Cauchy)**.** *Una funzione $u : I \to \mathbb{R}^N$ è soluzione di* (PC) *se e solo se*

I1. I è un intervallo contenente t_0 all'interno,

I2. $(t, u(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in I$;

I3. u è continua in I;

I4. $u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds$ per ogni $t \in I$.

Dimostrazione. "$\Rightarrow$" Dobbiamo dimostrare solo il punto I4, gli altri sono ovvi. Poiché u è derivabile e vale $u'(t) = f(t, u(t))$ allora segue subito che

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} u'(s)\, ds = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds\,.$$

"$\Leftarrow$" I punti S1, S2, P1, P3 sono ovvie conseguenze delle ipotesi. Restano da dimostrare S3 e S4. Dalle ipotesi deduciamo che la funzione $g(s) = f(s, u(s))$ è continua, quindi la funzione u è derivabile con derivata g da cui deduciamo anche S4. $\square$

Osservazione 2.4. *Nei passaggi precedenti abbiamo dato per scontato che, data una funzione $g : I \to \mathbb{R}^N$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_N(x))$ si definisce l'integrale di g su $[a, b] \subseteq I$ per componenti come segue*

$$\int_a^b g(s)\, ds = \left(\int_a^b g_1(s)\, ds\,, \int_a^b g_2(s)\, ds\,, \quad \dots \quad , \int_a^b g_N(s)\, ds \right)$$

Inoltre sarà utile ricordare che, data una norma su $\mathbb{R}^N$, per $a \le b$, vale

$$\left\| \int_a^b g(s)\, ds \right\| \le \int_a^b \|g(s)\|\, ds\,.$$

L'equazione differenziale (2) può essere ricondotta ad un'equazione del primo ordine (3). L'idea è quella di introdurre le funzioni

$$u_1(t) = x(t)\,, \quad u_2(t) = x'(t)\,, \quad u_3(t) = x''(t)\,, \quad \dots \quad , \quad u_N(t) = x^{(N-1)}(t)\,,$$

così da ottenere il seguente sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = u_3 \\ \quad \vdots \\ u_{N-1}' = u_N \\ u_N' = g(t, u_1, \dots, u_N) \end{cases}$$

Quindi ponendo $u = (u_1, \dots, u_N)$ e

$$f(t, u) = f(t, (u_1, \dots, u_N)) = (u_2, u_3, \dots, u_N, g(t, u_1, u_2, u_3, \dots, u_N))$$

riconosciamo l'equivalenza fra (2) e (3). Le condizioni iniziali diventano quindi

$$u_1(t_0) = \overline{x}_0\,, \quad u_2(t_0) = \overline{x}_1\,, \quad u_3(t_0) = \overline{x}_2\,, \quad \dots \quad , \quad u_N(t_0) = \overline{x}_{N-1}\,.$$

Osservazione 2.5. *L'equazione differenziale del secondo ordine $x'' + cx' + \omega^2 x = 0$ può essere riscritta nella forma (3) come*

$$\begin{cases} x' = y\,, \\ y' = -cy - \omega^2 x\,. \end{cases}$$

ottenendo $u' = f(t, u)$ con $u = (x, y)$ e $f(t, u) = (y, -cy - \omega^2 x)$.

Osservazione 2.6. *Le equazioni differenziali (2) possono essere introdotte anche con variabili vettoriali. A titolo di esempio il secondo principio della dinamica vale per particelle nello spazio tridimentionale, quindi l'equazione differenziale $x'' = \frac{1}{m} F(t, x, x')$ può essere vista anche dal punto di vista vettoriale con $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $F : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$. Anche in questo caso, con procedura analoga a quanto già visto possiamo introdurre la velocità $v = (v_1, v_2, v_3)$, con $v_i = x_i'$ e ricondurre l'equazione differenziale del secondo ordine alla forma (3).*

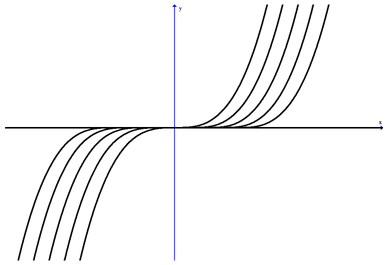

Figura 1: Il pennello di Peano.

2.2 Esistenza e unicità

Consideriamo in questa sezione il problema di Cauchy (PC). Ricordiamo che $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, è continua e definita sull'aperto Ω. Inoltre $(t_0, u_0) \in \Omega$.

Teorema 2.7 (Teorema di Peano - 1890)**.** *Se f è continua allora esiste una soluzione del problema di Cauchy* (PC)*.*

Vediamo subito un esempio di problema di Cauchy con f continua ma che dà luogo a molteplici soluzioni per lo stesso dato iniziale. Nel seguito, quando tratteremo esempi di equazioni differenziali in cui la variabile u è uno scalare prediligeremo la scelta della variabile x.

Esempio 2.8. *Il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x' = x^{2/3} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

ammette come soluzioni sia $x(t) = 0$ che $x(t) = t^3/27$ e ciò si verifica facilmente, tuttavia possiamo trovare anche le seguenti infinite soluzioni per ogni scelta di $c, d \in \mathbb{R}^+$:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{(t+d)^3}{27} & t < -d \\ 0 & -d \le t \le c \\ \frac{(t-c)^3}{27} & t > c \end{cases}$$

Questo fenomeno prende il nome di pennello di Peano*. Il motivo si intuisce dalla Figura 1 che riporta i grafici di alcune delle soluzioni sopra citate.*

Quale proprietà manca alla funzione $f(x) = x^{2/3}$ tale da causare questo comportamento? A prima vista notiamo che f non è derivabile in zero. In realtà chiedere la derivabilità di f risulta una richiesta eccessivamente prudente.

Definizione 2.9 (Funzioni Lipschitziane)**.** *Una funzione $f : \hat{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ si dice Lipschitziana se esiste $L > 0$ tale che*

$$\|f(u_1) - f(u_2)\| \le L\|u_1 - u_2\|$$

per ogni $u_1, u_2 \in \hat{\Omega}$. La costante L è detta costante di Lipschitz.

Un esempio di funzione Lipschitziana $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è $f(x) = |x|$, che non è derivabile in zero. Tuttavia una funzione semplice come $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ non è Lipschitziana.

Definizione 2.10 (Funzioni localmente Lipschitziane)**.** *Una funzione $f : \hat{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ si dice localmente Lipschitziana se per ogni $u_0 \in \hat{\Omega}$ esiste un raggio ρ e una costante $L > 0$ tale che*

$$\|f(u_1) - f(u_2)\| \le L\|u_1 - u_2\|$$

per ogni $u_1, u_2 \in B_\rho(u_0)$.

Osserviamo che $g(x) = x^2$ è localmente Lipschitziana (dimostrarlo per esercizio usando il teorema di Lagrange).

La presenza della variabile temporale nei problemi di Cauchy porta ad un'ulteriore definizione.

Definizione 2.11. *Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, con Ω aperto. La funzione f si dice localmente Lipschitziana nella seconda variabile se per ogni $(t_0, u_0) \in \Omega$ esiste un intorno $U \subseteq \Omega$ e una costante $L > 0$ tale che*

$$\|f(t, u_1) - f(t, u_2)\| \leq L\|u_1 - u_2\|$$

per ogni coppia $(t, u_1), (t, u_2) \in U$.

Si noti che nella disuguaglianza la coordinata t è la stessa per i due punti. Inoltre ogni definizione, nell'ordine, implica la validità della successiva.

Proposizione 2.12. *La funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ è localmente Lipschitziana rispetto alla seconda variabile se e solo se per ogni compatto $K \subseteq \Omega$ esiste una costante $L_K > 0$ tale che*

$$\|f(t, u_1) - f(t, u_2)\| \leq L\|u_1 - u_2\|$$

per ogni coppia $(t, u_1), (t, u_2) \in K$.

Dimostrazione. "$\Leftarrow$" In questo caso la dimostrazione è banale: dato un punto $(t_0, u_0) \in \Omega$ è sufficiente trovare un compatto $K \subset \Omega$ che contenga al suo interno il punto considerato

"$\Rightarrow$" Supponiamo per assurdo che esista un compatto $K \subset \Omega$ e due successioni $(t_n, v_n)_n$ e $(t_n, w_n)_n$ contenute in K tali che

$$\|f(t, v_n) - f(t, w_n)\| > n\|v_n - w_n\|\,, \qquad \text{per ogni } n\,. \tag{4}$$

Introduciamo la costante $M_K = \max\{\|f(t, u)\| \,:\, (t, u) \in K\}$. Dalla compattezza di K, deduciamo l'esistenza di una sottosuccessione $(t_{n_k}, v_{n_k})_k$ convergente ad un elemento $(\bar{t}, \bar{v}) \in K$.

Mostriamo ora che anche la sottosuccessione $(t_{n_k}, w_{n_k})_k$ converge a $(\bar{t}, \bar{v})$: infatti notiamo che

$$\|v_{n_k} - w_{n_k}\| < \frac{2}{n_k}\|f(t, v_{n_k}) - f(t, w_{n_k})\| \leq \frac{1}{n_k} M_K \to 0$$

e quindi le successioni $(v_{n_k})_k$ e $(w_{n_k})_k$ hanno lo stesso limite.

Consideriamo ora, dato il punto $(\bar{t}, \bar{v})$ l'intorno U e la costante L tale che

$$\|f(t, u_1) - f(t, u_2)\| \leq L\|u_1 - u_2\|$$

per ogni coppia $(t, u_1), (t, u_2) \in U$. Per k sufficientemente grande avremo $(t_{n_k}, v_{n_k}), (t_{n_k}, w_{n_k}) \in U$ e quindi

$$\|f(t, v_{n_k}) - f(t, w_{n_k})\| \leq L\|v_{n_k} - w_{n_k}\| \leq n_k\|v_{n_k} - w_{n_k}\|$$

che risulta in contraddizione con (4) concludendo così la dimostrazione. □

Proposizione 2.13. *Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ con Ω aperto. Supponiamo esistano in Ω le derivate parziali rispetto alle variabili $x = (x_1, \ldots, x_N)$ e che tutte le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ siano continue. Allora la funzione è localmente Lipschitziana nella seconda variabile.*

Dimostrazione. Ragioneremo dapprima sulle componenti f_k della funzione f. Fissiamo un generico istante t per cui valga $\Omega_t := \{u \,:\, (t, u) \in \Omega\} \neq \varnothing$, ovvero tale che esista almeno un punto di Ω avente il valore t come prima coordinata (mostrare per esercizio che Ω_t è un aperto di $\mathbb{R}^N$). Dalle ipotesi segue che la funzione $f_k(t, \cdot) : \Omega_t \to \mathbb{R}$ è continua e differenziabile con continuità nel suo dominio. Quindi, in ogni punto del dominio Ω_t, possiamo calcolare il suo gradiente, che denotiamo con $\nabla_u f_k(t, \cdot)$. Dal teorema del valor medio di Lagrange emerge che, per ogni $u, v \in \Omega_t$,

$$f_k(t, u) - f_k(t, v) = \frac{\partial f_k}{\partial \nu}(t, \xi)\ \|u - v\|$$

dove ξ appartiene al segmento di estremi u e v e $\frac{\partial f_k}{\partial \nu}(t, \cdot) : \Omega_t \to \mathbb{R}$ è la derivata direzionale di $f_k(t, \cdot)$ con direzione individuata dal versore $\nu = \frac{v-u}{\|v-u\|}$. Ricordando che $\frac{\partial f_k}{\partial \nu}(t, \cdot) = \langle \nabla_u f_k(t, \cdot)\,, \nu \rangle$, possiamo ottenere la seguente maggiorazione:

$$|f_k(t, u) - f_k(t, v)| \leq \|\nabla_u f_k(t, \xi)\|\ \|u - v\|\,.$$

A questo punto siamo pronti per dimostrare la tesi. Fissiamo un generico $(t_0, u_0) \in \Omega$. Essendo Ω aperto, possiamo trovare $\delta > 0$ e $\rho > 0$ tale che $K = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}_\rho(u_0) \subset \Omega$. Dalle ipotesi, il gradiente (sulle sole variabili u!) $\nabla_u f_k(\cdot,\cdot) : K \to \mathbb{R}^N$ è una funzione continua su un compatto, quindi per il Teorema di Weierstrass esiste $M_k > 0$ tale che

$$\|\nabla_u f_k(t,\xi)\| \le M_k\,, \qquad \text{per ogni } (t,\xi) \in K\,.$$

cosicché, ricordando la stima ottenuta precedentemente,

$$|f_k(t,u) - f_k(t,v)| \le M_k\, \|u-v\|$$

per ogni $(t,u),(t,v) \in K$. Il ragionamento vale per ogni componente k. Ponendo $M^2 = \sum_{k=1}^N M_k$ troviamo quindi

$$\|f(t,u) - f(t,v)\|^2 = \sum_{k=1}^N |f_k(t,u) - f_k(t,v)|^2 \le \sum_{k=1}^N M_k^2\, \|u-v\|^2 \le M^2 \|u-v\|^2$$

da cui la tesi ponendo $L = M$. □

Definizione 2.14 (Condizioni di Lipschitz)**.** *In seguito, trattando Problemi di Cauchy, diremo che la funzione $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, con Ω aperto, verifica le condizioni di Lipschitz se è continua ed è localmente Lipschitziana nella seconda variabile.*

Teorema 2.15 (di Cauchy-Lipschitz)**.** *Consideriamo $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ continua e localmente Lipschitziana rispetto alla seconda variabile. Allora per ogni $(t_0,u_0) \in \Omega$ esiste un $r_0 > 0$ tale che il problema di Cauchy*

$$(PC) \qquad \begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione $u : [t_0 - r_0, t_0 + r_0] \to \mathbb{R}^N$. Inoltre la successione di funzioni $(u_n)_n$ definita da

$$u_0(t) = u_0\,, \qquad u_{n+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_n(s))\,ds$$

è tale che $lim_n u_n = u$, uniformemente su $[t_0 - r_0, t_0 + r_0]$.

Si noti che nell'enunciato si intende che, fissato il dominio $[t_0 - r_0, t_0 + r_0]$ esiste un'unica soluzione definita in questo dominio. Potremmo invece trovare altre soluzioni definite su domini differenti. Qui di seguito diamo prima una dimostrazione classica in cui tutte le costanti e gli strumenti vengono introdotti *ad hoc* sono già pronti per far funzionare tutto. Successivamente proponiamo un approccio in cui tutto viene preparato al momento. Questa seconda dimostrazione può essere utile al fine di capire come la ricerca di una dimostrazione possa spesso portare a diversi dettagli da curare.

Dimostrazione pronta. Dato il punto $(t_0,u_0) \in \Omega$ esistono due costanti positive r_1 e r_2 tali che $K = [t_0 - r_1, t_0 + r_1] \times \overline{B}_{r_2}(u_0) \subset \Omega$. Dato questo compatto introduco la costante di Lipschitz L_K e il valore $M = \max\{\|f(t,u)\| : (t,u) \in K\}$. Scegliamo un valore

$$r_0 < \min\left\{ r_1\,, \frac{r_2}{M}\,, \frac{1}{L_K} \right\}$$

e definiamo $I_0 = [t_0 - r_0, t_0 + r_0]$ e lo spazio di Banach

$$X = \{u \in C^0(I_0, \mathbb{R}^N) \,:\, \|u - u_0\|_{C^0} < r_2\}.$$

Nella precedente definizione si intende con u_0 la funzione costante $u(t) = u_0$ per ogni $t \in I_0$, con un leggero abuso di notazioni. Definiamo la funzione T che ad ogni elemento $v \in X$ associa la funzione

$$T[v](t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s))\,ds\,.$$

Dimostriamo ora che $T[v] \in X$ per ogni $v \in X$. Infatti vale

$$\|T[w](t) - u_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s,w(s))\,ds \right\| \le \left| \int_{t_0}^t \|f(s,w(s))\|\,ds \right| \le \left| \int_{t_0}^t M_K\,ds \right| = M_K|t - t_0| \le M_K r_0\,.$$

Abbiamo definito una funzione $T : X \to X$. Abbiamo

$$
\begin{aligned}
\|T[v](t) - T[w](t)\| &\leq \left\| u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))\, ds - u_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, w(s))\, ds \right\| \\
&\leq \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, v(s)) - f(s, w(s))\, ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, v(s)) - f(s, w(s))\|\, ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} L_K \|v(s) - w(s)\|\, ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} L_K \|v - w\|_{C^0}\, ds \right| \leq L_K r_0 \|v - w\|_{C^0}
\end{aligned}
$$

e poiché $L_K r_0 < 1$, la funzione T è una contrazione. Dall'applicazione del teorema di Banach-Caccioppoli delle contrazioni deduciamo l'esistenza di un unico punto fisso per la funzione T ovvero di un elemento $u \in X$ tale che

$$
u(t) = T[u](t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds
$$

e attraverso la Proposizione 2.3 avremo la tesi. La parte riguardante la successione approssimante è diretta conseguenza dell'applicazione del suddetto teorema. □

Dimostrazione alternativa. L'idea è quella di sfruttare la Proposizione 2.3. Quindi innanzitutto la soluzione u che andremo a cercare dovrà essere definita su un dominio I_0 contenente t_0 al suo interno e dovrà essere continua. Quindi consideriamo un intervallo del tipo $I_0 = [t_0 - r_0, t_0 + r_0]$ (con $r_0 > 0$ da determinare) e lo spazio di funzioni continue $C^0(I_0, \mathbb{R}^N)$. Inoltre, dovendo valere la proprietà $(t, u(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in I$ ha senso considerare il sottoinsieme

$$
\Xi = \{u \in C^0(I_0, \mathbb{R}^N) \,:\, (t, u(t)) \in \Omega \text{ per ogni } t \in I_0\}\,.
$$

Sempre con l'idea di applicare con successo la Proposizione 2.3, notiamo che definendo l'applicazione $T : \Xi \to C^0(I_0, \mathbb{R}^N)$, come

$$
T[w](t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, w(s))\, ds \qquad \text{per ogni } t \in I_0
$$

allora un'eventuale soluzione $u : I_0 \to \mathbb{R}^N$ di (PC) dovrebbe essere un punto fisso di T, ovvero dovrebbe valere $T[u] = u$. Si noti inoltre che l'insieme Ξ è il dominio naturale da imporre per poter effettivamente calcolare l'integrale contenuto nella definizione di T.

A questo punto il nostro obiettivo è dimostrare l'esistenza di un punto fisso per T. Se potessimo applicare il teorema delle contrazioni di Banach-Caccioppoli allora T ammetterebbe un'unico punto fisso concludendo la dimostrazione.

La strategia è quindi trovare uno spazio di Banach $X \subset \Xi$ tale che la restrizione $T : X \to C^0(I_0, \mathbb{R}^N)$ abbia immagine in X, ovvero tale che $T(X) \subseteq X$, da cui potremmo considerare direttamente la funzione $T : X \to X$. Successivamente se riuscissimo a garantire che questa funzione sia una contrazione allora potremmo applicare con successo il teorema di Banach-Caccioppoli.

Cerchiamo quindi un opportuno spazio di Banach $X \subseteq \Xi$. Affinché X sia effettivamente uno spazio di Banach è ragionevole prendere un sottinsieme di $C^0(I_0, \mathbb{R}^N)$ le cui funzioni abbiano immagine in un preciso chiuso B di $\mathbb{R}^N$ (cosicché otterremo che X sarà un chiuso in uno spazio di Banach, ereditando così da $C^0(I_0, \mathbb{R}^N)$ la proprietà di essere spazio di Banach). Quindi cerchiamo un insieme

$$
X = \{u \in C^0(I_0, \mathbb{R}^N) \,:\, u(t) \in B \text{ per ogni } t \in I_0\}\,,
$$

con B un insieme chiuso da determinare. Poiché l'obiettivo finale è ottenere $T(X) \subset X$, essendo $T[w](t_0) = u_0$ per ogni funzione w del candidato dominio X, allora dovremo necessariamente avere $u_0 \in B$. Ad esempio possiamo provare a considerare una palla chiusa $B = \overline{B}_\rho(u_0) \subset \mathbb{R}^N$ con raggio da determinare. Infine, dovendo scegliere un insieme X contenuto in Ξ, dobbiamo garantire la validità dell'inclusione $I_0 \times B \subseteq \Omega$. Al fine di ottenere questa condizione scegliamo r_1 e ρ positivi sufficientemente piccoli da garantire che il compatto

$$
K = [t_0 - r_1, t_0 + r_1] \times \overline{B}_\rho(u_0)
$$

sia contenuto in Ω. Otteniamo quindi la prima condizione sulla scelta del valore r_0 che definisce l'insieme I_0 introdotto all'inizio della dimostrazione:

$$
r_0 \leq r_1\,. \tag{5}
$$

La precedente argomentazione ci ha portato a definire l'insieme

$$X = \{u \in C^0(I_0, \mathbb{R}^N) \,:\, u(t) \in \overline{B}_\rho(u_0) \text{ per ogni } t \in I_0\} = \{u \in C^0(I_0, \mathbb{R}^N) \,:\, \|u - u_0\|_{C^0} \le \rho\}\,, \tag{6}$$

dove $\|\cdot\|_{C^0}$ denota la norma uniforme delle funzioni di $C^0(I_0, \mathbb{R}^N)$. Cerchiamo ora di capire se è possibile garantire che $T(X) \subseteq X$. Per fare ciò dobbiamo quindi dimostrare che per ogni $w \in X$ vale

$$\max_{t \in I_0} \|T[w](t) - u_0\| = \|T[w] - u_0\|_{C^0} \le \rho\,. \tag{7}$$

Notiamo che, se vale $w \in X$, allora segue che $(s, w(s)) \in K$ per ogni $s \in I_0$, quindi calcoliamo

$$\begin{aligned}
\|T[w](t) - u_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, w(s))\, ds \right\| \\
&\le \left| \int_{t_0}^t \|f(s, w(s))\|\, ds \right| \\
&\le \left| \int_{t_0}^t M_K\, ds \right| = M_K |t - t_0| \le M_K r_0
\end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$M_K = \max_{(s,v) \in K} \|f(s, v)\|\,.$$

Imponendo sul valore r_0 la condizione aggiuntiva

$$r_0 \le \frac{\rho}{M_K} \tag{8}$$

troviamo che vale effettivamente la (7). A questo punto resta da capire se sia possibile ottenere che $T : X \to X$ sia una contrazione. La nostra speranza quindi è di ottenere l'esistenza di una costante positiva $\alpha < 1$ tale che

$$\|T[v] - T[w]\|_{C^0} \le \alpha \|v - w\|_{C^0}\,, \qquad \text{per ogni } v, w \in X\,. \tag{9}$$

Quindi dovremmo dimostrare che

$$\max_{t \in I_0} \|T[v](t) - T[w](t)\| \le \alpha \|v - w\|_{C^0}\,, \qquad \text{per ogni } v, w \in X\,.$$

Impostiamo quindi il calcolo

$$\begin{aligned}
\|T[v](t) - T[w](t)\| &\le \left\| u_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s))\, ds - u_0 - \int_{t_0}^t f(s, w(s))\, ds \right\| \\
&\le \left\| \int_{t_0}^t f(s, v(s)) - f(s, w(s))\, ds \right\| \\
&\le \left| \int_{t_0}^t \|f(s, v(s)) - f(s, w(s))\|\, ds \right|\,.
\end{aligned}$$

A questo punto, notiamo che è opportuno introdurre la costante di Lipschitz $L_K > 0$ relativa al compatto K, ovvero tale che

$$\|f(s, x) - f(s, y)\| \le L_K \|x - y\|\,, \qquad \text{per ogni } x, y \in K\,.$$

Proseguendo il calcolo precedente troviamo quindi

$$\begin{aligned}
\|T[v](t) - T[w](t)\| &\le \left| \int_{t_0}^t L_k \|v(s) - w(s)\| ds \right| \\
&\le \left| \int_{t_0}^t L_k \|v - w\|_{C^0} ds \right| \le L_K |t - t_0| \|v - w\|_{C^0} \le L_k r_0 \|v - w\|_{C^0}\,.
\end{aligned}$$

Aggiungendo la richiesta che r_0 soddisfi anche

$$r_0 < \frac{1}{L_K} \tag{10}$$

otteniamo che (9) è soddisfatta ponendo $\alpha = L_K r_0 < 1$. Concludiamo quindi che $T : X \to X$ è una contrazione posto che X sia lo spazio descritto in (6) e dove l'insieme $I_0 = [t_0 - r_0, t_0 + r_0]$ è costruito scegliendo r_0 che soddisfi le tre richieste (5), (8) e (10), ovvero chiedendo

$$r_0 < \min\left\{r_1, \frac{\rho}{M_K}, \frac{1}{L_K}\right\}.$$

L'unico punto fisso u di T è la soluzione cercata. □

2.3 Prolungamento di soluzioni e soluzioni massimali

Proposizione 2.16. *Data $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ continua e localmente Lipschitziana rispetto alla seconda variabile, supponiamo di avere due soluzioni $u_1 : I_1 \to \mathbb{R}^N$ e $u_2 : I_2 \to \mathbb{R}^N$ dello stesso problema di Cauchy* (PC)*, dove I_1 e I_2 sono intervalli aperti. Allora $u_1(t) = u_2(t)$ per ogni $t \in I_1 \cap I_2$.*

Dimostrazione. Dalla Definizione 2.2 deduciamo che $t_0 \in I_1 \cap I_2$. Definiamo l'insieme

$$J = \{t \in I_1 \cap I_2 \, : \, t \geq t_0 \, , u_1(s) = u_2(s) \text{ per ogni } s \in [t_0, t]\} .$$

Fissiamo $\beta = \sup J$ e $b = \sup I_1 \cap I_2$. Mostreremo che $\beta = b$. Notiamo subito che vale $t_0 \in J$ e quindi $J \neq \varnothing$. Supponiamo per assurdo che valga $\beta < b$. Dalla continuità delle funzioni u_1 e u_2, abbiamo che J è chiuso e vale $J = [t_0, \beta] \subset [t_0, b[$. Consideriamo quindi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(\beta) = \overline{u} \end{cases} \tag{11}$$

dove $\overline{u} = u_1(\beta) = u_2(\beta)$. Per il Teorema di Cauchy-Lipschitz, possiamo considerare $0 < r_0 < (\sup I_1 \cap I_2) - \beta$ e l'unica soluzione u di (11) definita sull'intervallo $I_0 = [\beta - r_0, \beta + r_0]$. Osserviamo inoltre che anche le restrizioni delle funzioni u_1 e u_2 all'intervallo I_0 sono anch'esse soluzioni di (11), quindi le tre funzioni u, u_1 e u_2 coincidono su I_0 per l'unicità delle soluzioni ai problemi di Cauchy. Otteniamo quindi che $u_1(s) = u_2(s)$ per ogni $s \in [t_0, \beta + r_0]$ e quindi troviamo che $\beta + r_0 \in J$ contraddicendo la definizione di $\beta = \sup J$.

La dimostrazione sarà conclusa dimostrando che, definito

$$\tilde{J} = \{t \in I_1 \cap I_2 \, : \, t \leq t_0 \, , u_1(s) = u_2(s) \text{ per ogni } s \in [t, t_0]\} ,$$

vale $\inf J = \inf I_1 \cap I_2$. Questa parte della dimostrazione è omessa e lasciata come esercizio. La si può ottenere adattando il ragionamento precedente. □

Definizione 2.17 (Prolungamento)**.** *Data una soluzione $u : I \to \mathbb{R}^N$ di un problema di Cauchy* (PC)*, diremo che la funzione $u_* : I_* \to \mathbb{R}^N$ è un prolungamento della soluzione u se $I \subsetneq I_*$, e u_* è anch'essa soluzione di* (PC).

Inoltre, diremo che una soluzione u è massimale *se non ammette prolungamenti. Il suo dominio si dirà* intervallo massimale di esistenza.

Proposizione 2.18. *Data $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ continua e localmente Lipschitziana rispetto alla seconda variabile, supponiamo di avere una soluzione massimale $u : I \to R^N$ del problema di Cauchy* (PC)*. Allora I è aperto.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\sup I < +\infty$ e che esista $\beta = \max I$. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} v' = f(t, v) \\ v(\beta) = \overline{u} \end{cases} \tag{12}$$

dove $\overline{u} = u(\beta)$. Per il Teorema di Cauchy-Lipschitz, possiamo trovare un'unica soluzione $\tilde{u}$ di (12) definita su un intervallo $I_0 = [\beta - \delta, \beta + \delta]$ per un certo $\delta > 0$. Definisco ora

$$u_*(t) = \begin{cases} u(t) & \text{se } t \in I \\ \tilde{u}(t) & \text{se } t \in]\beta, \beta + \delta] \end{cases}$$

Tale funzione è derivabile nel suo dominio ed è un prolungamento della funzione u, ottenendo una contraddizione con l'ipotesi che u sia massimale.

In modo analogo si prova che non può essere $\inf I > -\infty$ ed esistere $\alpha := \min I$. □

Teorema 2.19. *Data $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ continua e localmente Lipschitziana rispetto alla seconda variabile, ogni problema di Cauchy* (PC)*, ammette una soluzione massimale definita su un intervallo $]\alpha, \beta[$ con $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$.*

Dimostrazione. Definiamo l'insieme $\mathcal{S}$ delle soluzioni di (PC). Data una soluzione $u \in \mathcal{S}$ denotiamo con I_u il suo dominio. Definiamo l'insieme

$$I_* = \bigcup_{u \in \mathcal{S}} I_u \tag{13}$$

e definiamo la funzione $u_* : I_* \to \mathbb{R}^N$ nel modo seguente: per ogni $t \in I^*$ esiste una $v \in \mathcal{S}$ tale che $t \in I_v$ da cui poniamo $u_*(t) = v(t)$. Grazie all'unicità garantita dal Teorema di Cauchy-Lipschitz la definizione di u_* è ben posta in quanto non dipende dalla funzione $v \in \mathcal{S}$ scelta. Infatti se avessimo due funzioni $v_1, v_2 \in \mathcal{S}$, tali che $t \in I_{v_1} \cap I_{v_2}$ allora varrebbe $v_1 = v_2$ su tutto l'insieme intersezione e quindi in particolare troveremmo $u_*(t) = v_1(t) = v_2(t)$ grazie alla Proposizione 2.16.

Mostriamo ora che la funzione u_* così definita è una soluzione massimale di (PC). Il fatto che sia una soluzione di (PC) segue dalla costruzione. Supponiamo che esista un prolungamento $\tilde{u} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^N$ della soluzione u_*. Allora vale $I_* \subsetneq \tilde{I}$ e $\tilde{u} \in S$. Troviamo però immediatamente la contraddizione $\tilde{I} \subseteq I_*$ dalla definizione di I_* in (13). □

Il seguente lemma sarà fondamentale nella dimostrazione del teorema successivo.

Lemma 2.20. *Data $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ continua e localmente Lipschitziana rispetto alla seconda variabile, consideriamo una soluzione $u :]a, b[\to \mathbb{R}^N$ del problema di Cauchy* (PC)*. Supponiamo che esista una successione $(t_n)_n \subset]t_0, b[$ tale che $\lim_n t_n = b$ e $\lim_n u(t_n) = \overline{u}$ per qualche valore $\overline{u} \in \mathbb{R}^N$ tale che $(b, \overline{u}) \in \Omega$.*

Allora la soluzione u è prolungabile sull'intervallo $]a, b]$.

Naturalmente il precedente lemma si può formulare nella forma simmetrica seguente e la dimostrazione sarà analoga.

Lemma 2.21. *Data $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ continua e localmente Lipschitziana rispetto alla seconda variabile, consideriamo una soluzione $u :]a, b[\to \mathbb{R}^N$ del problema di Cauchy* (PC)*. Supponiamo che esista una successione $(t_n)_n \subset]a, t_0[$ tale che $\lim_n t_n = a$ e $\lim_n u(t_n) = \overline{u}$ per qualche valore $\overline{u} \in \mathbb{R}^N$ tale che $(a, \overline{u}) \in \Omega$.*

Allora la soluzione u è prolungabile sull'intervallo $[a, b[$.

Dimostrazione del Lemma 2.20. Mostreremo che la funzione

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) & \text{se } t < b \\ \overline{u} & \text{se } t = b \end{cases}$$

è un prolungamento di u. Usando la scrittura

$$u(t_n) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t_n} f(s, u(s))\, ds$$

e passando al limite $n \to +\infty$ troviamo

$$\tilde{u}(\beta) = u(t_0) + \int_{t_0}^{\beta} f(s, u(s))\, ds$$

da cui deduciamo che vale l'identità

$$\tilde{u}(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, \tilde{u}(s))\, ds\,, \qquad \text{per ogni } t \in]a, b]\,.$$

Ricordando la Proposizione 2.3, per concludere la dimostrazione è sufficiente dimostrare la continuità della funzione $\tilde{u}$, in particolare la continuità per $t = b$. Quindi dobbiamo mostrare che $\lim_{t \to b^-} \tilde{u}(t) = \overline{u}$.

Possiamo fissare dei valori $r_1, r_2 > 0$ tali che il compatto $K := [b - r_1, b + r_1] \times \overline{B}_{r_2}(\overline{u})$ sia contenuto in Ω. Quindi consideriamo $M = \max\{\|f(t, u)\| : (t, u) \in K\}$.

Fissiamo ora $\epsilon > 0$ tale che $\epsilon < \min\{r_2, 4Mr_1\}$ e troviamo $\bar{n}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ valgono

$$b - t_n < \frac{\epsilon}{4M} < r_1\,, \qquad \|u(t_n) - \overline{u}\| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{14}$$

Mostreremo ora che

$$t \in [t_{\bar{n}}, b[\quad \Rightarrow \quad \|u(t) - u(t_{\bar{n}})\| < \frac{\epsilon}{2}\,. \tag{15}$$

Supponiamo per assurdo che l'insieme

$$E = \{t \in]t_{\bar{n}}, b[\, : \, \|u(t) - u(t_{\bar{n}})\| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$$

non sia vuoto e consideriamo $\tau := \inf E$. Dalla continuità di u deduciamo che vale $\|u(\tau) - u(t_{\bar{n}})\| = \frac{\epsilon}{2}$ e anche $\tau > t_{\bar{n}}$. Inoltre abbiamo

$$s \in [t_{\bar{n}}, \tau[\quad \Rightarrow \quad \|u(s) - u(t_{\bar{n}})\| < \frac{\epsilon}{2} \quad \Rightarrow \quad (s, u(s)) \in K\,.$$

Quindi essendo

$$u(\tau) = u(t_{\bar{n}}) + \int_{t_{\bar{n}}}^{\tau} f(s, u(s))\, ds$$

otteniamo

$$\frac{\epsilon}{2} = \|u(\tau) - u(t_{\bar{n}})\| \leq \int_{t_{\bar{n}}}^{\tau} \|f(s, u(s))\|\, ds \leq M|\tau - t_{\bar{n}}| \leq M(b - t_{\bar{n}}) < M\frac{\epsilon}{4M} = \frac{\epsilon}{4}\,,$$

una contraddizione che ci porta alla validità di (15).

La dimostrazione si conclude osservando che, usando (14) e (15), vale per ogni $t \in [t_{\bar{n}}, b[$

$$\|u(t) - \overline{u}\| \leq \|u(t) - u(t_{\bar{n}})\| + \|u(t_{\bar{n}}) - \overline{u}\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,.$$

Abbiamo dimostrato che per ogni $\epsilon > 0$ esiste τ tale che per ogni $t \in [\tau, b[$ vale $\|u(t) - \overline{u}\| < \epsilon$, da cui la tesi. □

Teorema 2.22 (Uscita dal compatto)**.** *Data $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ continua e localmente Lipschitziana rispetto alla seconda variabile, consideriamo una soluzione massimale $u :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^N$ del problema di Cauchy* (PC).

Allora per ogni compatto $K \subset \Omega$ contenente (t_0, u_0) esistono due valori a, b tali che $a < t_0 < b$ con la seguente proprietà: $(t, u(t)) \notin K$ per ogni $t \in]\alpha, a[\cup]b, \beta[$.

Dimostrazione. Scriviamo la dimostrazione dell'esistenza del valore b. Per esercizio scrivere anche la dimostrazione speculare per il valore a. Se $\beta = +\infty$, data la continuità dell'applicazione $\mathcal{P} : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $\mathcal{P}(t, u) = t$, deduciamo immediatamente che per ogni compatto K basta porre $b = \max_K \mathcal{P}$.

Consideriamo quindi il caso $\beta \in \mathbb{R}$ e ragioniamo per assurdo: supponiamo esista un compatto $K \subset \Omega$ e una successione crescente $(t_n)_n \subset]t_0, \beta[$ tale che $\lim_n t_n = \beta$ e $(t_n, u(t_n)) \in K$ per ogni n. Dalla compattezza di K esiste una sottosuccessione $(t_{n_k})_{n_k}$ tale che $\lim_k (t_{n_k}, u(t_{n_k})) = (\beta, \overline{u}) \in K$ per un certo $\overline{u} \in \mathbb{R}^N$. Usando il Lemma 2.20, la soluzione massimale è prolungabile all'intervallo $]\alpha, \beta]$ ottenendo un assurdo. □

2.4 Esistenza globale e dipendenza continua dai dati iniziali

Il prossimo esempio fornisce un problema di Cauchy definito per una funzione $f : \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in cui la soluzione non ha intervallo massimale di esistenza $I = \mathbb{R}$.

Esempio 2.23. *Il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = a^{-1} \quad a > 0 \end{cases}$$

ammette soluzione $x(t) = -(t - a)^{-1}$ che è definita su $I =]-\infty, a[$, e vale $\lim_{t \to a^-} x(t) = +\infty$.

In quanto segue è nostro obiettivo dare condizioni su f affinché si abbia che l'intervallo massimale di esistenza sia sempre *il più grande possibile*. Abbiamo dapprima bisogno di un lemma preliminare.

Lemma 2.24 (Lemma di Gronwall)**.** *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo non banale e una funzione $u : I \to \mathbb{R}$ continua, con $\nu(t) \geq 0$ per ogni $t \in I$. Dato $t_0 \in I$, supponiamo esistano due costanti $A, B > 0$ tali che*

$$0 \leq \nu(t) \leq A + B\left|\int_{t_0}^{t} \nu(s)\, ds\right|\,, \qquad \textit{per ogni } t \in I\,. \tag{16}$$

Allora vale

$$0 \leq \nu(t) \leq A\mathrm{e}^{B|t - t_0|}\,, \qquad \textit{per ogni } t \in I\,.$$

Dimostrazione - Prima versione. Focalizziamo dapprima la nostra attenzione sull'intervallo $I^+ = I \cap [t_0, +\infty[$. Per ogni scelta di $\varepsilon > 0$, definiamo la funzione $\phi_\varepsilon : I^+ \to \mathbb{R}$ come

$$\phi_\varepsilon(t) = A + B \int_{t_0}^{t} \nu(s)\, ds + \varepsilon > \nu(t) \geq 0\,.$$

Abbiamo che $\phi'_\varepsilon(t) = B\nu(t) < B\phi_\varepsilon(t)$ per ogni $t \in I^+$. Quindi

$$\frac{d}{dt}\left(\log \phi_\varepsilon(t)\right) = \frac{\phi'_\varepsilon(t)}{\phi_\varepsilon(t)} < B\,, \qquad \text{per ogni } t \in I^+\,,$$

da cui

$$\begin{aligned}
&\log(\phi_\varepsilon(t)) - \log(A+\varepsilon) = \log(\phi_\varepsilon(t)) - \log(\phi_\varepsilon(t_0)) \leq B(t - t_0) \\
&\Rightarrow \log(\phi_\varepsilon(t)) \leq \log(A+\varepsilon) + B(t-t_0) \\
&\quad \Rightarrow \nu(t) \leq \phi_\varepsilon(t) \leq (A+\varepsilon)\mathrm{e}^{B(t-t_0)}\,,
\end{aligned}$$

per ogni $t \in I^+$. Tale stima vale per ogni scelta di $\varepsilon > 0$, quindi ne consegue che

$$\nu(t) \leq A\mathrm{e}^{B(t-t_0)}\,, \qquad \text{per ogni } t \in I^+\,.$$

Vediamo ora cosa succede nell'intervallo $I^- = I \cap\,]-\infty, t_0]$. In questo caso definiamo $\psi_\varepsilon : I^- \to \mathbb{R}$ come

$$\psi_\varepsilon(t) = A - B \int_{t_0}^{t} u(s)\, ds + \varepsilon = A + B \left| \int_{t_0}^{t} \nu(s)\, ds \right| + \varepsilon > \nu(t) \geq 0\,,$$

che invece soddisfa $\psi'_\varepsilon(t) = -B\nu(t) > -B\psi_\varepsilon(t)$ e quindi $\frac{d}{dt}\left(\log \psi_\varepsilon(t)\right) > -B$ per ogni $t \in I^-$. La stima ora diventa:

$$\begin{aligned}
&\log(A+\varepsilon) - \log(\psi_\varepsilon(t)) = \log(\psi_\varepsilon(t_0)) - \log(\psi_\varepsilon(t)) \geq -B(t_0 - t) = -B|t - t_0| \\
&\Rightarrow \log(\psi_\varepsilon(t)) \leq \log(A+\varepsilon) + B|t-t_0| \\
&\quad \Rightarrow \nu(t) \leq \psi_\varepsilon(t) \leq (A+\varepsilon)\mathrm{e}^{B|t-t_0|}\,,
\end{aligned}$$

da cui si arriva alla conclusione in maniera simile al primo caso.

Vediamo ora un possibile approccio alternativo alla seconda parte della dimostrazione. Possiamo considerare l'intervallo $J = \{\tau = 2t_0 - t \in \mathbb{R} : t \in I\}$ e la funzione $w(\tau) = \nu(2t_0 - \tau)$. Se $\tau \in J \cap [t_0, +\infty[$ allora $t = 2t_0 - \tau \in I \cap\,]-\infty, t_0]$ e vale

$$\begin{aligned}
w(\tau) = \nu(2t_0 - \tau) \leq A + B \left| \int_{t_0}^{2t_0 - \tau} \nu(s)\, ds \right| &= A + B \int_{2t_0-\tau}^{t_0} \nu(s)\, ds \\
&= A + B \int_{\tau}^{t_0} \nu(2t_0 - \sigma)\, d\sigma = A + B \int_{\tau}^{t_0} w(\sigma)\, d\sigma\,.
\end{aligned}$$

Possiamo quindi applicare la stima del lemma alla funzione w nell'intervallo $J \cap [t_0, +\infty[$ in quanto questa parte della dimostrazione è già stata provata e ottenere quindi

$$w(\tau) \leq A\mathrm{e}^{B(\tau - t_0)}\,, \quad \text{per ogni } \tau \in J \cap [t_0, +\infty[$$

da cui segue

$$\nu(t) = w(2t_0 - t) \leq A\mathrm{e}^{B((2t_0 - t) - t_0)} = A\mathrm{e}^{B(t_0 - t)} = A\mathrm{e}^{B|t-t_0|} \quad \text{per ogni } t \in I \cap\,]-\infty, t_0]\,,$$

che conclude la dimostrazione. □

Dimostrazione - Seconda versione. Questa versione della dimostrazione è stata proposta durante il corso A.A. 2023/2024 da una coppia di studenti: Francesco Meccariello e Antonello Meccariello. Anche in questo caso consideriamo $I^+ = I \cap [t_0, +\infty[$. Moltiplicando la (16) per e^{-Bt} otteniamo portando tutto al memdro sinistro

$$\nu(t)\mathrm{e}^{-Bt} - A\mathrm{e}^{-Bt} - B\mathrm{e}^{-Bt} \int_{t_0}^{t} \nu(s)\, ds \leq 0\,, \qquad \text{per ogni } t \in I^+\,.$$

La precedente equivale ad affermare che

$$\frac{d}{dt}F(t) \le 0 \quad \text{per ogni } t \in I^+\,, \quad \text{dove } F(t) = \mathrm{e}^{-Bt}\left[\frac{A}{B} + \int_{t_0}^{t} \nu(s)\,ds\right].$$

Ne consegue che la funzione F è decrescente (in senso lato) su I^+ cosicché abbiamo, per ogni $t \in I^+$,

$$\mathrm{e}^{-Bt}\left[\frac{A}{B} + \int_{t_0}^{t} \nu(s)\,ds\right] = F(t) \le F(t_0) = \frac{A}{B}\mathrm{e}^{-Bt_0}$$

da cui otteniamo, moltiplicando per $B\mathrm{e}^{Bt}$,

$$A + B\int_{t_0}^{t} \nu(s)\,ds \le A\mathrm{e}^{B(t-t_0)} \qquad \text{per ogni } t \in I^+$$

da cui segue

$$\nu(t) \le A + B\int_{t_0}^{t} \nu(s)\,ds \le A\mathrm{e}^{B(t-t_0)} \qquad \text{per ogni } t \in I^+\,.$$

La dimostrazione per l'intervallo $I^- = I\cap\,]-\infty, t_0]$ si può ottenere in modo analogo utilizzando il cambio di variabile $\tau = 2t_0 - t$ come nella parte finale della precedente versione della dimostrazione oppure mediante il seguente argomento. Sempre dalla (16) per $t \in I^-$ possiamo scrivere, dopo aver moltiplicato per e^{Bt},

$$\nu(t)\mathrm{e}^{Bt} - A\mathrm{e}^{Bt} + B\mathrm{e}^{Bt}\int_{t_0}^{t} \nu(s)\,ds \le 0\,, \qquad \text{per ogni } t \in I^-\,.$$

La precedente equivale ad affermare che

$$\frac{d}{dt}G(t) \le 0 \quad \text{per ogni } t \in I^-\,, \quad \text{dove } G(t) = \mathrm{e}^{Bt}\left[-\frac{A}{B} + \int_{t_0}^{t} \nu(s)\,ds\right].$$

Ne consegue che la funzione G è decrescente (in senso lato) su I^- cosicché abbiamo, per ogni $t \in I^-$,

$$\mathrm{e}^{Bt}\left[-\frac{A}{B} + \int_{t_0}^{t} \nu(s)\,ds\right] = F(t) \ge F(t_0) = -\frac{A}{B}\mathrm{e}^{Bt_0}$$

da cui otteniamo, moltiplicando per $-B\mathrm{e}^{-Bt}$,

$$A - B\int_{t_0}^{t} \nu(s)\,ds \le A\mathrm{e}^{B(t_0-t)} \qquad \text{per ogni } t \in I^-$$

da cui segue

$$\nu(t) \le A - B\int_{t_0}^{t} \nu(s)\,ds \le A\mathrm{e}^{B(t_0-t)} = A\mathrm{e}^{B|t-t_0|} \qquad \text{per ogni } t \in I^-\,.$$

La dimostrazione è anche in questo caso conclusa. □

Teorema 2.25 (Esitenza globale). *Consideriamo il problema di Cauchy* (PC)*, in cui la funzione* $f : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *è continua e localmente Lipschitziana rispetto alla seconda variabile con la seguente proprietà: esiste una funzione continua non negativa* $\ell : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ *tale che*

$$\|f(t,u)\| \le \ell(t)(1 + \|u\|)\,, \qquad \textit{per ogni } (t,u) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^N\,.$$

Allora, la soluzione massimale di (PC) *è definita su tutto l'intervallo* $\mathcal{I}$.

Dimostrazione. Consideriamo gli intervalli dell'enunciato in questa forma: $\mathcal{I} =]a, b[\supseteq I =]\alpha, \beta[$, dove I è l'intervallo su cui è definita la soluzione massimale u del problema di Cauchy. Scopo della dimostrazione è dimostrare che $I = \mathcal{I}$. Supponiamo per assurdo che $\beta < b$ (e in particolare abbiamo $\beta \in \mathbb{R}$). Consideriamo l'insieme compatto $[t_0, \beta] \subseteq I$. La soluzione u soddisfa

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\,ds\,, \qquad \text{per ogni } t \in [t_0, \beta[\,.$$

Segue che, posto $\overline{\ell} = \max_{[t_0,\beta]} \ell$, troviamo che per ogni $t \in [t_0, \beta[$

$$\|u(t)\| \leq \|u(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|f(s, u(s))\| \, ds \leq \|u(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \overline{\ell}(1 + \|u(s)\|) \, ds \,.$$

Ponendo $A = \|u(t_0)\| + \overline{\ell}(\beta - t_0)$, $B = \overline{\ell}$ e infine $\nu(s) = \|u(s)\|$ notiamo che vale

$$\nu(t) \leq A + B \int_{t_0}^{t} \nu(s) \, ds \,, \qquad \text{per ogni } t \in [t_0, \beta[\,.$$

che ci permette di applicare il Lemma 2.24. Otteniamo

$$\nu(t) = \|u(t)\| \leq A\mathrm{e}^{B(t-t_0)} \leq A\mathrm{e}^{B(\beta-t_0)} \,, \qquad \text{per ogni } t \in [t_0, \beta[\,.$$

Posto $R := A\mathrm{e}^{B(\beta-t_0)}$, troviamo quindi che $\|u(t)\| \leq R$ per ogni $t \in [t_0, \beta[$ e quindi

$$(t, u(t)) \in K := [t_0, \beta] \times \overline{B}_R(0)$$

che è un compatto. Allora la soluzione massimale contraddice il teorema di uscita dal compatto. Di conseguenza non possiamo avere $\beta < b$. Ipotizzare che valga $\alpha > a$ porta similmente ad un assurdo (completare per esercizio questa parte della dimostrazione). Segue la tesi. □

Possiamo riscrivere il seguente enunciato anche nel modo seguente.

Teorema 2.26. *Consideriamo il problema di Cauchy* (PC)*, in cui la funzione $f : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ è continua e localmente Lipschitziana rispetto alla seconda variabile con la seguente proprietà: per ogni compatto $\mathcal{K} \subset \mathcal{I}$ esiste una costante $A > 0$ tale che*

$$\|f(t, u)\| \leq A(1 + \|u\|) \,, \qquad \textit{per ogni } (t, u) \in \mathcal{K} \times \mathbb{R}^N \,.$$

Allora, la soluzione massimale di (PC) *è definita su tutto l'intervallo $\mathcal{I}$.*

Quest'ultimo teorema è conseguenza del precedente, infatti dato il compatto $\mathcal{K}$ è sufficiente porre $A = \max_K \ell$. Con uno sforzo maggiore è possibile dimostrare che in realtà i due enunciati sono equivalenti. Lo studente volonteroso può cimentarsi in questa sfida.

Teorema 2.27 (Dipendenza continua dai dati)**.** *Consideriamo il problema di Cauchy* (PC)*, in cui la funzione $f : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ è continua e localmente Lipschitziana rispetto alla seconda variabile con la seguente proprietà: esiste una funzione continua non negativa $\ell : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\|f(t, u)\| \leq \ell(t)(1 + \|u\|) \,, \qquad \textit{per ogni } (t, u) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^N \,.$$

Sia $u : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^N$ la soluzione massimale di (PC)*.*

Fissiamo un intervallo compatto $[a, b] \subset \mathcal{I}$ contenente t_0. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che se il punto $(\tilde{t}_0, \tilde{u}_0) \in [a, b] \times \mathbb{R}^N$, e la funzione continua $\tilde{f} : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ soddisfano

$$|\tilde{t}_0 - t_0| < \delta \,, \qquad \|\tilde{u}_0 - u_0\| < \delta \,, \qquad \|\tilde{f} - f\|_\infty < \delta \,, \tag{17}$$

allora ogni soluzione $\tilde{u} : J \to \mathbb{R}^N$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \tilde{f}(t, u) \\ u(\tilde{t}_0) = \tilde{u}_0 \end{cases} \tag{18}$$

è tale che

$$\|\tilde{u}(t) - u(t)\| < \varepsilon \,, \qquad \textit{per ogni } t \in [a, b] \cap J \,.$$

Osservazione 2.28. *Nel precedente enunciato con $\|h\|_\infty$ intendiamo $\|h\|_\infty = \sup\{\|h(t, u)\| \,:\, (t, u) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^N\}$. Inoltre chiediamo per $\tilde{f}$ la sola continuità, quindi il problema di Cauchy* (18) *può avere più soluzioni e la parte di teoria sui prolungamenti non è applicabile. Per questo motivo si deve considerare il dominio $J \subset \mathcal{I}$ della soluzione $\tilde{u}$ nella stima alla fine dell'enunciato. Se però aggiungiamo l'ipotesi che $\tilde{f}$ sia localmente Lipschitziana nella seconda variabile, seguendo la dimostrazione, si può dimostrare che le soluzioni massimali di* (18) *sono definite su tutto l'intervallo $\mathcal{I}$, in quanto, come si vede dalla* (19) *poco sotto, anche $\tilde{f}$ è a crescita al massimo lineare e per essa si applica il Teorema 2.25. In questo caso la tesi diventa $\|\tilde{u}(t) - u(t)\| < \varepsilon$, per ogni $t \in [a, b]$.*

Dimostrazione del Teorema 2.27. Senza perdere in generalità porremo $\delta < 1$. Dalla (17), ponendo $\tilde{\ell}(t) = \ell(t)+1$ otteniamo

$$\|\tilde{f}(t,u)\| \leq \tilde{\ell}(t)(1+\|u\|)\,, \qquad \text{per ogni } (t,u) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^N\,. \tag{19}$$

A questo punto possiamo ripercorrere la dimostrazione del Teorema 2.25 e calcolare, per ogni $t \in [a,b] \cap J$,

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}(t)\| &\leq \|\tilde{u}_0\| + \left|\int_{\tilde{t}_0}^t \|\tilde{f}(s,\tilde{u}(s))\|\,ds\right| \leq (\|u_0\|+1) + \left|\int_{\tilde{t}_0}^t \bar{\ell}(1+\|\tilde{u}(s)\|)\,ds\right| \\ &\leq \big[(\|u_0\|+1) + \bar{\ell}(b-a)\big] + \bar{\ell}\left|\int_{\tilde{t}_0}^t \|\tilde{u}(s)\|\,ds\right|\,,\end{aligned}$$

dove ora $\bar{\ell} = \max_{[a,b]} \tilde{\ell}$. Applicando il Lemma di Gronwall con $\nu(t) = \|\tilde{u}(t)\|$ otteniamo

$$\|\tilde{u}(t)\| \leq R := \big[(\|u_0\|+1) + \bar{\ell}(b-a)\big]\,\mathrm{e}^{\bar{\ell}(b-a)}\,, \quad \text{per ogni } t \in [a,b] \cap J\,.$$

Verificare che la stima vale anche per la soluzione u in tutto l'intervallo $[a,b]$.

A questo punto fissiamo il compatto $K = [a,b] \times \overline{B}_R(0)$ e consideriamo la costante di Lipschitz L_K associata a f e il valore $M = \max\{\|f(t,u)\| \,:\, (t,u) \in K\}$. Notiamo facilmente che vale $\max\{\|\tilde{f}(t,u)\| \,:\, (t,u) \in K\} \leq M+1$ avendo imposto preliminarmente $\delta < 1$.

A questo punto possiamo scrivere

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s,u(s))\,ds\,, \qquad \tilde{u}(t) = \tilde{u}_0 + \int_{\tilde{t}_0}^t \tilde{f}(s,\tilde{u}(s))\,ds\,,$$

e calcolare, per ogni $t \in [a,b] \cap J$,

$$\begin{aligned}u(t) - \tilde{u}(t) &= u_0 - \tilde{u}_0 + \int_{\tilde{t}_0}^t f(s,u(s)) - \tilde{f}(s,\tilde{u}(s))\,ds + \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} f(s,u(s))\,ds \\ &= u_0 - \tilde{u}_0 + \int_{\tilde{t}_0}^t f(s,u(s)) - f(s,\tilde{u}(s))\,ds + \int_{\tilde{t}_0}^t f(s,\tilde{u}(s)) - \tilde{f}(s,\tilde{u}(s))\,ds + \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} f(s,u(s))\,ds\,.\end{aligned}$$

Passando alle norme otteniamo, per ogni $t \in [a,b] \cap J$,

$$\begin{aligned}\|u(t) - \tilde{u}(t)\| &\leq \|u_0 - \tilde{u}_0\| + \left|\int_{\tilde{t}_0}^t \|f(s,u(s)) - f(s,\tilde{u}(s))\|\,ds\right| \\ &\qquad + \left|\int_{\tilde{t}_0}^t \|f(s,\tilde{u}(s)) - \tilde{f}(s,\tilde{u}(s))\|\,ds\right| + \left|\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|f(s,u(s))\|\,ds\right| \\ &\leq \delta + \left|\int_{\tilde{t}_0}^t L_K \|u(s) - \tilde{u}(s)\|\,ds\right| + \delta|t - \tilde{t}_0| + M|t_0 - \tilde{t}_0| \\ &\leq \delta\,[1 + (b-a) + M] + L_K \left|\int_{\tilde{t}_0}^t \|u(s) - \tilde{u}(s)\|\,ds\right|\,.\end{aligned}$$

Ponendo $\nu(t) = \|u(t) - \tilde{u}(t)\|$, $A = \delta\,[1 + (b-a) + M]$ e $B = L_K$ è possibile applicare il Lemma di Gronwall e ottenere

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leq A\mathrm{e}^{B|t-\tilde{t}_0|} \leq \delta C\,, \qquad C := [1 + (b-a) + M]\,\mathrm{e}^{L_K(b-a)}\,.$$

A questo punto per ogni $\varepsilon > 0$ è sufficiente prendere $\delta < 1$ tale che si abbia $\delta C < \varepsilon$. $\square$

Il teorema precedente può essere riscritto in forma più generale come segue.

Teorema 2.29. *Consideriamo il problema di Cauchy* (PC)*, in cui la funzione* $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *è continua e localmente Lipschitziana rispetto alla seconda variabile. Sia* $u :]\alpha,\beta[\to \mathbb{R}^N$ *la soluzione massimale di* (PC)*.*

Fissiamo un intervallo compatto $[a,b] \subset]\alpha,\beta[$ *contenente* t_0*. Per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un* $\delta > 0$ *tale che se il punto* $(\tilde{t}_0, \tilde{u}_0) \in I \times \mathbb{R}^N$*, e la funzione continua* $\tilde{f} : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *soddisfano*

$$|\tilde{t}_0 - t_0| < \delta\,, \qquad \|\tilde{u}_0 - u_0\| < \delta\,, \qquad \|\tilde{f} - f\|_\infty < \delta\,,$$

allora ogni soluzione $\tilde{u} : J \to \mathbb{R}^N$ *del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u' = \tilde{f}(t, u) \\ u(\tilde{t}_0) = \tilde{u}_0 \end{cases}$$

è tale che

$$\|\tilde{u}(t) - u(t)\| < \varepsilon\,, \qquad \text{per ogni } t \in [a, b] \cap J\,.$$

3 Particolari classi di equazioni differenziali scalari

3.1 Equazioni lineari del primo ordine

Consideriamo un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ aperto, $a : I \to \mathbb{R}$, $b : I \to \mathbb{R}$, entrambe funzioni continue, e l'equazione differenziale

$$x' = a(t)x + b(t)\,, \tag{20}$$

di cui cerchiamo una soluzione $x : I \to \mathbb{R}$.

Osserviamo innanzitutto che per essa vale il teorema di esistenza globale (Teorema 2.25). Consideriamo A una primitiva di a e B una primitiva della funzione $h(t) = \mathrm{e}^{-A(t)}b(t)$ definite sull'intervallo I. Definiamo, fissata una costante $c \in \mathbb{R}$, la funzione

$$x(t) = \mathrm{e}^{A(t)}\,[B(t) + c] \qquad \text{per ogni } t \in I. \tag{21}$$

Proposizione 3.1. *La funzione x definita in* (21) *risolve* (20) *per ogni scelta di $c \in \mathbb{R}$. Inoltre, se x è soluzione dell'equazione* (20) *allora essa necessariamente è definita come in* (21) *per una certa costante $c \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Consideriamo una soluzione di (20). Moltiplichiamo la (20) per $\mathrm{e}^{-A(t)}$ e otteniamo

$$\begin{aligned} x'(t)\mathrm{e}^{-A(t)} &= a(t)x(t)\mathrm{e}^{-A(t)} + b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}\,, \\ \iff \mathrm{e}^{-A(t)}\,[x'(t) - a(t)x(t)] &= b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}\,, \\ \iff \frac{d}{dt}\left[\mathrm{e}^{-A(t)}x(t)\right] &= b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}\,. \end{aligned}$$

Quindi le primitive differiscono per una costante $c \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{-A(t)}x(t) = B(t) + c$$

da cui troviamo x come in (21). La prima parte dell'enunciato si dimostra con un semplice calcolo. $\square$

Definizione 3.2. *Si dice integrale generale di una equazione differenziale ordinaria l'insieme di tutte le sue soluzioni.*

Esempio 3.3. *Trovare l'integrale generale di*

$$x' = f(t, x) = \frac{x}{t} + 3t^3\,. \tag{22}$$

Osserviamo innanzitutto che $f : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Distingueremo i casi $t < 0$ e $t > 0$. Per $t < 0$ abbiamo $A(t) = \log(-t)$, quindi $\mathrm{e}^{A(t)} = -t$ e $\mathrm{e}^{-A(t)}b(t) = -3t^2$ da cui $B(t) = -t^3$. Troviamo quindi la soluzione:

$$\tilde{x}(t) = \mathrm{e}^{A(t)}[B(t) + c] = -t(-t^3 + c) = t^4 - ct\,.$$

Per $t > 0$ abbiamo $A(t) = \log(t)$, quindi $\mathrm{e}^{A(t)} = t$ e $\mathrm{e}^{-A(t)}b(t) = 3t^2$ da cui $B(t) = t^3$. Troviamo quindi la soluzione:

$$\hat{x}(t) = \mathrm{e}^{A(t)}[B(t) + c] = t(t^3 + d) = t^4 + dt\,.$$

Se poniamo $c = -d$ non notiamo differenza tra le due espressioni. Notiamo che in entrambi i casi le funzioni hanno dominio $\mathbb{R}$ tuttavia non è corretto affermare che esse sono soluzioni di (22) *su $\mathbb{R}$, infatti la funzione f che definisce l'equazione differenziale* (22) *non è definita in zero e quindi una sua soluzione non può* scavalcare *questo valore. In particolare, dato un problema di Cauchy con condizione iniziale $x(t_0) = x_0$ ($t_0 \neq 0$!), la soluzione del problema di Cauchy $x(t) = t^4 - ct$ sarà definita con dominio $]-\infty, 0[$ se $t_0 < 0$. Viceversa, se $t_0 > 0$ sarà definita con dominio $]0, +\infty[$.*

Esercizio 3.4. *Trova il valore della costante $c \in \mathbb{R}$ dell'esempio precedente al variare di $t_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.*

3.2 Equazione di Bernoulli

Prima di introdurre la prossima classe di equazioni differenziali, ricordiamo che la funzione $p(x) = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ è definita per $x > 0$ (con la possibilità di includere nel dominio il valore $x = 0$ se $\alpha > 0$). Questa funzione può essere estesa nei valori negativi in modo pari definendo la funzione $\tilde{p}(x) = |x|^\alpha$ oppure in modo dispari definendo la funzione $\hat{p}(x) = x|x|^{\alpha-1}$. A volte, nel caso si abbia $\alpha \in \mathbb{Q}$ la scelta di come definire la funzione nei negativi è in un certo senso canonica (si pensi al semplice caso $\alpha \in \mathbb{N}$). In quanto segue concentreremo la sola trattazione teorica all'insieme $x > 0$.

Consideriamo un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ aperto, $a : I \to \mathbb{R}$, $b : I \to \mathbb{R}$, entrambe funzioni continue, e l'equazione differenziale

$$x' = a(t)x + b(t)x^\alpha\,, \tag{23}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq 0, 1$. Non si considerano i casi $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$ perché portano immediatamente ad equazioni lineari del primo ordine, già viste. Inoltre notiamo che se $\alpha > 0$ la funzione costante $x \equiv 0$ risolve (23).

Per risolvere l'*equazione di Bernoulli* (23) si segue la seguente procedura. Consideriamo una soluzione $x : J \to \mathbb{R}$ positiva (o negativa). Possiamo dividere l'equazione per x^α e sostituire $z = x^{1-\alpha}$.

$$\begin{gathered}
[x(t)]^{-\alpha}x'(t) = a(t)[x(t)]^{1-\alpha} + b(t) \\
\Rightarrow z'(t) = (1-\alpha)[x(t)]^{-\alpha}x'(t) = (1-\alpha)a(t)z(t) + (1-\alpha)b(t)\,.
\end{gathered}$$

Abbiamo ottenuto che la funzione z risolve un'equazione differenziale ordinaria lineare del primo ordine di cui siamo in grado di trovare tutte le soluzioni. Quindi le soluzioni di (23) si ottengono risolvendo l'equazione differenziale lineare in z e usando la sostituzione $z = x^{1-\alpha}$. Naturalmente il ragionamento precedente vale finché la soluzione z rimane positiva (o negativa). Inoltre, il cambio di variabile deve essere effettuato con la dovuta attenzione, come illustrato nei seguenti esempi.

Esempio 3.5. *Cerchiamo le soluzioni di*

$$x' = 2t\sqrt{x}(t^2 + \sqrt{x})\,.$$

Osserviamo che $f(t,x) = 2t\sqrt{x}(t^2+\sqrt{x})$ è definita per $x \geq 0$. Inoltre possiamo riscrivere l'equazione differenziale in forma di equazione di Bernoulli come:

$$x' = 2tx + 2t^3\sqrt{x} \tag{24}$$

che ha la soluzione costante $x \equiv 0$. Supponiamo $x > 0$ in un certo intervallo e poniamo $z = \sqrt{x} > 0$, allora

$$z' = \frac{1}{2}\frac{x'}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\frac{2tx + 2t^3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = tz + t^3 \quad\Rightarrow\quad z' = tz + t^3\,, \tag{25}$$

che è una equazione differenziale del primo ordine con $a(t) = t$ e $b(t) = t^3$. Troviamo $A(t) = t^2/2$ e $B(t) = -\mathrm{e}^{-t^2/2}(t^2+2)$ (calcoli per esercizio). Quindi troviamo le soluzioni

$$z(t) = \mathrm{e}^{t^2/2}\left[-\mathrm{e}^{-t^2/2}(t^2+2) + c\right] = -(t^2+2) + c\,\mathrm{e}^{t^2/2}$$

Sia J l'insieme su cui la soluzione z è positiva. Solo su questo insieme possiamo percorrere a ritroso il cambio di variabile e sostituendo $z = \sqrt{x}$ trovare

$$x : J \to \mathbb{R}\,, \qquad x(t) = \left[-(t^2+2) + c\,\mathrm{e}^{t^2/2}\right]^2\,.$$

Notiamo che al bordo di J abbiamo per continuità $z(t) = 0$ e quindi ha senso porre $x(t) = 0$. Definendo su tutto l'insieme $\mathbb{R} \setminus J$ la funzione x come la costante nulla otteniamo

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad x(t) = \begin{cases} \left[-(t^2+2) + c\,\mathrm{e}^{t^2/2}\right]^2 & \text{se } t \in J \\ 0 & \text{se } t \notin J \end{cases}$$

che risolve l'equazione differenziale (24) in tutto il dominio. L'integrale generale dell'equazione differenziale è molto più complesso, in quanto manca l'unicità ai problemi di Cauchy: si noti che la funzione $f(t,x) =$

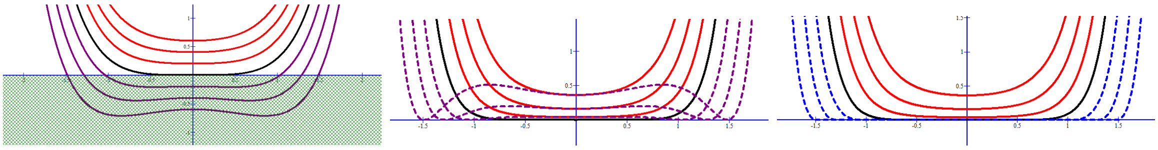

Figura 2: Esempio 3.5. A sinistra: le soluzioni z dell'equazione differenziale (25). In mezzo: un'errata interpretazione delle soluzioni dell'equazione di Bernoulli. A destra: la corretta interpretazione.

$2tx + 2t^3\sqrt{x}$ *non è Lipschitziana nella variabile x in un intorno di $x = 0$. La discussione seguente vuole fornire anche un'idea di come è fatto l'insieme delle soluzioni.*

L'equazione differenziale in (25) non avrebbe particolari restrizioni e le sue soluzioni si comportano come nella prima illustrazione in Figura 2. Tuttavia ad essa siamo giunti ipotizzando $x > 0$ (e quindi $z > 0$) in un certo intervallo. Ne consegue che dobbiamo focalizzare la nostra attenzione solo sulla parte di dominio delle soluzioni z in cui queste assumono valori positivi (si noti che in questo particolare esempio la disuguaglianza $z(t) > 0$ non è risolvibile algebricamente). Possiamo distinguere soluzioni sempre positive (in rosso) e soluzioni che cambiano segno (in viola). Inoltre c'è una soluzione, in nero, che si annulla in un solo punto. Quando sostituiamo $x = z^2$ dobbiamo stare attenti alla parte in cui z è negativa ed escluderla. Se ce ne dimentichiamo, elevando al quadrato otteniamo le funzioni x in viola tratteggiato nella seconda illustrazione di Figura 2 che si sovrappongono alle corrette soluzioni x in rosso. Notiamo che per $x > 0$ la (24) soddisfa le condizioni di Lipschitz e quindi vale il teorema di unicità. Entriamo quindi in contraddizione: se tutto fosse corretto così come disegnato nella seconda illustrazione, in prossimità del punto d'incontro tra una linea viola tratteggiata e una linea rossa avremmo una condizione iniziale il cui problema di Cauchy avrebbe due soluzioni distinte. Nell'ultima illustrazione di Figura 2 osserviamo le soluzioni x corrette. Le soluzioni in blu tratteggiato, positive per valori di t negativi, "atterrano" *sull'asse x dove non sono soddisfatte le condizioni di Lipschitz e quindi possiamo non avere unicità. Da qui in avanti restano costanti (con valore zero) oppure* "decidono" *di staccarsi dall'asse in un certo istante $t > 0$ percorrendo una delle linee tratteggiate blu sulla destra. Nulla vieta che* "decidano" *di restare sempre costanti per ogni valore di t positivo.*

A maggiore conferma di quanto sopra, sostituendo in (24) un valore $x > 0$ e un valore $t < 0$ troviamo $x' < 0$, quindi finché $t < 0$ una soluzione positiva non può essere crescente. Con ragionamento analogo non può essere decrescente per valori di $t > 0$ (sostituire stavolta $t > 0$ e $x > 0$). Questo invece accade nella seconda illustrazione di Figura 2 che appunto è sbagliata.

Esempio 3.6. *Consideriamo l'equazione di Bernoulli*

$$x'(t) = 2t(x + x^{-3})\,, \tag{26}$$

per la quale dobbiamo chiedere $x \neq 0$. Ponendo $z = x^4$ troviamo

$$z' = 4x^3x' = 4(2tx^4 + 2t) \Rightarrow z' = 8tz + 8t \tag{27}$$

che è una equazione differenziale lineare del primo ordine con $a(t) = b(t) = 8t$. Troviamo $A(t) = 4t^2$ e $B(t) = -\mathrm{e}^{-4t^2}$, cosicché le sue soluzioni sono

$$z(t) = \mathrm{e}^{4t^2}\left[-\mathrm{e}^{-4t^2} + c\right] = c\,\mathrm{e}^{4t^2} - 1$$

Ricordando di aver posto $x \neq 0$, essendo $z = x^4 > 0$ troviamo

$$x(t) = \pm\sqrt[4]{c\,\mathrm{e}^{4t^2} - 1}\,. \tag{28}$$

La soluzione è definita fintantoché l'argomento della radice resta positivo. Notiamo che nei punti in cui l'argomento si annulla la funzione non è derivabile. Se all'equazione differenziale (26) è associata una condizione iniziale del tipo $x(t_0) = x_0$ (con $x_0 \neq 0$!) allora sceglieremo in (28) il segno $+$ se $x_0 > 0$ e il segno $-$ se $x_0 < 0$, mentre il valore di c si otterrà risolvendo l'equazione $c\mathrm{e}^{4t_0^2} - 1 = x_0^4$.

In Figura 3 sono illustrate a sinistra le soluzioni dell'equazione differenziale lineare (27) di cui considereremo solo gli istanti con $z > 0$. In generale l'equazione (27) ammette soluzioni positive (in blu), una soluzione non negativa (in rosso), soluzioni che cambiano segno (in giallo) e soluzioni negative (in verde). Queste ultime non

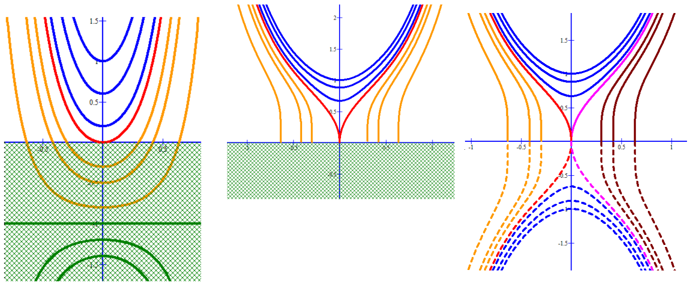

Figura 3: Esempio 3.6. A sinistra: le soluzioni z della e.d.o. (27). In mezzo: le soluzioni positive dell'equazione di Bernoulli. A destra: tutte le possibili soluzioni.

saranno nemmeno prese in considerazione quando torneremo a considerare la variabile x. Per quanto riguarda le soluzioni in giallo e quella in rosso, considereremo solo gli istanti in cui $z(t) > 0$. Nella figura in mezzo notiamo le soluzioni di (26) con dato iniziale $x(t_0) = x_0 > 0$. Esse sono definite su semirette (la curva in rosso va separata in due soluzioni distinte) e presentano punti di non derivabilità sulla frontiera del dominio. Nell'illustrazione a destra, inseriamo tratteggiate le soluzioni con dato iniziale $x(t_0) = x_0 < 0$. Osserviamo che per $c > 1$ la soluzione (in blu) è definita su tutto l'asse reale.

Esercizio 3.7. *Scrivere (e specificarne chiaramente l'intervallo massimale di esistenza) le soluzioni di* (26) *aventi dati iniziali*

$$x(0) = 1\,; x(0) = -1\,;$$

$$x(-1) = 1\,; x(1) = 1\,; x(-1) = -1\,; x(1) = -1\,;$$

$$x\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\log 5}\right) = 2;\ x\left(\frac{1}{2}\sqrt{\log 5}\right) = 2\,.$$

3.3 Equazioni a variabili separabili

Consideriamo ora $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli aperti, due funzioni continue $g : I \to \mathbb{R}$ e $h : J \to \mathbb{R}$ e l'equazione differenziale a *variabili separabili*

$$x' = f(t,x) = g(t)h(x)\,. \tag{29}$$

Notiamo che questa equazione differenziale ammette la soluzione costante è $x \equiv x_0$ per ogni valore x_0 per cui valga $h(x_0) = 0$. Supponiamo quindi di considerare una soluzione x di (29) tale che $h(x(t)) \neq 0$ in un certo intervallo di tempo $\mathcal{I} \subseteq I$, in particolare $h(x(t)) > 0$ oppure $h(x(t)) < 0$ per ogni $t \in \mathcal{I}$. Possiamo allora dividere per questo valore l'equazione e ottenere

$$\frac{x'(t)}{h(x(t))} = g(t)\,, \qquad \text{per ogni } t \in \mathcal{I}.$$

Sia G primitiva di g e H una primitiva di $1/h$ allora otteniamo

$$\frac{d}{dt}H(x(t)) = \frac{d}{dt}G(t)\,, \qquad \text{per ogni } t \in \mathcal{I}.$$

Quindi le due funzioni differiscono per una costante e vale $H(x(t)) = G(t) + c$ per una certa costante $c \in \mathbb{R}$. A questo punto, essendo $H' = 1/h > 0$ oppure $H' = 1/h < 0$ su $\mathcal{I}$ allora H è invertibile in $\mathcal{I}$ e troviamo

$$x(t) = H^{-1}(G(t) + c)\,.$$

Esempio 3.8. *Risolviamo il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x' = \mathrm{e}^{x+t} \\ x(0) = 0\,. \end{cases}$$

Notiamo subito che l'equazione è a variabili separabili, infatti la possiamo riscrivere come $x' = \mathrm{e}^t \cdot \mathrm{e}^x$ *e quindi otteniamo*

$$\frac{x'(t)}{\mathrm{e}^{x(t)}} = \mathrm{e}^t \Rightarrow x'(t)\mathrm{e}^{-x(t)} = \mathrm{e}^t$$

da cui, cercando le primitive di e^{-x} *e* e^t, *troviamo*

$$-\mathrm{e}^{-x(t)} = \mathrm{e}^t + c \Rightarrow x(t) = -\log(-c - \mathrm{e}^t)$$

che sarà definita per $t < \log(-c)$. *Imponendo la condizione* $x(0) = 0$ *troviamo* $c = -2$ *e quindi*

$$x(t) = -\log(2 - \mathrm{e}^t)\,.$$

Esempio 3.9. *Risolviamo il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x' = 2t\,\frac{\cos x}{\sin x} \\ x(0) = \pi/3\,. \end{cases}$$

Osserviamo che l'equazione differenziale non è definita per $x \in \{k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$ *mentre ha soluzioni costanti* $\pi/2 + k\pi$ *con* $k \in \mathbb{Z}$. *Essendo* $\tan \pi/3 \neq 0$, *il nostro problema non ha una soluzione costante. Portando le funzioni che coinvolgono la variabile* x *a membro sinistro, troviamo calcolando successivamente le primitive,*

$$x'(t)\tan x(t) = 2t \quad \Rightarrow \quad -\log|\cos x(t)| = t^2 + c\,,$$

da cui troviamo

$$\begin{aligned} \log|\cos x(t)| = \tilde{c} - t^2 \quad &\Rightarrow \quad |\cos x(t)| = \mathrm{e}^{\tilde{c}-t^2} = \tilde{A}\mathrm{e}^{-t^2} \qquad (\tilde{A} > 0) \\ &\Rightarrow \quad \cos x(t) = A\mathrm{e}^{-t^2} \qquad (A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \\ &\Rightarrow \quad x(t) = \arccos\left(A\mathrm{e}^{-t^2}\right) \end{aligned}$$

Osserviamo che in questi passaggi sono nascosti molti dettagli: la costante c *può essere sostituita opportunamente di passaggio in passaggio per semplificare la notazione*

$$\tilde{c} = -c\,,\ \tilde{A} = \mathrm{e}^{\tilde{c}}\,,\ A = \pm\tilde{A}\,;$$

quando togliamo il valore assoluto dobbiamo considerare il segno dell'argomento, questo comporta il passaggio da $\tilde{A} > 0$ *a* $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Quando invertiamo il coseno dobbiamo stare attenti a dove si trova la variabile* x. *Il passaggio che introduce l'arcocoseno è valido purché valga* $x(t) \in [0, \pi]$. *La condizione iniziale* $x(0) = \pi/3$ *ci permette di poter affermare che in un intorno di* 0 *questa condizione sarà soddisfatta. Bisogna sempre prestare attenzione a questo tipo di passaggi! Inserendo la condizione iniziale, troviamo la soluzione del problema di Cauchy:*

$$x(t) = \arccos\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\right)\,.$$

3.4 Equazioni omogenee

Supponiamo di avere un'equazione differenziale $x' = f(t, x)$ tale che possiamo esprimere la funzione f nel seguente modo

$$f(t, x) = g(x/t)$$

dove $g : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua. Notiamo che, se questa visualizzazione è possibile, la funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ risulta avere dominio

$$\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \,:\, t \neq 0\,, x/t \in I\} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \,:\, t \neq 0\,, x = mt\,, m \in I\}$$

che è aperto in $\mathbb{R}^2$ se I è aperto (dimostrarlo per esercizio). L'equazione differenziale

$$x' = g\left(\frac{x}{t}\right)$$

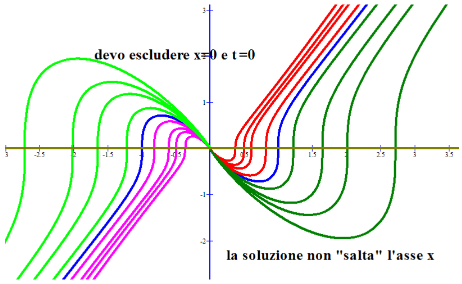

Figura 4: Esempio 3.10. Le soluzioni dell'equazione (30).

è detta *equazione differenziale omogenea* (del primo ordine).

Per risolvere questo tipo di equazione sostituiamo $z(t) = \frac{x(t)}{t}$.

$$\begin{aligned} x(t) = t\, z(t) \quad &\Rightarrow \quad g(z(t)) = x'(t) = z(t) + t\, z'(t) \\ &\Rightarrow \quad z'(t) = \frac{g(z(t)) - z(t)}{t} \,. \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto l'equazione differenziale a variabili separabili

$$z' = \frac{1}{t}(g(z) - z)$$

che può essere risolta come illustrato nella sezione precedente.

Esempio 3.10. *Consideriamo l'equazione differenziale*

$$x' = \frac{t^3 + x^3}{tx^2} \,. \tag{30}$$

Notiamo che dobbiamo porre $t, x \neq 0$. Possiamo riscriverla nella forma

$$x' = \frac{t^2}{x^2} + \frac{x}{t} = g\left(\frac{x}{t}\right) , \qquad g(s) = s^{-2} + s \,.$$

Quindi effettuando la sostituzione suggerita troviamo

$$z' = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{t} \qquad !\, z \neq 0\, !$$

Calcoliamo quindi le soluzioni

$$z^2 z' = t^{-1} \Rightarrow z^3/3 = \log|t| + c \Rightarrow z(t) = \sqrt[3]{3\log|t| + d}$$

Ritornando alla variabile x troviamo le soluzioni alla nostra equazione differenziale iniziale

$$x(t) = t\sqrt[3]{3\log|t| + d} \,. \tag{31}$$

Ricordiamo che abbiamo posto $t \neq 0$ e $x \neq 0$ quindi la soluzione sarà definita per $t < 0$ o per $t > 0$ su un intervallo in cui assume lo stesso segno. Guardiamo la Figura 4. Osserviamo che nella (31) *vale* $\lim_{t\to 0} x(t) = 0$ *e che ogni altra intersezione del grafico di x con l'asse y individua un punto di non derivabilità della funzione x definita in* (31)*. In questi punti la* funzione *x non è derivabile. In questi punti perdiamo la proprietà di x come soluzione di* (30)*. Ad esempio, la linea blu è costituita da 4 soluzioni distinte dell'equazione differenziale: una negativa definita su $I_1 =]-\infty, -1[$, la seconda positiva su $I_2 =]-1, 0[$, la terza negativa su $I_3 =]0, 1[$, l'ultima positiva su $I_4 =]1, +\infty[$. Tutte queste soluzioni sono associate a differenti problemi di Cauchy che portano comunque alla scelta della costante $d = 0$ in* (31)*.*

Concludiamo questa sezione ricordando che è possibile introdurre le equazione differenziale omogenee di ordine superiore al primo. Per esse esiste un metodo risolutivo, ma non ne trattiamo in questa sede.

4 Sistemi lineari di equazioni

In questa sezione studieremo la seguente classe di equazioni differenziali

$$u' = \mathbb{A}(t)u + b(t) \tag{S}$$

dette equazioni differenziali lineari (o sistemi di equazioni differenziali lineari), dove le funzione $\mathbb{A} : I \to \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ e $b : I \to \mathbb{R}^N$ sono continue e $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ denota lo spazio vettoriale delle matrici reali quadrate con N righe e N colonne. L'equazione (S) prende il nome di sistema di equazioni differenziali lineare non omogeneo, mentre l'equazione

$$u' = \mathbb{A}(t)u \tag{S_o}$$

si dirà sistema di equazioni differenziali lineare omogeneo. Notiamo immediatamente che le precedenti equazioni soddisfano le ipotesi del Teorema di esistenza globale e quindi le soluzioni saranno definite su tutto l'intervallo I su cui sono definite le funzioni coinvolte.

Proposizione 4.1. *L'insieme $\mathcal{S}$ delle soluzioni di (S_o) è un sottospazio vettoriale di $C^1(I, \mathbb{R}^N)$.*
L'insieme $\mathcal{T}$ delle soluzioni di (S) è un sottospazio affine di $C^1(I, \mathbb{R}^N)$ con giacitura $\mathcal{S}$.

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che date due soluzioni u_1, u_2 di (S_o), per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ la funzione $c_1u_1 + c_2u_2$ è soluzione di (S_o). Il calcolo è semplice:

$$(c_1u_1(t) + c_2u_2(t))' = c_1u_1'(t) + c_2u_2'(t) = c_1\mathbb{A}(t)u_1(t) + c_2\mathbb{A}(t)u_2(t) = \mathbb{A}(t)(c_1u_1(t) + c_2u_2(t)) .$$

Per la seconda affermazione dobbiamo mostrare che data u soluzione di (S), ogni altra soluzione v di (S) si può scrivere come $v = u + \tilde{u}$ dove $\tilde{u}$ è soluzione di (S_o). Calcolando

$$(v(t) - u(t))' = v'(t) - u'(t) = \mathbb{A}(t)v(t) + b(t) - \mathbb{A}(t)u(t) - b(t) = \mathbb{A}(t)(v(t) - u(t)) ,$$

dimostriamo che $\tilde{u} = v - u$ risolve (S_o). □

Proposizione 4.2. *Lo spazio vettoriale $\mathcal{S}$ delle soluzioni di (S_o) ha dimensione N.*

Dimostrazione. Fissiamo un generico $t_0 \in I$ e consideriamo l'applicazione lineare tra spazi vettoriali $\delta_{t_0} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^N$ definita come $\delta_{t_0}(u) = u(t_0)$. Si tratta dell'applicazione che valuta una funzione in un punto. Dimostrare per esercizio che è un'applicazione lineare.

Per il teorema di unicità di Cauchy-Lipschitz, per ogni $u_0 \in \mathbb{R}^N$ esiste un'unica soluzione $u \in \mathcal{S}$ che risolve (S_o) tale che $u(t_0) = u_0$, da qui abbiamo la biiettività dell'applicazione lineare. Quindi i due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione. □

Proposizione 4.3. *Date le funzioni $\phi_1, \dots, \phi_p \in \mathcal{S}$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$\phi_1, \dots, \phi_p$ sono funzioni linearmente indipendenti;*
2. *esiste $t_0 \in I$ tale che i vettori $\phi_1(t_0), \dots, \phi_p(t_0)$ sono linearmente indipendenti;*
3. *per ogni $t \in I$, i vettori $\phi_1(t_0), \dots, \phi_p(t_0)$ sono linearmente indipendenti;*

Dimostrazione. Ovviamente 3 $\Rightarrow$ 2. Mostriamo che 2 $\Rightarrow$ 1. Supponiamo di avere una combinazione lineare nulla $\lambda_1\phi_1 + \cdots + \lambda_p\phi_p = 0$. Valutiamo questa identità tra funzioni nel valore t_0 e otteniamo la combinazione lineare di vettori $\lambda_1\phi_1(t_0) + \cdots + \lambda_p\phi_p(t_0) = 0$. Per ipotesi deduciamo che $\lambda_i = 0$ per ogni indice i.

Si noti che finora non abbiamo usato il fatto che le funzioni ϕ risolvono (S_o).

Mostriamo che 1 $\Rightarrow$ 3. Consideriamo il sottospazio $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{S}$ generato dalle funzioni $\phi_1, \dots, \phi_p$. Esso ha dimensione p. Considerando un qualsiasi $t \in I$, l'applicazione lineare δ_t introdotta nella dimostrazione della Proposizione 4.2 è un isomorfismo di spazi vettoriali, quindi lo spazio vettoriale $\delta_t(\mathcal{W})$ generato dalle immagini $\delta_t(\phi_1), \dots, \delta_t(\phi_p)$ ha anch'esso dimensione p e questi elementi sono linearmente indipendenti. Notando che vale per definizione $\delta_t(\phi_i) = \phi_i(t)$ abbiamo la tesi. □

Definizione 4.4. *Diremo* funzione matrice fondamentale *(o più brevemente* matrice fondamentale*) associata al sistema (S_o) una funzione $\Phi : I \to \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ tale che, i vettori colonna della matrice $\Phi(t)$, denotati con $\phi_1(t), \dots, \phi_N(t)$ sono tali che le funzioni $\phi_1, \dots, \phi_N : I \to \mathbb{R}^N$ costituiscono una base di $\mathcal{S}$.*

Osservazione 4.5. *Notiamo che, grazie alla Proposizione 4.3, la matrice $\Phi(t)$ è invertibile per ogni $t \in I$ con matrice inversa che denotiamo con $\Phi(t)^{-1}$. Inoltre, ricordando il metodo per il calcolo della matrice inversa possiamo dedurre la continuità della funzione $\widehat{\Phi} : I \to \mathbb{R}^N$ definita come $\widehat{\Phi}(t) = \Phi(t)^{-1}$, che descrive la matrice inversa al variare di t.*

Proposizione 4.6. *Data una matrice fondamentale $\Phi : I \to \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ associata a (S_o), vale*

$$\Phi'(t) = \mathbb{A}(t)\Phi(t)\,, \qquad \text{per ogni } t \in I\,.$$

Inoltre $u \in \mathcal{S}$ se e solo se esiste $c \in \mathbb{R}^N$ tale che $u(t) = \Phi(t)c$ per ogni $t \in I$.

Dimostrazione. La prima parte della proposizione è semplice da provare usando le proprieta del prodotto riga per colonna:

$$\Phi'(t) = (\phi_1'(t), \dots, \phi_N'(t)) = (\mathbb{A}(t)\phi_1(t), \dots, \mathbb{A}(t)\phi_N(t)) = \mathbb{A}(t)\Phi(t)\,.$$

Per la seconda parte della dimostrazione, supponiamo dapprima di avere $u(t) = \Phi(t)c$ per qualche $c \in \mathbb{R}^N$. Possiamo facilmente calcolare $u'(t) = \Phi'(t)c = \mathbb{A}(t)\Phi(t)c = \mathbb{A}(t)u(t)$ e ottenere che $u \in \mathcal{S}$.

Consideriamo ora $u \in \mathcal{S}$, preso un qualsiasi $t_0 \in I$ valutiamo $u_0 = u(t_0)$ e consideriamo il vettore $c = \Phi(t_0)^{-1}u_0$. La funzione definita come $w(t) = \Phi(t)c$ appartiene allo spazio $\mathcal{S}$ per quanto dimostrato sopra. Notiamo tuttavia che vale $w(t_0) = \Phi(t_0)c = \Phi(t_0)\Phi(t_0)^{-1}u(t_0) = u_0$. Allora sia u che w risolvono il problema di Cauchy costituito dall'equazione (S_o) e la condizione iniziale $u(t_0) = u_0$. Allora per il Teorema di unicità deve vale $u = w$ da cui deduciamo che possiamo scrivere $u = \Phi(t)c$. □

Non sempre è facile determinare una base per $\mathcal{S}$, vedremo in seguito dei casi particolari in cui è possibile determinarla. Supposto di conoscere una base dello spazio $\mathcal{S}$, il precedente enunciato ci suggerisce che per risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \mathbb{A}(t)u \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

basta calcolare $u(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}u_0$.

Vediamo ora, supposto di conoscere una base dello spazio $\mathcal{S}$, come possiamo risolvere i problemi di Cauchy associati all'equazione (S).

Teorema 4.7 (Metodo di variazione delle costanti)**.** *Il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u' = \mathbb{A}(t)u + b(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

ha come soluzione

$$u(t) = \Phi(t)\left(\Phi(t_0)^{-1}u_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}b(s)\,ds\right)$$

dove $\Phi : I \to \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ è una matrice fondamentale associata al sistema omogeneo associato (S_o).

Dimostrazione. Sappiamo che le soluzioni di (S_o) si possono scrivere come $u(t) = \Phi(t)c$ con $c \in \mathbb{R}^N$. L'idea è quella di *ipotizzare* che la soluzione sia del tipo $u(t) = \Phi(t)c(t)$ dove $c : I \to \mathbb{R}^N$ è una funzione continua da determinare. Innanzitutto dovremo avere

$$u_0 = u(t_0) = \Phi(t_0)c(t_0) \quad \text{e quindi} \quad c(t_0) = \Phi(t_0)^{-1}u_0\,.$$

Inoltre, sapendo che u risolve (S), possiamo calcolare, ricordando la Proposizione 4.6,

$$\begin{aligned} u'(t) &= \mathbb{A}(t)u(t) + b(t) \\ (\Phi(t)c(t))' &= \mathbb{A}(t)\Phi(t)c(t) + b(t) \\ \cancel{\Phi'(t)c(t)} + \Phi(t)c'(t) &= \cancel{\mathbb{A}(t)\Phi(t)c(t)} + b(t) \\ \Phi(t)c'(t) &= b(t) \quad \text{e quindi} \quad c'(t) = \Phi(t)^{-1}b(t)\,. \end{aligned} \tag{32}$$

A questo punto, possiamo ricavare

$$c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^{t} c'(s)\,ds = \Phi(t_0)^{-1}u_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}b(s)\,ds\,.$$

Ricordando che avevamo posto $u(t) = \Phi(t)c(t)$ abbiamo la tesi. □

Forniamo ora una strategia, non sempre di facile applicazione senza l'ausilio di un calcolatore, per ricavare una matrice fondamentale. Dato il sistema (S_o), definiamo la funzione $\mathbb{M} : I \to \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ come la primitiva di $\mathbb{A}$, ovvero

$$\mathbb{M}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbb{A}(s)\, ds\,.$$

La funzione $\Phi(t) = \mathrm{e}^{\mathbb{M}(t)}$ associata a $\mathbb{M}$ è una matrice fondamentale per (S_o). Tuttavia in questa definizione si deve fare uso del concetto di matrice esponenziale. Data una matrice $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, si definisce la matrice esponenziale e^M come

$$\mathrm{e}^M = \lim_n \left(1 + \frac{M}{n}\right)^n \qquad \text{oppure} \quad \mathrm{e}^M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}\,. \tag{33}$$

Si noti l'analogia della precedente definizione con i limiti

$$\mathrm{e}^x = \lim_n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad \text{oppure} \quad \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Il calcolo della matrice esponenziale spesso non è agevole. In alcuni casi però è praticabile facilmente.

Se la matrice M è nilpotente, ovvero esiste $K \in \mathbb{N}$ tale che $M^K = 0$ allora la serie in (33) è definitivamente nulla. Se la matrice M è diagonale con valori $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ sulla diagonale, allora la matrice e^M è diagonale con valori $\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_N}$ sulla diagonale. Inoltre è possible verificare che

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$$

(dimostrarlo per induzione) cosicché

$$e^M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix} = \mathrm{e}^\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo ora il caso di un'equazione differenziale (S_o) con funzione $\mathbb{A}(t) = \mathbb{A}$ funzione costante, ovvero il caso

$$u' = \mathbb{A}u \tag{34}$$

In questo caso possiamo fare di più. Supponiamo di conoscere un autovettore $v \in \mathbb{R}^N$ della matrice $\mathbb{A}$ di autovalore λ, ovvero tale che $\mathbb{A}v = \lambda v$. Allora la funzione $u(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}v$ risolve il sistema (34), infatti

$$u'(t) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} v = \mathrm{e}^{\lambda t} \lambda v = \mathrm{e}^{\lambda t} \mathbb{A} v = \mathbb{A}(\mathrm{e}^{\lambda t} v) = \mathbb{A}u$$

Quindi se la matrice $\mathbb{A}$ è diagonalizzabile con base di autovettori $v_1, \ldots, v_N$ di autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ possiamo immediatamente ricavare una base $\mathscr{B}$ per il sottospazio vettoriale $\mathcal{S}$ delle soluzioni di (34) e conseguentemente la matrice fondamentale associata:

$$\mathscr{B} = \{u_1, \ldots, u_N\}\,, \quad u_k = \mathrm{e}^{\lambda_k} v_k\,,\ k = 1, \ldots, N\,; \quad \Phi(t) = (u_1, \ldots, u_N) = (\mathrm{e}^{\lambda_1} v_1, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_N} v_N)\,.$$

5 Equazioni differenziali lineari di ordine N

In questa sezione consideriamo una particolare classe di equazioni differenziali di ordine N. Si dice equazione differenziale lineare di ordine N la seguente

$$x^{(N)} + a_{N-1}(t)x^{(N-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t) \tag{35}$$

dove le funzioni $a_{N-1}, \ldots, a_0, h : I \to \mathbb{R}^N$ sono continue. Possiamo scrivere la (35) nella forma di sistema (S) ponendo

$$u_1 = x\,, \quad u_2 = x'\,, \quad \ldots \quad , u_N = x^{(N-1)}\,,$$

e

$$\mathbb{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{N-1}(t) \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \tag{36}$$

La matrice fondamentale Φ associata al sistema così ottenuto viene spesso menzionata come matrice Wronskiana e si denota con $W(t)$.

Proposizione 5.1. *Date le funzioni $x_1, \dots, x_p : I \to \mathbb{R}$ di classe C^{N-1}, esse sono linearmente indipendenti se e solo se le funzioni*

$$\phi_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \\ \vdots \\ x_1^{(N-1)} \end{pmatrix}, \ \phi_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_2^{(N-1)} \end{pmatrix}, \ \dots, \ \phi_1(t) = \begin{pmatrix} x_p(t) \\ x_p'(t) \\ \vdots \\ x_p^{(N-1)} \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. "$\Rightarrow$" Supponiamo di avere una combinazione lineare nulla $\lambda_1\phi_1 + \dots + \lambda_p\phi_p = 0$. Guardando la prima componente troviamo $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = 0$, quindi per ipotesi tutti i coefficienti λ_k sono nulli.

"$\Leftarrow$" Supponiamo di avere una combinazione lineare nulla $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = 0$. Possiamo calcolare le derivate di ordine k di questa espressione e ottenere $\lambda_1 x_1^{(k)} + \dots + \lambda_p x_p^{(k)} = 0$. Quindi scegliendo gli indici $k = 0, \dots, N-1$ troviamo la combinazione lineare nulla $\lambda_1\phi_1 + \dots + \lambda_p\phi_p = 0$. Per ipotesi tutti i coefficienti λ_k sono nulli, da cui la tesi. □

Grazie alla precedente proposizione, date $x_1, \dots, x_N$ funzioni linearmente indipendenti, soluzioni di

$$x^{(N)} + a_{N-1}(t)x^{(N-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0\,, \tag{37}$$

possiamo scrivere la matrice Wronskiana

$$W(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_N(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \dots & x_N'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(N-1)}(t) & x_2^{(N-1)}(t) & \dots & x_N^{(N-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Data la possibilità di condurre (35) nella forma di sistema (S), e che quindi l'equazione omogenea (37) può essere ricondotta nella forma di sistema omogeneo (S_o), notiamo immediatamente che l'insieme delle soluzioni $\mathcal{S}$ dell'equazione (37) è un sottospazio vettoriale di dimensione N. Anche in questo caso, non sempre è facile determinare una base per $\mathcal{S}$. Per questo motivo qui di seguito concentreremo la nostra attenzione sul caso di funzioni a_i costanti e studieremo dapprima l'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti

$$x^{(N)} + a_{N-1}x^{(N-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0\,. \tag{38}$$

Sostituendo nella precedente equazione la funzione $\tilde{x}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ otteniamo

$$\mathrm{e}^{\lambda t}p(\lambda) = 0\,, \qquad \text{dove } p(\lambda) = \lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \dots + a_1\lambda + a_0\,.$$

Otteniamo che la funzione $\tilde{x}$ risolve (38) se e solo se λ è radice del polinomio $p = p(\lambda)$. Questo polinomio è detto *polinomio caratteristico*: usando il metodo di Laplace sulla prima colonna si verifichi che si tratta proprio del polinomio caratteristico associato alla matrice $\mathbb{A}$, a coefficienti costanti, che compare in (36). Tuttavia, cosa succede se abbiamo una radice λ con molteplicità maggiore di uno? Cosa succede se il polinomio ha radici complesse? Vediamo ora nel dettaglio, senza dimostrarla, una procedura per determinare sempre in questo caso una base per il sottospazio delle soluzioni di (38).

- Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è radice semplice (molteplicità algebrica 1) allora (38) ha soluzione

$$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\,.$$

- Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è radice con molteplicità doppia allora (38) ha soluzioni

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\,,\ x_2(t) = t\mathrm{e}^{\lambda t}\,.$$

- Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è radice con molteplicità algebrica $k > 1$ allora (38) ha soluzioni

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\,,\ x_2(t) = t\mathrm{e}^{\lambda t}\,,\ x_3(t) = t^2\mathrm{e}^{\lambda t}\,, \dots\,,\ x_k(t) = t^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda t}\,.$$

- Se $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ è radice di p allora è del tipo $\lambda = \alpha + i\beta$ con $\beta \neq 0$. Contemporaneamente abbiamo che $\lambda^* = \alpha - i\beta$ è radice di p. Quindi troviamo due radici di p a cui corrispondono due soluzioni:

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t)\,,\ x_2(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t)\,.$$

- Se $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ è radice di molteplicità k allora lo è anche $\lambda^* = \alpha - i\beta$. Trovo così $2k$ soluzioni:

$$x_{1,1}(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t)\,,\ \dots\,,\ x_{1,k}(t) = t^{k-1}\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t)\,,$$

$$x_{2,1}(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t)\,,\ \dots\,,\ x_{2,k}(t) = t^{k-1}\mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t)\,.$$

A questo punto le N soluzioni linearmente indipendenti di (38) si trovano adottando la procedura precedente per ogni radice del polinomio caratteristico.

Esempio 5.2. *L'equazione differenziale* $x'' - 5x' + 6x = 0$ *ha polinomio caratteristico associato* $p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$ *con radici semplici* 2 *e* 3. *Quindi le soluzioni sono del tipo* $x(t) = c_1\mathrm{e}^{3t} + c_2\mathrm{e}^{2t}$ *con* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Esempio 5.3. *L'equazione differenziale* $x'' - 2x' + x = 0$ *ha polinomio caratteristico associato* $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$ *con radice doppia* 1. *Quindi le soluzioni sono del tipo* $x(t) = c_1\mathrm{e}^t + c_2t\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t(c_1 + tc_2)$ *con* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Esempio 5.4. *L'equazione differenziale* $x'' + \omega^2 x = 0$ *con* $\omega > 0$ *ha polinomio caratteristico associato* $p(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$ *con radici complesse* $\pm i\omega$. *Quindi le soluzioni sono del tipo* $x(t) = c_1\sin(\omega t) + c_2\cos(\omega t)$ *con* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *A volte viene usata la notazione* $x(t) = C\sin(\omega t + \theta_0)$ *dove* $C > 0$ *e* $\theta_0 \in [0, 2\pi)$, *spesso dette rispettivamente ampiezza e fase. Esprimere le costanti* c_1 *e* c_2 *rispetto alle costanti* C *e* θ_0 *per esercizio.*

Esempio 5.5. *L'equazione differenziale* $x'' - 4x' + 5x = 0$ *ha polinomio caratteristico associato* $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$ *con radici complesse* $2 \pm i$. *Quindi le soluzioni sono del tipo* $x(t) = c_1\mathrm{e}^{2t}\cos(t) + c_2\mathrm{e}^{2t}\sin(t)$ *con* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Oppure possiamo scrivere equivalentemente* $x(t) = C\mathrm{e}^{2t}\sin(t + \theta_0)$.

Esempio 5.6. *Se* $\lambda = 0$ *è radice di* p *con molteplicità* k *allora i polinomi* $1, t, t^2, \dots, t^{k-1}$ *sono soluzioni di* (38). *Nel caso in cui* 0 *è radice semplice ho la soluzione costante* 1, *se invece* p *radice doppia trovo le soluzioni* 1 *e* t.

Osservazione 5.7. *Nel caso* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *spesso si introduce l'esponenziale complesso*

$$\mathrm{e}^{\lambda t} = \mathrm{e}^{(\alpha + i\beta)t} = \mathrm{e}^{\alpha t}[\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)]\,,$$

che è una funzione a valori complessi.

Passiamo ora a considerare l'equazione non omogenea

$$x^{(N)} + a_{N-1}x^{(N-1)} + \cdots + a_1x' + a_0x = f(t)\,. \tag{39}$$

Per risolvere questo tipo di equazioni possiamo utilizzare la formula risolutiva illustrata nel Teorema 4.7 dopo aver riscritto l'equazione nella forma di sistema lineare. Ritorneremo successivamente su questo argomento.

In alternativa illustreremo di seguito un metodo meno complesso dal punto di vista computazionale, che a volte può essere applicato con successo. Le soluzioni di (39) si scriveranno come

$$x(t) = \overline{x}(t) + c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_Nx_N(t)$$

dove $x_1, \dots, x_N$ sono le soluzioni dell'equazione omogenea (38) e $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}$, mentre $\overline{x}$ è una particolare soluzione di (39). Nella prossima sezione illustreremo un metodo per cercare la soluzione particolare $\overline{x}$.

5.1 Metodo della somiglianza

Questo metodo a volte viene chiamato *tecnica dell'Ansatz*. Questo metodo consiglia di cercare la soluzione particolare dell'equazione (39) provando con una funzione test che somigli alla funzione f. In particolare

se f è	allora provo ponendo $\overline{x}(t) =$
un polinomio di grado d	un polinomio di grado d
$e^{\alpha t}$	$Ae^{\alpha t}$, $A \in \mathbb{R}$
$\sin(\alpha t)$ o $\cos(\alpha t)$	$A\sin(\alpha t) + B\cos(\alpha t)$, $A, B \in \mathbb{R}$

Se $f = \lambda f_1 + \mu f_2$ è combinazione lineare di funzioni come quelle sopra, grazie alla linearità di (39), potrò cercare delle soluzioni $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$ a partire dalle funzioni f_1 e f_2 rispettivamente, quindi la soluzione cercata sarà data da $\overline{x} = \lambda\overline{x}_1 + \mu\overline{x}_2$.

Inoltre dobbiamo porre attenzione alla seguente possibilità: se la funzione f è tra le soluzioni dell'equazione omogenea associata (38) allora la funzione test andrà moltiplicata per t.

Esempio 5.8. *Consideriamo l'equazione*

$$(F) \qquad x'' - 5x' + 6x = f(t)\,.$$

Essa avrà soluzioni del tipo $x(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{2t} + \overline{x}(t)$*, infatti* $c_1e^{3t} + c_2e^{2t}$ *risolve l'equazione omogenea associata per ogni coppia di valori* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$*. Dobbiamo quindi ricavare la funzione* $\overline{x}(t)$ *a partire dal tipo di forzante che abbiamo davanti.*

- *Supponiamo* $f(t) = e^t$*. Allora cerchiamo una soluzione per (F) provando con la funzione* $\overline{x}(t) = Ae^t$*. Sostituendo in (F) tale espressione troviamo*

$$\begin{aligned}(Ae^t)'' - 5(Ae^t)' + 6(Ae^t) &= e^t \\ \Rightarrow \quad \cancel{e^t}\,[A - 5A + 6A] &= \cancel{e^t} \\ \Rightarrow \quad A &= 1/2\,.\end{aligned}$$

Troviamo quindi che $\overline{x}(t) = \frac{1}{2}e^t$ *risolve (F). Quindi le soluzioni di (F) sono tutte del tipo*

$$x(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{2t} + \frac{1}{2}e^t \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

- *Consideriamo ora il caso* $f(t) = t^2$*. La funzione test sarà in questo caso un polinomio di grado 2:* $\overline{x}(t) = At^2 + Bt + C$*, con* $A, B, C \in \mathbb{R}$*. Sostituendo le derivate di* $\overline{x}$ *in (F) troviamo*

$$\begin{aligned}&(2A) - 5(2At + B) + 6(At^2 + Bt + C) = t^2 \\ &\Rightarrow 6At^2 + (-10A + 6B)t + (2A - 5B + 6C) = t^2 \\ &\Rightarrow \begin{cases} 6A = 1 \\ -10A + 6B = 0 \\ 2A - 5B + 6C = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow (A, B, C) = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{18}, \frac{19}{108}\right)\end{aligned}$$

ottenendo un sistema facilmente risolvibile dal punto di vista teorico, un po' meno per quanto riguarda i calcoli espliciti.

- *Se invece vale* $f(t) = \sin t$ *la funzione test è* $A\sin t + B\cos t$ *da cui, sostituendo in (F) troviamo*

$$\begin{aligned}(-A\sin t - B\cos t) - 5(A\cos t - B\sin t) + 6(A\sin t + B\cos t) &= \sin t \\ \Rightarrow \quad \sin t(5A + 5B) + \cos t(5B - 5A) &= \sin t\end{aligned}$$

da cui perveniamo al sistema di equazioni $A + B = 1/5$ *e* $A = B$ *trovando la soluzione* $\overline{x}(t) = \frac{1}{10}(\sin t + \cos t)$*.*

- *Veniamo al caso* risonante, $f(t) = \mathrm{e}^{2t}$, *ovvero il caso in cui f risolve l'equazione omogenea. Stavolta il test va fatto con la funzione $At\mathrm{e}^{2t}$, con $A \in \mathbb{R}$. Sostituendo troviamo:*

$$\begin{aligned} &A(4\mathrm{e}^{2t} + 4t\mathrm{e}^{2t}) - 5A(\mathrm{e}^{2t} + 2t\mathrm{e}^{2t}) + 6At\mathrm{e}^{2t} = \mathrm{e}^{2t} \\ \Rightarrow \quad & t\mathrm{e}^{2t}\cancel{(4A - 10A + 6A)} + \mathrm{e}^{2t}(4A - 5A) = \mathrm{e}^{2t} \\ \Rightarrow \quad & A = -1 \end{aligned}$$

che porta alla soluzione $\overline{x}(t) = -t\mathrm{e}^{2t}$. Si noti che la prima parentesi porta ad una parentesi nulla, infatti per ottenere questi termini non abbiamo mai derivato nella funzione test la t ma solo l'esponenziale. L'annullarsi della parentesi è legato al fatto che la funzione e^{2t} risolve l'equazione omogenea associata.

- *Se $f(t) = 2t^2 + 3\sin t$, ovvero f è combinazione lineare di funzioni più semplici, allora queste si trattano separatamente come nei punti precedenti e poi si ricombinano le soluzioni trovate:*

$$x(t) = c_1\mathrm{e}^{3t} + c_2\mathrm{e}^{2t} + 2\left(\frac{1}{6}t^2 + \frac{5}{18}t + \frac{19}{108}\right) + 3\left(\frac{1}{10}(\sin t + \cos t)\right).$$

Esempio 5.9. *Perché nell'esercizio precedente è comparsa la parola* risonante*? Tale parola si incontra in fisica quando il forzante di un oscillatore armonico è soluzione dell'oscillatore armonico non forzato. Consideriamo ad esempio l'equazione differenziale*

$$x'' + \omega^2 x = \sin(\omega t), \qquad \omega > 0.$$

Poiché $\sin(\omega t)$ è una delle soluzioni dell'equazione omogenea associata, allora cerchiamo la soluzione particolare $\overline{x}$ di questo sistema sostituendo

$$\overline{x}(t) = At\sin(\omega t) + Bt\cos(\omega t), \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Calcolando le derivate di $\overline{x}$ e sostituendo nell'equazione differenziale troviamo

$$2A\omega\cos(\omega t) - \cancel{A\omega^2 t\sin(\omega t)} - 2B\omega\sin(\omega t) - \cancel{B\omega^2 t\cos(\omega t)} + \cancel{A\omega^2 t\sin(\omega t)} + \cancel{B\omega^2 t\cos(\omega t)} = \sin(\omega t).$$

da cui troviamo $A = 0$ e $B = -1/2\omega$. Quindi le soluzioni sono del tipo

$$x(t) = c_1\sin(\omega t) + c_2\cos(\omega t) - \frac{1}{2\omega}t\cos(\omega t).$$

Notiamo che la funzione x è illimitata per $t \to \infty$ e presenta oscillazioni con ampiezza crescente.

Esempio 5.10. *Può andarci peggio di come abbiamo già visto? Certo che sì, non c'è limite al peggio! Consideriamo l'equazione differenziale*

$$x'' - 2x' + x = \mathrm{e}^t,$$

che ha come soluzioni dell'omogenea associata $c_1\mathrm{e}^t + c_2t\mathrm{e}^t$. Essendo il forzante $f(t) = \mathrm{e}^t$ soluzione dell'equazione omogenea associata, da regolamento dovremmo usare come funzione test $At\mathrm{e}^t$, ma questa è ancora una soluzione dell'equazione omogenea associata. Quindi dobbiamo ancora salire con il grado del polinomio davanti all'esponenziale e provare con $\overline{x}(t) = At^2\mathrm{e}^t$. Con un po' di calcoli, troviamo

$$\begin{aligned} &A(2\mathrm{e}^t + 4t\mathrm{e}^t + t^2\mathrm{e}^t) - 2A(2t\mathrm{e}^t + t^2\mathrm{e}^t) + At^2\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t \\ &\Rightarrow At^2\mathrm{e}^t(1 - 2 + 1) + At\mathrm{e}^t(4 - 4) + A\mathrm{e}^t(2) = \mathrm{e}^t, \end{aligned}$$

da cui $A = 1/2$ e la soluzione dell'equazione differenziale risulta

$$x(t) = c_1\mathrm{e}^t + c_2t\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^t, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Spesso questo tipo di equazioni sono dette doppiamente risonanti. *Come esercizio scrivere un'equazione* triplamente risonante.

In tutti gli esempi precedenti non sono stati considerati problemi di Cauchy. Chiaramente, una volta trovato l'integrale generale (tutte le possibili soluzioni) dell'equazione differenziale, basta sostituire nella soluzione generale i dati iniziali, che negli esempi precedenti saranno del tipo

$$x(t_0) = \overline{x}, \qquad x'(t_0) = \overline{v},$$

per poi trovare le costanti c_1, c_2 adatte risolvendo un semplice sistema di equazioni.

5.2 Il metodo di variazione delle costanti per equazioni di scalari di ordine N

In questa sezione presenteremo come la procedura adottata nella dimostrazione del Teorema 4.7 può essere riscritta in questo contesto. La ricerca di soluzioni $u(t) = \Phi(t)c(t)$ si traduce (focalizzando l'attenzione sulla prima componente) nella ricerca di soluzioni $x(t) = \sum_{k=1}^{N} x_k(t)c_k(t)$. Inoltre, come si evince dalla (32), il problema della risoluzione del sistema (S) equivale al problema di risolvere l'equazione

$$\Phi(t)c'(t) = b(t)\,.$$

In questo caso, la matrice fondamentale Φ altro non è che la Wronskiana W e il vettore b è come in (36), quindi dobbiamo risolvere il seguente sistema, dove le incognite sono le funzioni $c_1', \dots, c_N'$,

$$\begin{cases} c_1'x_1 & +c_2'x_2 & + \dots & +c_N'x_N & = 0 \\ c_1'x_1' & +c_2'x_2' & + \dots & +c_N'x_N' & = 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_1'x_1^{(N-2)} & +c_2'x_2^{(N-2)} & + \dots & +c_N'x_N^{(N-2)} & = 0 \\ c_1'x_1^{(N-1)} & +c_2'x_2^{(N-1)} & + \dots & +c_N'x_N^{(N-1)} & = f(t) \end{cases}$$

Ricordando che la matrice $W(t)$ è invertibile per ogni $t \in I$, possiamo applicare il metodo di Cramer per risolvere il sistema e ottenere, per ogni indice k,

$$c_k'(t) = \frac{\det \widehat{W}_k(t)}{\det W(t)}$$

dove la matrice $\widehat{W}_k(t)$ si ottiene sostituendo alla colonna k-esima della matrice $W(t)$ il vettore colonna $b(t)$. Dalla definizione di determinante deduciamo che c_k' è continua e da essa possiamo ricavare le primitive $c_k(t)+d_k$ a meno della scelta della costante reale d_k. Otterremo quindi

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N}(c_k(t) + d_k)x_k(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k(t)x_k(t) + \sum_{k=0}^{N} d_kx_k(t) = \overline{x}(t) + d_1x_1(t) + \dots + d_Nx_N(t)\,,$$

dove riconosciamo la funzione particolare e il generico elemento della giacitura.

Ad esempio, nel caso in cui abbiamo $N = 2$ il sistema diventa

$$\begin{cases} x_1(t)c_1'(t) + x_2(t)c_2'(t) = 0 \\ x_1'(t)c_1'(t) + x_2'(t)c_2'(t) = f(t)\,. \end{cases}$$

da cui, utilizzando il metodo di Cramer,

$$c_1'(t) = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ f & x_2' \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix}} = \frac{-g(t)x_2(t)}{x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t)} \qquad c_2'(t) = \frac{\det\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_1' & f \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix}} = \frac{g(t)x_1(t)}{x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t)}$$

da cui ricaveremo la soluzione $x(t) = \overline{x}(t) + d_1x_1(t) + d_2x_2(t)$ con $\overline{x}(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$.

Esempio 5.11. *Consideriamo il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x'' + 4x = \frac{1}{\sin(2t)}\,, \\ x(\frac{3}{4}\pi) = 1 \\ x'(\frac{3}{4}\pi) = -1 \end{cases}$$

per cui va posto $t \notin \{k\pi/2 \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$. Essendo il dato iniziale $\frac{3}{4}\pi$ nell'intervallo $I =]\pi/2, \pi[$ allora la soluzione massimale che troveremo sarà definita in questo intervallo. Si noti quindi che vale sì il teorema di esistenza globale, ma fintantoché la variabile t ha "un dominio in cui stare".

L'equazione omogenea associata è $x'' + 4x = 0$ *di cui conosciamo le soluzioni:* $c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t)$ *essendo* $\lambda = \pm 2i$ *le radici del polinomio caratteristico. Cerchiamo quindi soluzioni del tipo*

$$x(t) = c_1(t)\sin(2t) + c_2(t)\cos(2t)\,.$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} \sin(2t)c_1'(t) + \cos(2t)c_2'(t) = 0 \\ 2\cos(2t)c_1'(t) - 2\sin(2t)c_2'(t) = \frac{1}{\sin(2t)}\,. \end{cases} \tag{40}$$

Calcoliamo facilmente $\det W(t) = -2$*, e le soluzioni del sistema precedente*

$$c_1'(t) = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & \cos(2t) \\ \frac{1}{\sin(2t)} & -2\sin(2t) \end{pmatrix}}{-2} = \frac{1}{2}\frac{\cos(2t)}{\sin(2t)}\,, \qquad c_2'(t) = \frac{\det\begin{pmatrix} \sin(2t) & 0 \\ \cos(2t) & \frac{1}{\sin(2t)} \end{pmatrix}}{-2} = -\frac{1}{2}\,.$$

Quindi ne calcoliamo le primitive:

$$c_1(t) = \frac{1}{4}\log|\sin(2t)| + d_1\,, \qquad c_2(t) = -\frac{1}{2}t + d_2\,,$$

ottenendo

$$x(t) = \left(\frac{1}{4}\log|\sin(2t)| + d_1\right)\sin(2t) + \left(-\frac{1}{2}t + d_2\right)\cos(2t)\,.$$

Notiamo che $d_1 \sin(2t) + d_2 \cos(2t)$ *è soluzione dell'omogenea, quindi primitivando* c_1' *e* c_2' *otteniamo coerentemente l'infinità di soluzioni dell'equazione differenziale come previsto dalla teoria. A questo punto sostituiamo le condizioni iniziali del problema di Cauchy e ricaviamo le costanti* d_1 *e* d_2*. Le derivata di* x *risulta:*

$$\begin{aligned} x'(t) = \cancel{\left[\frac{\cos(2t)}{\sin(2t)}\frac{1}{2}\right]\sin(2t)} + \left[\frac{1}{4}\log|\sin(2t)| + A\right]2\cos(2t) + \\ \cancel{-\frac{1}{2}\cos(2t)} + \left[B - \frac{1}{2}t\right](-2)\sin(2t) \\ = \left[\frac{1}{4}\log|\sin(2t)| + A\right]2\cos(2t) + \left[B - \frac{1}{2}t\right](-2)\sin(2t) \end{aligned}$$

Il fatto che siamo incorsi in questa semplificazione non è un colpo di fortuna, anzi dovrebbe accadere ogni volta! Infatti questa semplificazione è dovuta alla prima equazione contenuta nel sistema (40)*. Sostituendo ora le condizioni iniziali del problema di Cauchy abbiamo*

$$x\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \left[\frac{1}{4}\log\left|\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right| + d_1\right]\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) + \left[d_2 - \frac{3}{8}\pi\right]\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$

da cui segue $d_1 = -1$ *e*

$$x'\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \left[\frac{1}{4}\log\left|\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right| + d_1\right]2\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + \left[d_2 - \frac{3}{8}\pi\right](-2)\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$

da cui recuperiamo $d_2 = \frac{3}{8}\pi - \frac{1}{2}$.