Esercizi dati negli esami scritti precedenti

Il file è stato inizialmente creato per il corso di Analisi Matematica II del CdL in Fisica, poi è stato adattato per comprendere anche le tematiche del corso di Analisi 3 del CdL in Matematica.

Alcune parti lasciate come esercizio, sono lasciate allo studente e andrebbero analizzate in sede d'esame nel caso di un esercizio analogo.

Man mano che si procede con gli esercizi, alcune risoluzioni sono omesse perché molto similari a esercizi già esposti. Contengono quindi rimandi ad esercizi già visti e sono lasciate volutamente incomplete.

Negli anni, sono stati riscontrati errori *di battitura* (e non solo) nelle risoluzioni. Non date per scontata la validità di ogni singolo passaggio. Provate a risolvere voi stessi gli esercizi e successivamente controllate se sono corretti.

In fondo si trovano le risoluzioni di alcuni esercizi dati per il corso di Analisi 3 per il CdL di Matematica. Alcuni esercizi (non tutti!) sono compatibili col corso di Analisi Matematica 2 per il CdL di Fisica.

Indice

1 Serie e integrali

Esercizio 1.1. *Al variare del parametro reale $\alpha < 0$, studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan(n^\alpha)}{\log_3\left(\frac{1}{n!}+1\right)} \cdot \frac{e^{n^{-n}}-1}{\arcsin\left(2^{-n}+3^{-n}\right)}\,.$$

Esercizio 1.2. *Al variare del parametro reale $x \in \mathbb{R}$, studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(x^2+5x+5\right)^n\,.$$

Esercizio 1.3. *Studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sin n)\frac{\log(1+\frac{1}{n!})}{\arctan(2^{-n})}\,.$$

Esercizio 1.4. *Studiare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)\left(\arctan n^\alpha\right)\,.$$

Esercizio 1.5. *Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{nx}}{3^n+4^n}\,.$$

Esercizio 1.6. *Studiare, al variare di $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, il carattere della serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{k^2+1}(\tan x)^k\,.$$

Esercizio 1.7. *Determinare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}\,.$$

Esercizio 1.8. *Determinare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n}\frac{\sin(n^{-1})}{6^n}\,.$$

Esercizio 1.9. *Discutere la convergenza del seguente integrale al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\tan x-\alpha\sin x}\,dx\,.$$

Esercizio 1.10. *Discutere la convergenza del seguente integrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x-1-\sin x}{\mathrm{e}^{\pi x}-1-\sin(\pi x)}\,dx\,.$$

Esercizio 1.11. *Determinare il carattere della serie al variare di $x \in \mathbb{R}$.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^n\,.$$

Esercizio 1.12. *Discutere la convergenza del seguente integrale al variare di $\alpha > 0$*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x-1}{\arctan(\sqrt{x^\alpha})\,\alpha^x}\,dx\,.$$

Esercizio 1.13. *Determinare il carattere della serie al variare di* $\alpha \geq 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \arctan(\alpha^n)\,.$$

Esercizio 1.14. *Determinare il carattere della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n!}}{n^n\, n!}\,.$$

Esercizio 1.15. *Discutere la convergenza della seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$$

Esercizio 1.16. *Discutere la convergenza del seguente integrale generalizzato*

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan(x^{-1})}{\sqrt[3]{x}}\, dx\,.$$

Esercizio 1.17. *Discutere la convergenza del seguente integrale generalizzato al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{\infty} \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-x}} - 1)\sinh x}{x^{\alpha}}\, dx\,.$$

Esercizio 1.18. *Discutere la convergenza del seguente integrale generalizzato (e, se possibile, darne una stima)*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(1/x)}{\sqrt{|x^2 - 1|}}\, dx\,.$$

Esercizio 1.19. *Dire per quali valori di* x *converge la seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^{-2})}{\log\left(\dfrac{n+4}{n}\right)} \left(\frac{2x+4}{x-2}\right)^n\,.$$

Esercizio 1.20. *Dire per quali valori positivi* a, b, c *converge la seguente serie effettuando tutti i calcoli necessari*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^a\ (\log_b n)^c}\,.$$

Esercizio 1.21. *Data la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arcsin(n^{\alpha})}{\sin\frac{1}{n}}\,,$$

dire per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ *la serie è ben definita e per questi determinarne il carattere.*

Esercizio 1.22. *Dire per quali valori* $\alpha \in \mathbb{R}$ *il seguente integrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha}}{|x^3 - x^2|^{\frac{1}{2}}}\, ds$$

converge in senso generalizzato.

Esercizio 1.23. *Dire per quali valori* $\alpha \in \mathbb{R}$ *la seguente serie è convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \left[\ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^k\ \right]^{-1}\,.$$

Esercizio 1.24. *Dire per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale è convergente*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \sin(\pi x) + f(x)}{|2x - 1|^{\alpha}}\, dx$$

dove $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ è la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{se } x \le 2022 \\ \arctan(x - 2022) & \textit{se } x > 2022 \end{cases}$$

Esercizio 1.25. *Determina il raggio di convergenza della seguente serie:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{3n}{2n} x^n$$

Esercizio 1.26. *Determina il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ definita come*

$$x_0 = 100\,, \qquad x_{n+1} = \frac{3x_n}{x_n + 4}\,, \; n \in \mathbb{N}$$

Esercizio 1.27. *Determina il carattere della serie*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sin(k) \sin\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Esercizio 1.28. *Determina il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n^2 - 3\sin n)^2}{\sqrt{3^n + 4n}}\,.$$

Esercizio 1.29. *Determina il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\sin^2 n}{2} \left(\arctan(4n^2 - 36n + 77) + \frac{1}{4n^2 - 36n + 77}\right)\right]^n.$$

Esercizio 1.30. *Determina il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{\sqrt[3]{n}}$ dove la successione $(b_n)_n$ è periodica di periodo 10 (ovvero $b_{n+10} = b_n$ per ogni $n \ge 1$) e vale $\sum_{k=1}^{10} b_k = 0$.*

Esercizio 1.31. *Dire se i seguenti integrali in senso generalizzato sono convergenti o divergenti:*

$$\int_{-\infty}^{10} \sqrt{y^2 + 1} - y\, dy\,, \qquad \int_0^{\pi^2} \frac{\sqrt{\sin\sqrt{x}}}{e^{-x} - 1}\, dx\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2}\, ds\,.$$

Esercizio 1.32. *Dire per quali valori reali del parametro λ converge la seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^n.$$

Successivamente scrivere dominio e valore assunto al variare di x dalla funzione

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^n.$$

Esercizio 1.33. *Determina il carattere della seguente serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n^3}\right)$.*

Esercizio 1.34. *Determina il carattere della serie*

$$\sum_{n=12}^{\infty}\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n\log n}.$$

Esercizio 1.35. *Determina il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+5)\log(n+5)}{n^2\sqrt{n}}.$$

Esercizio 1.36. *1) Discutere la convergenza della serie* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n}$ *; e scrivere la somma della serie;*

2a) Dimostrare che $\int_0^1 e^{x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{2n+1}$.

2b) Sapendo che le serie $\sum_{m=1}^{\infty}a_m$ *e* $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ *sono serie convergenti di numeri non negativi, dimostrare che la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ *è convergente.*

Esercizio 1.37. *Data la serie*

$$\sum_{n\geq 1} n\frac{x^{n+1}}{(x+1)^n} \qquad x \geq 0\,,$$

trovare l'insieme di convergenza puntuale, trovare l'insieme dove c'è convergenza uniforme, calcolare la somma ove possibile.

Esercizio 1.38. *Data la serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+4}}{n+1}\,,$$

trovare l'insieme di convergenza puntuale, trovare l'insieme dove c'è convergenza uniforme, calcolare la somma ove possibile.

Esercizio 1.39. *Determinare per quali valori* $\alpha \in \mathbb{R}$ *il seguente integrale è convergente*

$$\int_0^{+\infty}\frac{(e^{\alpha x}-1)x}{\sqrt[3]{x}(x^3+x^2)^{1-\alpha}}\,dx\,.$$

2 Continuità e differenziabilità, problemi di massimo e minimo

Esercizio 2.1. *Discutere, della seguente funzione* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *continuità, esistenza delle derivate parziali e differenziabilità:*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

Scrivere il valore del gradiente di f *al variare di* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Esercizio 2.2. *Dato l'insieme*

$$E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,|y|\leq\sqrt{3}x\,,\;x^2+y^2\leq 2\right\},$$

determinare massimo e minimo della funzione $f(x,y)=x^4-x^2+y^2$ *nell'insieme* E *dopo aver dimostrato che questi esistono.*

Esercizio 2.3. *Data la funzione* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *definita come*

$$f(x,y)=xy^2-x^2-2y^2+2x\,,$$

determinarne i punti critici e la loro natura. Dire se la funzione ammette massimi e minimi globali nel suo dominio.

Determinare inoltre massimo e minimo assoluto della funzione f *ristretta all'insieme*

$$E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y^2-1\leq x\leq 7-y^2\right\},$$

dopo aver spiegato perché questi esistono.

Esercizio 2.4. *Data la funzione* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ *definita come*

$$f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2\,,$$

determinarne i punti critici e la loro natura.

Determinare inoltre massimo e minimo assoluto della funzione f *ristretta all'insieme*

$$E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2=z\,,y=z^2\right\},$$

dopo aver spiegato perché questi esistono.

Esercizio 2.5. *Data la funzione* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *definita come*

$$f(x,y)=x^3-x^2y+y^2-x^2-xy+2y-x\,,$$

determinarne i punti critici e la loro natura.

Determinare inoltre massimo e minimo assoluto della funzione f *ristretta all'insieme*

$$E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2\leq y-1\leq x\right\},$$

dopo aver spiegato perché questi esistono.

Esercizio 2.6. *Data la funzione* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *definita come*

$$f(x,y)=xy^2+5xy-8y^2-40y$$

determinarne i punti critici e la loro natura.

Determinare inoltre gli eventuali punti di estremo vincolato della funzione f *ristretta all'insieme*

$$E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid xy=2\right\}.$$

Verificare se f *assume massimo e minimo assoluto su* E *(si chiedono i punti di estremo, non il valore assunto!).*

Esercizio 2.7. *Classificare i punti critici della funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita come*

$$f(x,y) = 2y^2 - 2y(\sin x + \cos x) + \sin(2x)\,.$$

Disegnare l'insieme

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| \le \pi\,,\, |xy| \le 1\right\}$$

e determinare, se esistono,

$$\min_{\mathbb{R}^2} f \quad , \quad \max_{\mathbb{R}^2} f \quad ; \quad \min_{E} f \quad , \quad \max_{E} f\,.$$

Esercizio 2.8. *Determinare la continuità e differenziabilità di* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *al variare di* $\beta \in \mathbb{R}$*:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2(y+1)-y^2(y-1)}{x^2+y^2} & (x,y) \ne (0,0)\,, \\ \beta & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Esercizio 2.9. *Data la funzione* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definita come*

$$f(x,y,z) = \frac{e^{xy}\,z}{1+z^2}\,,$$

studiare il carattere dei suoi punti critici. Quindi individuare minimo e massimo di f *sull'insieme*

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 2\right\}.$$

Esercizio 2.10. *Della seguente funzione* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *determinare i punti del dominio in cui è continua e quelli in cui è differenziabile.*

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z) \ne (0,0,0)\,, \\ 0 & (x,y,z) = (0,0,0)\,. \end{cases}$$

Esercizio 2.11. *Dato l'insieme*

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x^2 \le y^2 + z^2 \le 12\right\}$$

e la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definita come* $f(x,y,z) = x^2 e^{-(x^2+y^2+z^2)}$*, determinare massimo e minimo di* f *su* E *e i punti in cui questi sono raggiunti.*

Esercizio 2.12. *Della seguente funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *discutere continuità e differenziabilità in* $O = (0,0)$*:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin^2 x \,\dfrac{x-y}{x^2+y^2} & (x,y) \ne (0,0)\,, \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Discutere dal punto di vista puramente teorico (ovvero senza fare i calcoli) la procedura da adottare per dimostrare continuità e differenziabilità della stessa funzione negli altri punti del suo dominio.

Esercizio 2.13. *Classifica i punti critici della funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita come* $f(x,y) = y^3 - x^2y - y^2 + x^2$.
Disegna l'insieme

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \le 2 - y \le 4\right\}$$

e determina massimo e minimo della funzione f *su* E *e i punti in cui sono raggiunti.*

Esercizio 2.14. *Disegna l'insieme* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \mathrm{e}^{3x} \le y \le \mathrm{e}^{2x}\,,\, |x| \le 5\}$ *e determina, se esistono, il massimo e il minimo della funzione* $f : A \to \mathbb{R}$ *definita come* $f(x,y) = \mathrm{e}^{3x - \ln y}$.

Esercizio 2.15. *Data la funzione* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definita come* $f(x,y,z) = 2xyz$ *e l'insieme*

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 3\,,\, xy = z\}\,,$$

i. determinare per quali punti di E *non è possibile applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange al fine di determinare i massimi e minimi di* f *su* E*;*

ii. determinare massimo e minimo di f su E, con metodo a piacere.

Esercizio 2.16. *Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{|x| + |y|} \arctan x & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

dire in quali punti è continua e in quali punti è differenziabile.

Esercizio 2.17. *Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z$. Calcolare $\min_E f$ e $\max_E f$ (e i punti in cui questi valori vengono assunti), dove*

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq 4\,,\, |x - y| \leq 2 \leq z \leq 3\}\,.$$

Esercizio 2.18. *Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + y^3 - y - |x|\left(\frac{5}{2}x - 6\right),$$

individuare i punti di massimo e minimo locale della funzione (non è necessario fornire il valore assunto). Dimostrare che f è illimitata sia superiormente che inferiormente. Calcolare, se esiste, l'approssimante lineare di f nel punto $(1,0)$. Calcolare, se esiste, il polinomio di Taylor di grado 3 approssimante la funzione f nel punto $(1,0)$.

Esercizio 2.19. *Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita come $f(x,y) = x|y-1| + x^2 - \frac{1}{2}x$ determinare in quali punti è differenziabile e in quali non lo è (motivare la risposta in modo adeguato e completo). Trovare massimo e minimo della funzione f nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| \leq 2 - y\,,\, |x| \leq y\}$.*

Esercizio 2.20. *Classificare i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita come*

$$f(x,y) = x^3 + xy^2 - x - 1\,.$$

Consideriamo la restrizione $f|_A : A \to \mathbb{R}$ della funzione precedente all'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 - y^2 = 0\}\,.$$

Trovare, se esistono, massimi e minimi locali della funzione $f|_A$. Essa è limitata su A?

Esercizio 2.21. *Data la funzione $f(x,y) = x^2 + y - xy$, deteriminare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione f nell'insieme*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 \leq |y| \leq 4\}\,.$$

Dire in quali punti tali valori sono raggiunti. Disegna A.

Esercizio 2.22. *Dimostra che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x| + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua nel suo dominio. Dimostra che non è differenziabile nell'origine. Dimostra che è differenziabile in ogni altro punto del dominio.

Esercizio 2.23. *Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } y > x \\ x^3 - x + 2y & \text{se } y \leq x \end{cases}$$

determina in quali punti è continua e in quali punti è differenziabile.

Determina, se esistono, massimo e minimo della funzione sull'insieme $Q = [-2,2] \times [-2,2]$.

Esercizio 2.24. *Data la funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita come*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + \sqrt{3}\,y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

determina se essa è continua nell'origine. Poi determina se è differenziabile nell'origine.

Determina, se esistono, massimo e minimo della funzione f *sull'insieme di livello* 1 *della funzione* $F(x,y) = x^2 + y^2$.

Esercizio 2.25. *Considerare l'insieme*

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\,,\ |x| + y \leq 0\}\,.$$

Data la funzione $g : E \to \mathbb{R}$ *definita come*

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

determina se essa è continua nel suo dominio.

Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita come* $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2y$, *calcola massimi e minimi di* f *nell'insieme* E.

Esercizio 2.26. *Dire per quali valori del parametro reale* α *la funzione*

$$f_\alpha(x,y) = |y|^\alpha \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$$

può essere estesa con continuità nell'origine. Per quali valori α *la funzione* f_α *è differenziabile?*

Esercizio 2.27. *Data la funzione* $h(x,y) = x|x| - y^2$ *e l'insieme* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 1\}$, *determina massimo e minimo assoluto di* g *in* D.

Esercizio 2.28. *Stabilire se la seguente funzione è continua e differenziabile:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos(xy) + (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Esercizio 2.29. *Determina massimo e minimo assoluto di* $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3x - 2y + 1$ *nella palla euclidea chiusa di raggio uno centrata nell'origine.*

Esercizio 2.30. *Determina i punti critici della funzione* $f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 4x^2$ *e determina la loro natura. Successivamente, trova massimo e minimo assoluto di* f *nella palla euclidea chiusa di raggio tre centrata nell'origine.*

Esercizio 2.31. *Individuare il valore* b *per cui la funzione* $f : [-2,2] \times [1,4]$ *definita come*

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y - 3x^2 - y^2 + 3y & \text{se } y \geq x^2 \\ x^4 - x^2y - 2x^2 + by & \text{se } y < x^2 \end{cases}$$

risulta continua, quindi individuare massimo e minimo di f.

Esercizio 2.32. *Data la funzione* f *definita come*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+xy)}{|x|+|y|} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

determina il suo dominio D *e disegnalo. In quali punti del dominio la funzione è continua? La funzione è differenziabile nell'origine?*

Esercizio 2.33. *Su una palla di raggio 3 centrata nell'origine, la temperatura segue la legge* $T(x,y,z) = x - 2y + 2z$*. Trova il punto più caldo e il punto più freddo.*

Esercizio 2.34. *Data una funzione* $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *di classe* C^1*, si definisce la funzione* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *come* $f(x,y,z) = \mu(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$*. Per quali punti* (x,y,z) *la funzione* f *è continua? In quali punti possiamo dire con certezza che la funzione è differenziabile? Quale condizione aggiuntiva su* μ *va richiesta affinché sia differenziabile su tutto* $\mathbb{R}^3$*?*

Sapendo che la funzione μ *ha le seguenti proprietà:* $\lim_{t\to\pm\infty} \mu(t) = 0$*, la funzione è decrescente nell'intervallo* $]-\infty, -3]$*, crescente nell'intervallo* $[-3, 4]$ *e di nuovo decrescente in* $[4, +\infty[$*. Inoltre abbiamo i seguenti valori* $\mu(-3) = -2$*,* $\mu(0) = -1$*,* $\mu(4) = 1$*. Cosa possiamo affermare sull'esistenza (o non esistenza) di massimi e minimi per la funzione* f*? In caso di esistenza, quanto valgono questi valori e in quali punti sono raggiunti?*

Esercizio 2.35. *Determinare massimo e minimo della funzione* $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ *nell'insieme*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 - x^2 + y^2 - 5 = 0\}.$$

Esercizio 2.36. *Determinare i massimi e i minimi relativi e assoluti della funzione* $f(x,y) = xye^{x-y}$ *sulla regione piana delimitata dalle curve* $|x-y| = 3$ *e* $xy = 4$*.*

Esercizio 2.37. *Sia* A *il dominio della funzione* $a(x,y) = \sqrt{4-x-y}$ *e sia* B *il dominio della funzione* $b(x,y) = \sqrt[4]{x} + \sqrt{y}$*. Disegna* $A \cap B$*.*

Classifica tutti i punti critici della funzione $f(x,y) = x^2ye^{-(x+y)}$*. Calcola massimo e minimo, se esistono, della funzione* f *nell'insieme* $A \cap B$*.*

3 Integrazione

Esercizio 3.1. *Calcolare l'integrale* $\iiint_V y\,dxdydz$ *dove*

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \le z \le 2x \,,\, y \ge x\}\,.$$

Esercizio 3.2. *Calcolare l'integrale* $\iiint_E \dfrac{z}{xy}\,dxdydz$ *dove*

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y \le x \le z^2 \le 4y \,,\, x^2 \le y \le 2x^2 \,,\, z \ge 0\right\}.$$

Esercizio 3.3. *Calcolare il baricentro del corpo C, avente densità costante $\rho = 2$, che si ottiene ruotando l'insieme*

$$F = \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le y \le z \,, y^2 + z^2 \le 2y\right\}$$

di un angolo di 2π attorno all'asse y.

Esercizio 3.4. *Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'azze z del solido, avente densità costante $\rho = 1$, definito come segue*

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \le x \le z \,, 0 \le y \le 1 - z\right\}.$$

Esercizio 3.5. *Calcolare*

$$\int_F \mathrm{e}^z\,dxdydz$$

dove

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 \le x^2 + y^2 \le 1 - z^2 \,,\, -\sqrt{3}\;y \le x \le y\right\}.$$

Esercizio 3.6. *Calcolare*

$$\int_F \frac{x^2 + y^2}{z^2}\,dxdydz$$

dove

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z \le x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \le 5z \,,\, 3z \le x^2 + y^2 \le 4z\right\}.$$

Esercizio 3.7. *Determinare il baricentro del corpo a densità costante $\mu = 2$ che occupa la porzione di spazio*

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \le \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - z\right\}.$$

Esercizio 3.8. *Calcolare* $\iint_E \dfrac{\sin(2x)}{y^2}\,dxdy$ *dove*

$$E = \left\{(x,y) \in [0,\pi/2] \times \mathbb{R} \,:\, y \le \sin x \le 2y \,;\, y \le \cos x \le 3y\right\}.$$

Esercizio 3.9. *Calcola il momento d'inerzia rispetto all'asse z del corpo di densità di massa $\mu(x,y,z) = x^{-3}$ che occupa la regione di spazio*

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le y \le z \le x \le x^2 + y^2 \le 1\}\,.$$

Esercizio 3.10. *Calcolare il baricentro del seguente corpo planare di densità costante*

$$F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \sqrt[3]{x^2} - 1 \le y \le \frac{1 - |x|}{2}\right\}.$$

Disegna F.

Esercizio 3.11. *Calcola* $\iiint_E z\,dxdydz$ *dove*

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + y^2 + 3z^2 \le 9 \,, z \ge y\}\,.$$

Esercizio 3.12. *Data una sfera di raggio R e centro $O = (0,0,0)$, di densità $\mu(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$, calcolarne il momento di inerzia rispetto ad una retta passante per il suo centro. Esprimere il risultato in funzione di massa e raggio.*

Esercizio 3.13. *Calcola il baricentro della semisfera di raggio R centrata in $O = (0,0,0)$ e contenuta nel semispazio $z \geq 0$ (* emisfero nord *) di densità $\mu(x,y,z) = z^2$.*

Esercizio 3.14. *Determina, applicando il teorema del cambio di variabile, il valore del seguente integrale:*

$$\iint_E \frac{e^x}{y}\, dxdy\,,$$

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, e^{2x} \leq y \leq 2e^x\,,\, e^x \leq y \leq 2e^{2x}\}\,.$$

Esercizio 3.15. *Calcolare il baricentro del corpo di densità costante che occupa la seguente prozione di spazio*

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}\,.$$

Esercizio 3.16. *Calcolare* $\iiint_E (x-1)\, dxdydz$*, dove*

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\,,\, 0 \leq z \leq y \leq 1 - x\}\,.$$

Esercizio 3.17. *Calcolare il baricentro del corpo a densità costante che occupa la porzione di spazio*

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 3x^2 \leq y^2 + z^2 \leq 3 - x^2\,,\, yz \leq 0\,,\, z \geq |y|\}\,.$$

Esercizio 3.18. *Calcolare il momento d'inerzia I_z rispetto all'asse z del corpo solido di densità costante δ che occupa la porzione di spazio*

$$E = \{\boldsymbol{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq R\}\,.$$

Dare la risposta in termini di massa M dell'oggetto e del valore R.

Esercizio 3.19. *Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z del corpo solido di densità $\delta(x,y,z) = z$ che occupa la porzione di spazio*

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 - z^2 \leq 1 - 2z\,,\, |z-2| \leq 2\}.$$

Esercizio 3.20. *Calcolare*

$$\iiint_E x^2 z\, dxdydz$$

dove

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq 4\,, x^2 + y^2 \leq z^2\,, 0 \leq z \leq 5\,, y \geq 0\right\}.$$

Esercizio 3.21. *Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z del corpo solido a densità costante d che occupa la parte di spazio*

$$E = \left\{\vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \|\vec{x}\|_2 > R\,,\, \|\vec{x}\|_\infty < 2R\,,\, y > |x|\right\}.$$

Esercizio 3.22. *Data una lunghezza $\ell > 0$, si consideri il triangolo $T \subset \mathbb{R}^3$ avente i vertici nei punti*

$$A = (0,0,2\ell)\,, \quad B = (0,0,\ell)\,, \quad C = (0,\ell,0)\,.$$

Un solido di rotazione S è ottenuto ruotando di un angolo di 2π attorno all'asse z il triangolo T. Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z del corpo solido a densità costante ρ che occupa la parte di spazio individuata da S. Esprimere il risultato in termini della massa M del solido e della lunghezza ℓ.

Esercizio 3.23. *Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$f(x,y) = \begin{cases} y \sin x & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1\,, \\ 1 & \text{se } x^2 + y^2 > 1\,, \end{cases}$$

calcolare l'integrale di f sull'insieme $E = [0,1] \times [0,1]$, dopo aver spiegato perché la funzione f risulta integrabile su E.

Esercizio 3.24. *Determina il valore di* $\iint_E xy\, dxdy$*, dove* $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - \pi x - \pi y \leq 0\}$.

Esercizio 3.25. *Determina il valore di*

$$\iint_E f(x,y)\,dxdy\,,$$

dove

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 9\,,\ |x| + y \le 0\}\,.$$

e $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2y$.

Esercizio 3.26. *Calcolare*

$$\int_E (2x + y)\,dxdy$$

dove E *è la regione di piano delimitata dalle circonferenze* $x^2 + y^2 = 1$ *e* $x^2 + y^2 = 9$ *e dalle rette di equazioni* $y = x$ *e* $y = -\sqrt{3}x$, *nel semipiano* $y \ge 0$.

Esercizio 3.27. *Calcolare*

$$I = \iint_D \sin^2\left(\frac{y}{x}\right)\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] e^{x^2+y^2}\,dxdy$$

dove

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge y \ge 0\,,\ \frac{1}{4} \le x^2 + y^2 \le 1\}\,.$$

Esercizio 3.28. *Determina il valore di* $\iint_E |x+y|\,dxdy$*, dove* $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \le 0 \le y\,, 2 \le x^2 + y^2 \le 3\}$.
Poi determina il valore di $\iint_F |x+y|\,dxdy$*, dove* $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \le 0\,, 2 \le x^2 + y^2 \le 3\}$

Esercizio 3.29. *Calcola il volume dell'insieme*

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, |z| \le 1 + 4x^2 + y^2 \le 10\}\,.$$

Esercizio 3.30. *Calcola*

$$\int_E \frac{x^2z - y^2z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dxdydz$$

dove

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 1 \le x^2 + y^2 \le 2x\,,\ |z - 1| \le 1\}\,.$$

Esercizio 3.31. *Calcolare il momento di inerzia di una palla di raggio* 3 *centrata nell'origine avente densità* radialmente variabile *descritta dalla seguente funzione*

$$\delta(r) = \begin{cases} r & r \le 1 \\ r^{-1} & r > 1 \end{cases} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Esercizio 3.32. *Fissata una* lunghezza $\ell > 0$, *Calcola la massa* M *e il momento d'inerzia* I_z *del corpo a densità costante* $\rho = 3$ *che occupa la porzione di spazio*

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ x^2 + y^2 \le 2\ell y\}\,.$$

Esprimi il valore di I_z *in termini di massa* M *e* ℓ.

Esercizio 3.33. *Dato* $a > 0$, *determina le coordinate del baricentro del solido che occupa la porzione di spazio individuata dall'insieme*

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 2az\}$$

e avente densità di massa inversamente proporzionale alla distanza dall'origine.

Esercizio 3.34. *Un solido è descritto dall'insieme* $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, |z| \le x^2 + y^2 \le 1\}$ *e la sua densità è data dalla funzione*

$$\mu(x,y,z) = \frac{e^{x^2+y^2}}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}\,.$$

Calcola il momento d'inerzia del solido.

Esercizio 3.35. *Sia E l'insieme delimitato dai piani coordinati e dal piano $x+y+z=4$. Calcola $\int_E z\,dxdydz$.*

Esercizio 3.36. *Un oggetto di densità costante μ occupa un volume $V_R \subseteq \mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando l'insieme*

$$E_R = \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq x \geq 0\,,\; x^2+z^2-2Rz \leq 0\}$$

di un angolo 2π attorno all'asse z. Calcola la massa M dell'insieme e il suo momento d'inerzia I_z rispetto all'asse z al variare di R. Poi esprimi il momento d'inerzia in termini di massa M e lunghezza R.

Esercizio 3.37. *Calcolare baricentro e momento d'inerzia del solido $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z \leq 4\,,\; z \geq 0\}$ a densità di massa costante.*

4 Equazioni differenziali

Esercizio 4.1. *Risolvere il seguente problema di Cauchy e determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione del problema di Cauchy.*

$$\begin{cases} y' = y\cos^3 x - (y\cos x)^3 \\ y(\pi/2) = -1/2 \end{cases}$$

Esercizio 4.2. *Risolvere il seguente problema di Cauchy e determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione del seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'' - y' - 6y = 6\cos^2 x\,, \\ y(0) = -\dfrac{11}{52}\,, \qquad y'(0) = -\dfrac{3}{26}\,. \end{cases}$$

Esercizio 4.3. *Risolvere il seguente problema di Cauchy e determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione del seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = e^x + e^{-x}\,, \\ y(0) = 0\,, \qquad y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

Esercizio 4.4. *Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali*

$$y'' - 2y' + 5y = \sin x\cos x\,, \qquad y'' - 2y' + 5y = 10\sin(2x)\,.$$

e risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = \sin x\cos x\,, \\ y(0) = 0\,, \qquad y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

Esercizio 4.5. *Risolvere il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y''' - y' = 2\sin x\,, \\ y(0) = 1\,, \\ y'(0) = 0\,, \\ y''(0) = 1\,. \end{cases}$$

Esercizio 4.6. *Risolvere il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} (1+x^2)y' - (1+y^2)x = 0\,, \\ y(\sqrt{\mathrm{e}^\pi - 1}) = 1\,. \end{cases}$$

Esercizio 4.7. *Risolvi il seguente problema di Cauchy al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} x'' + 4x = \sin(2t+\alpha)\,, \\ x(0) = 1\,, \\ x'(0) = 0\,. \end{cases}$$

Esercizio 4.8. *Risolvi il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} x' = |x|\cos t - x\sin t\,, \\ x(0) = 1\,. \end{cases}$$

Esercizio 4.9. *Risolvi il seguente problema di Cauchy, sia con il metodo dell'Ansatz (detto anche metodo della somiglianza) che con il metodo di variazione delle costanti:*

$$\begin{cases} x'' - 8x' + 12x = e^{3t}\,, \\ x(0) = \frac{2}{3}\,, \\ x'(0) = -3\,. \end{cases}$$

Esercizio 4.10. *Risolvi il problema di Cauchy e determina l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:*

$$\begin{cases} x' - \dfrac{1}{3}x = -2\mathrm{e}^t x^4\,, \\ x(0) = 1\,. \end{cases}$$

Esercizio 4.11. *Risolvi il seguente problema di Cauchy e determina l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:*

$$\begin{cases} x' + tx = \frac{t^3}{x}\,, \\ x(0) = -2\,. \end{cases}$$

Esercizio 4.12. *Risolvi il problema di Cauchy e determina l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}x'' - x' + x = t\,, \\ x(0) = 4\,, \qquad x'(0) = 8\,. \end{cases}$$

Esercizio 4.13. *Risolvi il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x' = \sqrt{\dfrac{1+x}{1+t}}\,, \\ x(0) = 3 \end{cases}$$

e determina l'intervallo massimale di esistenza della soluzione. Disegna l'insieme su cui è ben definita l'equazione differenziale.

Esercizio 4.14. *Risolvi i seguenti problemi di Cauchy*

$$\begin{cases} x' = t^{-1} + \mathrm{e}^{-x} \\ x(1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -t^{-1} + \mathrm{e}^{-x} \\ x(1) = -2\ln 2 \end{cases}$$

specificando l'intervallo massimale di esistenza.

Suggerimento: Introdurre la funzione $y(t) = \mathrm{e}^{x(t)}$, quindi esprimere y' in funzione di y e t, usando l'equazione differenziale data. Si otterrà un'equazione differenziale lineare nella variabile y.

Esercizio 4.15. *Risolvi il seguente problema di Cauchy, al variare di $(x_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$,*

$$\begin{cases} x'' + 3x' + 2x = \mathrm{e}^{-t} \\ x(0) = x_0\,, \quad x'(0) = v_0 \end{cases}$$

Determinare i valori (x_0, v_0) per cui si ha $x(\pi) = 0$ e $x'(\pi) = 0$.

Esercizio 4.16. *Risolvi il seguente problema di Cauchy, al variare di $x_0 \in \mathbb{R}^+, y_0 \in \mathbb{R}^+$,*

$$\begin{cases} x'' + (x')^3 = 0 \\ x(0) = x_0\,, \quad x'(0) = -v_0 \end{cases}$$

Qual è l'intervallo massimale di esistenza della soluzione?
Determinare, se esistono, gli istanti $\tau > 0$ in cui si ha $x(\tau) = 0$.

Esercizio 4.17. *Risolvi i seguenti problemi di Cauchy*

$$\begin{cases} x' = \cos^2 x \ \sin^2 t\,, \\ x(\pi) = \pi\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = [\sin(t+x) + \sin(t-x)]^2\,, \\ x(\pi) = \pi\,. \end{cases}$$

Quali sono gli intervalli massimali di esistenza delle soluzioni?

Esercizio 4.18. *Data l'equazione differenziale* $x' = (x^2-4)\cos(4t)$, *calcolare le soluzioni dei problemi di Cauchy (e specificare per ognuna il suo intervallo massimale di esistenza) aventi dati iniziali*

$$x(\pi) = 1\,, \qquad x\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2\,, \qquad x\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -4\,.$$

Esercizio 4.19. *Risolvi il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x''' + x' - 1 = 0\,, \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 1\,. \end{cases}$$

Esercizio 4.20. *Risolvi il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x'' - x = 6\mathrm{e}^t\,, \\ x(0) = 8\,, \\ x'(0) = 9\,. \end{cases}$$

Esercizio 4.21. *Data l'equazione differenziale*

$$x' = t(2 + x - x^2)$$

determina le soluzioni dei problemi di Cauchy aventi condizioni iniziali

$$[a]\ x(0) = 0\,, \qquad [b]\ x(1) = -1\,, \qquad [c]\ x(0) = -2\,,$$

$$[d]\ x(-2) = 2\,, \qquad [e]\ x(0) = 3\,, \qquad [f]\ x\left(\sqrt{2\ln 2}\right) = 3\,.$$

Di ognuna di esse determina l'intervallo massimale di esistenza.

Esercizio 4.22. *Data una costante* $K > 0$, *considera l'equazione differenziale*

$$x' = x\left(1 - \frac{x}{K}\right).$$

Determina se essa ammette soluzioni costanti e in caso affermativo specifica quali sono. Risolvi i problemi di Cauchy associati alla precedente equazione differenziale aventi dati iniziali

$$[a]\ x(0) = \frac{K}{2}\,, \quad [b]\ x(0) = 2K\,, \quad [c]\ x(0) = -K\,.$$

Di ognuna di esse determina l'intervallo massimale di esistenza.

Esercizio 4.23. *Trova tutte le soluzioni della seguente equazione differenziale e specifica per ognuna l'intervallo massimale di esistenza*

$$x'' + 3x' + 2x = \left(1 - \mathrm{e}^{2t}\right)^{-1/2}.$$

Esercizio 4.24. *Risolvi il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x' - 2tx = e^{t^2} \\ x(1) = 2e \end{cases}$$

Esercizio 4.25. *Risolvi il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{3x'}{x+4} \\ x(0) = -10 \end{cases}$$

Esercizio 4.26. *Trova le soluzioni dell'equazione differenziale*

$$x'' - 2x' = t + e^t\,.$$

Esercizio 4.27. *Risolvi il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 3y = e^t \,, \\ y(0) = 0 \,, \\ y'(0) = 0 \,. \end{cases}$$

Esercizio 4.28. *Scrivi la soluzione generale dell'equazione differenziale $x'' + (2k+6)x' + 12kx = 0$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$. Poi, determina un valore del parametro k per cui la funzione $x(t) = e^{t^2}$ è una soluzione dell'equazione*

$$x'' + (2k+6)x' + 12kx = (4t^2 + 8t - 10)e^{t^2} \,.$$

Infine per tale valore di k scrivi la soluzione del problema di Cauchy con condizioni iniziali $x(0) = 2$ e $x'(0) = -4$.

Esercizio 4.29. *Dato il problema*

$$\begin{cases} yy'(e^{-x} + 1) - 1 = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

esso ammette almeno una soluzione? Se esiste, è unica? Se esiste, determina una soluzione e il suo intervallo massimale di esistenza (può essere utile sapere che $\ln 2 \sim 0,693$).

Esercizio 4.30. *Risolvi il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x'' + x' - 6x = 24 \sinh t \,, \\ x(0) = -1 \,, x'(0) = 0 \,. \end{cases}$$

Esercizio 4.31. *Risolvi il seguente problema di Cauchy e indica l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:*

$$\begin{cases} tx' + 3x = \dfrac{\sin t}{t^2} \,, \\ x(\pi/2) = 1 \,. \end{cases}$$

Esercizio 4.32. *Trova le soluzioni dell'equazione differenziale*

$$x'' + 8x' + 25x = \sin t \,.$$

Quindi individua la soluzione che rispetta le condizioni iniziali $x(0) = 19/80$ e $x'(0) = -1$.

Esercizio 4.33. *Calcola la soluzione del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} tx^2 + t + t^2 x x' - x x' = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

specificando l'intervallo massimale di esistenza.

Esercizio 4.34. *Calcola la soluzione del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x'' - x = 2t \\ x(0) = 4 \\ x'(0) = 0 \,. \end{cases}$$

Esercizio 4.35. *Trovare la soluzione u_a del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'' + 4u = \cos(at) \\ u(0) = 0 \,, \quad u'(0) = 1 \end{cases}$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$. Per quali valori di a la soluzione u_a non è limitata?

Esercizio 4.36. *Risolvere il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} u''' - u = 1 \\ u(0) = 0 \,, u'(0) = 1 \,, u''(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4.37. *Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:*

$$\begin{cases} u' = u^2 - u - 2 \\ u(0) = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} u' = u^2 - u - 2 \\ u(0) = 3 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo massimale di esistenza delle soluzioni.

5 Campi vettoriali

Esercizio 5.1. *Dato il campo vettoriale* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definito come*

$$F(x, y, z) = (\, 2xz^2 + y^2 \,,\, z + 2xy \,,\, 2x^2 z + y \,)\,,$$

dimostra che è irrotazionale. Calcola l'integrale di linea del campo F *lungo la curva* $\gamma : [0, \pi/4] \to \mathbb{R}^3$ *definita come*

$$\gamma(t) = (\, \tan t \,,\, \sin t \,,\, \cos t \,)\,.$$

Esercizio 5.2. *Calcola il flusso del campo* $F(x, y, z) = (xy^2, x^2 z, zy^2 + zx)$ *uscente dalla superifice* S *frontiera del solido*

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 3 - x^2 - y^2 \,,\, z \le 2\}\,.$$

Esercizio 5.3. *Dato il campo vettoriale* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definito come*

$$F(x, y, z) = (xy \,,\, y^2 \,,\, yz)\,,$$

calcolare il flusso di F *uscente dall'insieme*

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2z^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \ge 4 \,, y \ge -x\}$$

Esercizio 5.4. *Dato il campo vettoriale*

$$F(x, y, z) = (x + y \,,\, 0 \,,\, x^2 z)\,,$$

determina il valore del flusso del campo attraverso la superficie

$$\begin{aligned}\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \,, z \ge 0\} \\ \cup \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 1\}\,.\end{aligned}$$

Esercizio 5.5. *Dato il campo vettoriale*

$$F(x, y, z) = \left(xyz \,,\, \frac{x^2 y^2}{2} \,,\, \log z \right),$$

determina il suo dominio e calcolane il rotore. Si tratta di un campo conservativo? Calcola l'integrale di linea del campo lungo la curva semplice con sostegno

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2 = 1\right\}\,.$$

Esercizio 5.6. *Dato il campo vettoriale*

$$F(x, y) = \left(\frac{y - 4x}{4x^2 + y^2} \,,\, -\frac{x + y}{4x^2 + y^2} \right),$$

determina il suo dominio e calcolane il rotore. Si tratta di un campo conservativo? Quanto vale l'integrale di linea del campo lungo la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ *definita come* $\gamma(t) = (\cos t, 2 \sin t)$*?*

Esercizio 5.7. *Dato il campo vettoriale* $F(x, y, z) = (xz + x, yz + y, z^2)$*, calcola il flusso del campo attraverso la superficie*

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4 \,,\, |z| \le 3\}$$

sia con calcolo diretto, sia con l'uso del teorema della divergenza.

Esercizio 5.8. *Dato il campo vettoriale*

$$F(x, y, z) = (y \sin(xy), x \sin(xy) + z \cos(yz), y \cos(yz))\,,$$

dimostra che è irrotazionale. Calcolane un potenziale. Calcola il lavoro del campo F *lungo la curva* $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(s) = (s^2, s, -s^2)$ *sia con calcolo diretto che con l'uso del potenziale.*

L'esercizio può essere posto anche con il seguente linguaggio matematico.

Data la forma differenziale

$$\omega(x,y,z) = y\sin(xy)\,dx + [x\sin(xy) + z\cos(yz)]\,dy + y\cos(yz)\,dz\,,$$

dimostra che è chiusa. Ammette una primitiva? Calcola $\int_\gamma \omega$ *dove* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(s) = (s^2, s, -s^2)$ *sia con calcolo diretto che con l'uso della primitiva.*

Esercizio 5.9. *Fissata la terna di valori* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ *è dato il campo vettoriale*

$$F(x,y,z) = (axy + 3yz, x^2 + 3xz + by^2 z, bxy + cy^3)\,,$$

Determina per quale terna (a,b,c) *è possibile calcolare il lavoro del campo* F *lungo una curva* γ *di cui si conosce solo il punto iniziale* $(0,1,-1)$ *e il punto finale* $(2,1,1)$*. Quanto vale l'integrale in questo caso?*

Esercizio 5.10. *Calcola l'integrale*

$$\int_\sigma 2ydx + xdy + 2dz$$

dove σ *è la curva che parametrizza il sottoinsieme*

$$\Sigma \subseteq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + y^2\,,\ y = 2x\}$$

di estremi l'origine $O = (0,0,0)$ *e il punto* $P = (2,4,18)$*.*

Con linguaggio fisico: calcola l'integrale del campo $G(x,y,z) = (2y, x, 2)$ *lungo la curva che parametrizza il sottoinsieme*

$$\Sigma \subseteq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + y^2\,,\ y = 2x\}$$

di estremi l'origine $O = (0,0,0)$ *e il punto* $P = (2,4,18)$*.*

Esercizio 5.11. *Data la costante* $h > 0$*, calcolare l'integrale del campo* $F(x,y,z) = (x^2, y^3, z^3)$ *sul bordo dell'insieme*

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le z^2\,,\ 0 \le z \le h\}\,.$$

Esercizio 5.12. *Dato il campo vettoriale* $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definito come*

$$F(x,y,z) = \frac{(2x, 1, 4z)}{x^2 + y + 2z^2 + 1}$$

e la curva $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^3$ *definita come* $\gamma(t) = (t, t^3, t^2)$*. Spiegare perché è possibile calcolare l'integrale del campo* F *lungo la curva* γ *sebbene il suo dominio* Ω *non coincida con tutto lo spazio* $\mathbb{R}^3$ *(scrivere chi è* Ω*). Calcolare quindi tale integrale.*

Esercizio 5.13. *Sia* V *la regione di spazio delimitata dai piani* $x = 0$*,* $y = 0$*,* $z = 0$ *e* $2x + 2y + z = 4$ *e* Σ *il suo bordo. Dato il campo vettoriale* $F(x,y,z) = (2x^2 - 3z, -2xy, -4x)$ *calcolare il flusso del campo uscente da* Σ*.*

Esercizio 5.14. *L'insieme* $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z = 4\,,\ z \ge 0\}$ *è il sostegno di una superficie. Calcolare il flusso del campo* $F(x,y,z) = (y^2 - 4z, 4z - y^2, zx^2 + zy^2)$ *attraverso questa superficie.*

6 Pensati per i matematici

In questa parte compaiono solo esercizi, senza riferimento all'appello in cui sono stati assegnati.

Esercizio 6.1. *Data la curva* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ *definita come* $\gamma(t) = (t^2, t, -t^2)$ *e data la forma differenziale* $\omega(x,y,z) = (2y + yz)\,dx + (2x + xz)\,dy + xy\,dz$ *calcolare l'integrale* $\int_\gamma \omega$ *eseguendo esplicitamente i calcoli.*

In un secondo momento, verifica che $d\omega = 0$ *e calcola una primitiva di* ω*. A questo punto utilizza un secondo metodo per calcolare il precedente integrale.*

Esercizio 6.2. *Calcola l'integrale* $\displaystyle\int_\varphi \omega$ *dove*

$$\omega(x,y,z,w) = xy\,dxdw + y\,dydz - w\,dxdz$$
$$\varphi : [0,1] \times [0,2] \to \mathbb{R}^4, \qquad \varphi(u,v) = (u^2, uv, u+v, 2uv^2).$$

Esercizio 6.3. *Trova le soluzioni del sistema di equazioni differenziali lineare* $z' = Az$ *con* $z = (x,y)$ *e* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Prima alternativa. *Trova una matrice diagonale* D *e una matrice invertibile* P *tale che* $A = P^{-1}DP$*. Effettua la sostituzione* $w = Pz$ *in modo da ottenere un sistema lineare* $w' = Bw$*. Chi è la matrice* B*? Trova tutte le soluzioni del sistema* $w' = Bw$*. Usa queste soluzioni per scrivere le soluzioni del sistema originale.*

Seconda alternativa. *Trasforma il sistema in un'equazione differenziale del secondo ordine manipolando in maniera opportuna le equazioni differenziali che costituiscono il sistema, trova le soluzioni di quest'ultima e da queste ricava le soluzioni del sistema lineare.*

Esercizio 6.4. *Date le forme differenziali definite su* $\mathbb{R}^4$

$$\omega(x,y,z,w) = (xy)dx \wedge dz + (y^2w)dy \wedge dz + (xz)dx \wedge dw$$
$$\tilde{\omega}(x,y,z,w) = y\ dx + z\ dy + w\ dz + x\ dw$$

calcola $\gamma = \omega \wedge \tilde{\omega} + d\omega$*. Infine calcola* $\eta = \gamma \wedge \omega$*. Scrivere il risultato come combinazione lineare degli elementi della base canonica dello spazio appropriato.*

Esercizio 6.5. *Fissato* $x_0 = (-1,-1,-1,-1)$*, considerare la forma differenziale* $\omega : U \to \Omega_2(\mathbb{R}^4)$ *definita sull'insieme* $U = \{x \in \mathbb{R}^4 : \|x - x_0\|_2 > 1\}$ *come*

$$\omega(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_2 - x_1x_4)dx_1 \wedge dx_2 + (x_3 - x_1x_2)dx_1 \wedge dx_4 + (x_1)dx_3 \wedge dx_4\,.$$

È chiusa? La forma differenziale soddisfa le ipotesi del teorema di Poincaré? È esatta? Calcolare l'integrale $\int_\sigma \omega$ *dove* $\sigma : [0,1] \times [0,2] \to \mathbb{R}^4$ *è definita come*

$$\sigma(u,v) = (u, u+v, u^2, v)\,.$$

Esercizio 6.6. *Data la forma differenziale*

$$\omega(x,y,z,w) = y\,dxdydz + zw\,dxdydw + y\,dxdzdw - x\,dydzdw\,,$$

calcolare $\displaystyle\int_\sigma \omega$ *dove* $\sigma : [0,1]^3 \to \mathbb{R}^3$ *è definita come*

$$\sigma(r,s,t) = (rs + t\,,\ r + s\,,\ st\,,\ r)\,.$$

Esercizio 6.7. *Dato l'insieme*

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le z\,, z \in [0,2]\right\}$$

fornisci una sua 3-parametrizzazione σ *e abbozzane un disegno, dopo aver disegnato l'insieme*

$$S = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,0,z) \in V\right\}.$$

Quindi calcola esplicitamente il bordo orientato $\partial\sigma$ *a partire dalla parametrizzazione fornita. Disegna il sostegno delle 2-superfici che costituiscono il bordo e specifica in quale modo esse concorrono nel calcolo di un integrale* $\displaystyle\int_{\partial\sigma} \omega$ *dove* ω *è una forma differenziale. Specifica chi è il codominio di* ω *in questo caso.*

Esercizio 6.8. *Dato l'insieme*

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 \le \sin^2 x \,, x \in [0,\pi]\right\}$$

fornisci una sua 3*-parametrizzazione* σ *e abbozzane un disegno. Quindi calcola esplicitamente il bordo orientato* $\partial\sigma$ *a partire dalla parametrizzazione fornita. Disegna il sostegno delle* 2*-superfici che costituiscono il bordo e specifica in quale modo esse concorrono nel calcolo di un integrale* $\displaystyle\int_{\partial\sigma} \omega$ *dove* ω *è una forma differenziale.*

Esercizio 6.9. *Data la forma differenziale*

$$\omega(x,y,z) = y\,dxdy + zdxdz\,,$$

calcolare $\displaystyle\int_\sigma \omega$ *dove* $\sigma : [0,1] \times [0,2] \to \mathbb{R}^3$ *è definita come*

$$\sigma(r,s) = (r^2 s\,,\, r+s\,,\, rs)\,.$$

Esercizio 6.10. *Calcola* $\int_\sigma \omega$ *dove*

$$\omega(p,q,r,s,t) = t\,dpds + \sin(pq)e^r\,dpdt + q\,dqds$$

e $\sigma : [0,1] \times [0,2] \to \mathbb{R}^5$ *è definita come*

$$\sigma(x,y) = (x^2\,,\, y^2 + x\,,\, \cos(xy^2)x^2\,,\, 3x - 2y\,,\, x^3)\,.$$

Esercizio 6.11. *Data la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *e la funzione* $b(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ 3e^{3t} \end{pmatrix}$*, considerare il sistema differenziale lineare* $z'(t) = Az(t) + b(t)$*. Trovare gli autovalori e le autofunzioni del sistema omogeneo, ovvero i valori* λ_1, λ_2 *e le soluzioni* z_1, z_2 *tali che* $z_i' = Az_i = \lambda_i z_i$*. Scrivi quindi la matrice fondamentale* $\Phi(t)$ *associata e trova la soluzione del sistema non omogeneo tale che* $z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$*.*

Esercizio 6.12. *Trova le soluzioni del seguente sistema di equazioni*

$$\begin{cases} x' + 4x + y' = 1\,, \\ x' - 2x + y = t^2\,. \end{cases}$$

Esercizio 6.13. *Data la forma differenziale* $\omega = x^2 s\,dxdydz + y^2 zdydzds$ *e l'insieme*

$$E = \{(x,y,z,s) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 \le 1\,, z^2 + s^2 \le 4\}$$

calcola $\int_E d\omega$*.*

Esercizio 6.14. *Data la forma differenziale*

$$\omega(x,y,z,t) = xt\,dxdy + xy\,dxdz + xy\,dzdt\,.$$

calcola $\int_\sigma \omega$ *dove* σ *è una parametrizzazione dell'insieme*

$$\Sigma = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + z^2 = y^2 + 4t^2 = 4\}\,.$$

Esercizio 6.15. *Scrivi tutte le soluzioni del sistema*

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 4x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$$

Trova la soluzione tale che $x(0) = (x_1(0), x_2(0)) = (1,1)$*.*

Esercizio 6.16. *Considerare l'equazione differenziale* $\Delta u + u^3 = 0$*, dove* $\Delta u = \mathrm{div}(\nabla u) = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$*. Di questa equazione differenziale si cercano soluzioni* $u : D \to \mathbb{R}$ *con* $D \subset \mathbb{R}^4$*. Assumiamo che* u *sia soluzione della precedente equazione differenziale e valga* $u(x_1, x_2, x_3, x_4) = v\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}\right)$*, dove* $v : I \to \mathbb{R}$ *con* $I \subset \mathbb{R}$*. Quale equazione differenziale del secondo ordine risolve* $v = v(r)$*? [Suggerimento: la risposta è del tipo:* $v'' + \frac{\alpha}{r} v' + v^\beta = 0$ *dove* α *e* β *sono costanti che lo studente deve individuare]*

Esercizio 6.17. *Considerare l'equazione differenziale* $v'' + \dfrac{3}{r} v' + v^3 = 0$*, dove la variabile* r *è definita nell'intervallo* $]0, +\infty[$ *. Data una soluzione* $v = v(r)$ *della precedente equazione, definire le funzioni* $x(t) = v(e^t)e^t$ *e* $y(t) = x'(t)$*. Quale sistema di equazioni differenziali del tipo*

$$\begin{cases} x' = p(x, y)\,, \\ y' = q(x, y) \end{cases}$$

risolve la coppia di funzioni (x, y)*? Trova una funzione non costante* H *tale che* $\frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) = 0$ *per ogni soluzione del precedente sistema.*

Esercizio 6.18. *Trovare una parametrizzazione* σ *dell'insieme*

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\,,\ x \leq 0\,,\ y \leq 0\}\,.$$

Calcolare l'integrale su $\partial\sigma$ *della forma differenziale*

$$\omega(x, y, z) = 4z^2\, dy \wedge dz + 3y^3\, dz \wedge dx + 2x^2 dx \wedge dy\,.$$

Esercizio 6.19. *Fornisci una parametrizzazione* $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$*, dell'insieme*

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\,,\ z \leq 0\}\,.$$

Poi costruisci il suo bordo orientato $\partial\sigma$ *seguendo la procedura illustrata durante il corso, specificando quali componenti di* $\partial\sigma$ *degenerano in superfici non regolari e quali coppie invece sono formate da superfici equivalenti con orientazione opposta. Specifica poi come le precedenti concorrono al calcolo dell'integrale* $\int_{\partial\sigma} \omega$ *dove* ω *è una 2-forma generica.*

Esercizio 6.20. *Calcolare* $\int_\sigma \omega$ *dove* ω *è la 3-forma differenziale*

$$\omega(r, s, t, u, v) = uv\, dr ds dt + r\, ds dt dv + v\, dt du dv$$

e $\sigma : [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3] \to \mathbb{R}^5$ *è definita come*

$$\sigma(x, y, z) = (x + z\,,\ x^2\,,\ z\,,\ y^3 + x^2\,,\ y^2 + z)\,.$$

Esercizio 6.21. *Fornire la parametrizzazione* $\sigma : I \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *di un cono solido di raggio* R *e altezza* h*. Successivamente calcolare i vari elementi che ne costituiscono il bordo orientato* $\partial\sigma$*. Abbozzare un disegno (o più di uno se più comodo) in cui si evidenzia il sostegno di* σ *e il supporto di ogni elemento che costituisce il bordo orientato.*

Esercizio 6.22. *Dato un sistema lineare di di equazioni differenziali* $u'(t) = Mu(t)$*, quale proprietà si può dedurre dalla conoscenza di autovalori e autovettori della matrice* M*?*

Trova le soluzioni del sistema lineare di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = x + z\,, \\ y' = -2x - y + z\,, \\ z' = 0\,. \end{cases}$$

7 Altri esercizi

Esercizio 7.1. *Un solido di rotazione S è ottenuto ruotando di un angolo di 2π attorno all'asse z l'insieme*

$$T = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \le 2y - 1 \le 1 - z \le y\}$$

Calcolare $\iiint_S z\, dxdydz$.

Esercizio 7.2. *Calcolare gli integrali*

$$\iiint_E (x^2 + y^2)\, dxdydz\,, \qquad \iiint_F (x^2 + y^2)\, dxdydz\,,$$

dove

$$E = \left\{\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 1 < \|\vec{x}\|_2\,,\ \|\vec{x}\|_\infty < 2\,, y \ge |x|\right\},$$
$$F = \left\{\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 1 < \|\vec{x}\|_2 < \|\vec{x}\|_\infty < 2\right\}.$$