OTTIMO SIMMETRICO
per il progetto del regolatore di velocità

INTRODUZIONE

La tradizionale procedura di predisposizione dei parametri di un regolatore standard (p.es. di tipo PI) detto "*ottimo di ampiezza*" (o modulo ottimo) opera nel campo della frequenza su impianti caratterizzati da un polo dominante ed altri disposti più lontani dall'asse immaginario. La tecnica usualmente impone una cancellazione zero (del regolatore)-polo dominante (dell'impianto) e seleziona il guadagno in modo da ottenere in alternativa un prefissato margine di fase o banda passante.

Una alternativa è il ricorso alla cosiddetta tecnica dell'*ottimo simmetrico*.

OBIETTIVI

La tecnica dell'ottimo simmetrico opera convenientemente su impianti un cui possibile modello abbia un polo nell'origine e un altro polo discosto dall'asse immaginario, cioè la cui f.d.t. sia del tipo

$$G_{imp} = K \frac{1}{1+s\tau} \frac{1}{sT}$$

L'obiettivo è riuscire, tramite una procedura analitica, a determinare i parametri di un regolatore PI con due modalità alternative:

1. fissato un certo margine di fase φ_M calcolare guadagno e costante di tempo del regolatore PI affinchè la banda passante del sistema di ciclo chiuso sia massima;
2. fissata una certa banda passante calcolare guadagno e costante di tempo del regolatore PI affinchè il margine di fase φ_M sia massimo.

Inoltre con questa procedura si ottiene anche una ottima reiezioni ai disturbi additivi che intervengano nella catena diretta del sistema regolato.

CATENA APERTA

La f.d.t. di catena diretta (si ipotizzi una reazione unitaria e quindi essa coincide anche con la f.d.t. di catena aperta) è dunque:

$$G_{ca} = R_c G_{imp} = K_c \frac{1+s\tau_c}{s\tau_c} \; K \frac{1}{1+s\tau} \frac{1}{sT}$$

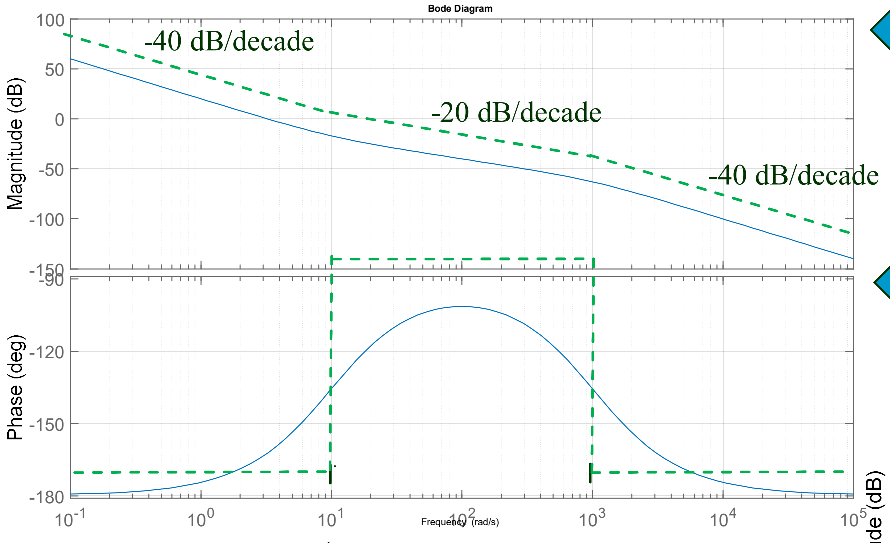
Si osserva immediatamente che non conviene sfruttare la tecnica della cancellazione zero-regolatore/polo-impianto in quanto rimarrebbe una f.d.t. di ciclo aperto avente due poli nell'origine con conseguente rotazione di fase costante pari a -180° e quindi un sistema di ciclo chiuso al limite dell'instabilità (margine di fase nullo).

Una seconda osservazione riguarda la posizione relativa tra zero-regolatore ($1/\tau_c$) e polo-impianto ($1/\tau$), per garantire la stabilità del sistema di ciclo chiuso dovrà essere:

$$\frac{1}{\tau_c} < \frac{1}{\tau}$$

CATENA APERTA

Infatti si osservino i seguenti ipotetici diagramma di Bode della f.d.t. di catena aperta



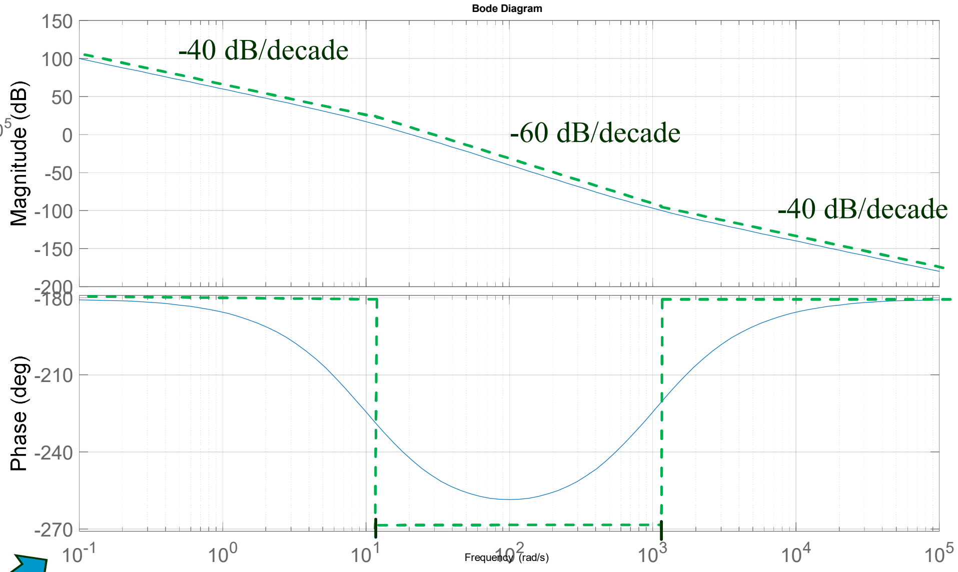
$\frac{1}{\tau_c}$ $\qquad$ $\frac{1}{\tau}$

$$\frac{1}{\tau_c} < \frac{1}{\tau}$$

Qui il tratto intermedio scende con pendenza -20 dB/decade e la fase sale sopra -180° tendendo a -90°. Ammette margine di fase positivo.

Tratteggio: diagramma asintotico

Linea continua: diagramma reale



$\frac{1}{\tau}$ $\qquad$ $\frac{1}{\tau_c}$

$$\frac{1}{\tau_c} > \frac{1}{\tau}$$

Qui il tratto intermedio scende con pendenza -60 dB/decade e la fase decresce sotto -180° tendendo a -270°. NON ammette margine di fase positivo.

CONDIZIONI PER L'OTTIMO SIMMETRICO

Dalle considerazioni precedenti si riconosce che conviene far in modo che il diagramma di Bode dell'ampiezza della f.d.t. di ciclo aperto G_{ca} attraversi l'asse 0 dB in corrispondenza alla pulsazione per la quale si ha il massimo della fase (si veda il primo diagramma della dia precedente) che corrisponde anche al valore massimo del margine di fase chiamato φ_M .

Pertanto le due condizioni che si devono imporre per ottenere questa soluzione (detta dell'ottimo simmetrico) sono:

$$\begin{cases} \left| G_{ca}\left(j\omega_d \right) \right| = 1 \\ \arg\left(G_{ca}\left(j\omega_d \right) \right) = \max\left(\arg\left(G_{ca}\left(j\omega \right) \right) \right) = -180° + \varphi_M \end{cases}$$

ω_d è la pulsazione alla quale si ha il massimo della fase (argomento) della $G_{ca}(j\omega)$ (margine di fase massimo φ_M).

PULSAZIONE PER MARGINE DI FASE MASSIMO

L'espressione dell' argomento della f.d.t. G_{ca} è:

$$\arg\left(G_{ca}\left(j\omega\right)\right) = -180° + \operatorname{arctg}\left(\omega\tau_c\right) - \operatorname{arctg}\left(\omega\tau\right)$$

da cui il margine di fase φ è espresso da:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\omega\tau_c\right) - \operatorname{arctg}\left(\omega\tau\right)$$

La condizione sulla fase della dia precedente si ottiene uguagliando a zero la derivata rispetto a ω dell'espressione dell'argomento della f.d.t. G_{ca}:

$$\frac{d}{d\omega}\left(\arg\left(G_{ca}\left(j\omega\right)\right)\right) = \frac{\tau_c}{1+\left(\omega\tau_c\right)^2} - \frac{\tau}{1+\left(\omega\tau\right)^2} = 0$$

La soluzione di questa equazione in ω conduce a: $\omega_d = \dfrac{1}{\sqrt{\tau_c\tau}}$

PULSAZIONE PER MARGINE DI FASE MASSIMO

Senza ulteriori indagini analitiche, osservando il diagramma di Bode della dia 5 si riconosce che ω_d è un massimo per la fase di G_{ca}, pertanto il margine di fase massimo φ_M è espresso da:

$$\varphi_M = \text{arctg}(\omega_d \tau_c) - \text{arctg}(\omega_d \tau) = \text{arctg}\left(\sqrt{\frac{\tau_c}{\tau}}\right) - \text{arctg}\left(\sqrt{\frac{\tau}{\tau_c}}\right)$$

Si chiami $a = \sqrt{\dfrac{\tau_c}{\tau}}$ da cui $\tau_c = a^2 \tau$

Ne viene: $\varphi_M = \text{arctg}(a) - \text{arctg}\left(\dfrac{1}{a}\right)$

Dall'espressione di ω_d si riconosce che essa è la media geometrica tra $1/\tau_c$ e $1/\tau$. Risulta ancora che, sulla scala logaritmica, ω_d si posiziona a metà tra $1/\tau_c$ e $1/\tau$. Infatti si verifica facilmente:

$$\log\frac{1}{\tau} - \log\omega_d = \log\omega_d - \log\frac{1}{\tau_c} \qquad \text{da cui} \qquad \log\frac{1}{\tau\omega_d} = \log\omega_d \tau_c$$

DETERMINAZIONE DELL'OTTIMO SIMMETRICO (costante di tempo del PI)

Si ricordino le seguenti relazioni trigonometriche notevoli:

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}(\alpha)-\mathrm{tg}(\beta)}{1+\mathrm{tg}(\alpha)\,\mathrm{tg}(\beta)} \qquad\qquad \sin^2(\alpha)=\frac{\mathrm{tg}^2(\alpha)}{1+\mathrm{tg}^2(\alpha)}$$

Con semplici passaggi, si può dedurre:

$$\mathrm{tg}^2\,\varphi_M=\frac{(\tau_c-\tau)^2}{4\tau_c\tau}$$

e quindi:

$$\sin\varphi_M=\frac{\tau_c-\tau}{\tau_c+\tau} \qquad \text{ed anche} \qquad \tau_c=\tau\,\frac{1+\sin\varphi_M}{1-\sin\varphi_M}$$

La prima relazione (a sx), di verifica, fornisce il margine di fase una volta determinato τ_c.

La seconda (a dx), di progetto, consente di determinare τ_c una volta fissato il margine di fase φ_M.

DETERMINAZIONE DELL'OTTIMO SIMMETRICO (guadagno del PI)

Allo scopo di imporre la prima delle condizioni per l'ottimo simmetrico indicata nella dia 6, si calcoli il modulo della f.d.t G_{ca}:

$$\left|G_{ca}\left(j\omega\right)\right| = K_c K \frac{1}{\omega^2 \tau_c T} \frac{\sqrt{1+\omega^2\tau_c^2}}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$$

alla pulsazione si sostituisca ω_d e si eguagli a 1; riconoscendo che valgono: $\omega_d \tau_c = a$ e $\omega_d \tau = 1/a$

si ha:

$$\left|G_{ca}\left(j\omega_d\right)\right| = K_c K \frac{1}{\omega_d a T} \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}} = 1$$

da cui, in alternativa:

$$K_c K \frac{1}{\omega_d T} = 1 \qquad K_c K \frac{\tau_c}{aT} = 1 \qquad K_c K \frac{a\tau}{T} = 1$$

DETERMINAZIONE DELL'OTTIMO SIMMETRICO (guadagno del PI)

Dalle ultime tre relazioni della dia precedente si deducono altrettante relazioni che consentono di determinate il guadagno del regolatore PI:

$$K_c = \frac{\omega_d T}{K} \qquad K_c = \frac{aT}{K\tau_c} \qquad K_c = \frac{T}{a\tau K}$$

in particolare, per mezzo dell'ultima equazione si determina il guadagno in funzione dei parametri dell'impianto e del coefficiente a.

PROCEDURE PER L'OTTIMO SIMMETRICO

Con la procedura prima descritta si riescono a determinare i parametri del regolatore PI con in alternativa:

1. fissato un margine di fase φ_M voluto si determinano i parametri del PI (τ_c e K_c) per ottenere il massimo valore di ω_d (frequenza di attraversamento 0dB della f.d.t. di ciclo aperto) che viene assunto come valore della banda passante del sistema reazionato (quindi del sistema di controllo):

$$\tau_c = \tau \frac{1+\sin\varphi_M}{1-\sin\varphi_M} \qquad a = \sqrt{\frac{\tau_c}{\tau}} \qquad K_c = \frac{T}{a\tau K} \qquad \omega_d = \frac{1}{\sqrt{\tau_c \tau}}$$

2. fissata una certa banda, cioè ω_d, si determinano i parametri del PI (τ_c e K_c) per ottenere il massimo valore di margine di fase consentito

$$K_c = \frac{\omega_d T}{K} \qquad \tau_c = \frac{1}{\tau\,\omega_d^2} \qquad a = \sqrt{\frac{\tau_c}{\tau}} \qquad \varphi_M = \arcsin\left(\frac{\tau_c - \tau}{\tau_c + \tau}\right)$$

CONSIDERAZIONI SUL VALORE DEL PARAMETRO "a"

Il coefficiente *a* dà un'indicazione della "distanza" zero-polo (quelli non nulli) della f.d.t. di ciclo aperto G_{ca}. Infatti se si aumenta a, aumenta anche τ_c (visto che τ è relativo all'impianto esso non varia), quindi lo zero $1/\tau_c$ del PI diminuisce e dunque si sposta verso le basse frequenze allontanandosi dal polo $1/\tau$ (si veda diagramma di Bode qualitativo sx della dia 5). Sempre dal diagramma citato si osserva che un aumento della distanza tra zero-polo (aumento di *a*) comporta un aumento del margine di fase e contemporaneamente una diminuzione della pulsazione ω_d.

Stesse considerazioni possono essere dedotte dalle espressioni analitiche proposte precedentemente:

$$\varphi_M = \arcsin\left(\frac{\tau_c - \tau}{\tau_c + \tau}\right)$$

è funzione crescente rispetto τ_c, in quanto la sua derivata rispetto τ_c è positiva.

$$\omega_d = \frac{1}{\sqrt{\tau_c \tau}}$$

palesemente ω_d diminuisce all'aumentare di τ_c.

PROGETTO DEL REGOLATORE DI VELOCITA' CON OTTIMO SIMMETRICO

Si consideri un azionamento a c.c. costituito da due cicli di regolazione uno interno di corrente e l'altro più esterno di velocità.

Si supponga di aver già progettato il regolatore di corrente con una certo valore della banda passante ω_{ri} (la pulsazione di taglio del diagramma di Bode del modulo della f.d.t. ciclo chiuso della regolazione di corrente $I_{a,rif}/I_a$), legato a vari fattori tra i quali: caratteristiche fisiche del motore (taglia) e prestazioni meccaniche raggiungibili.

Si voglia progettare i parametri K_v e τ_v del regolatore di velocità esterno al ciclo di corrente. Le prestazioni della regolazione di velocità che si vogliono perseguire sono rappresentate da:

a) un margine di fase φ_v adeguato,

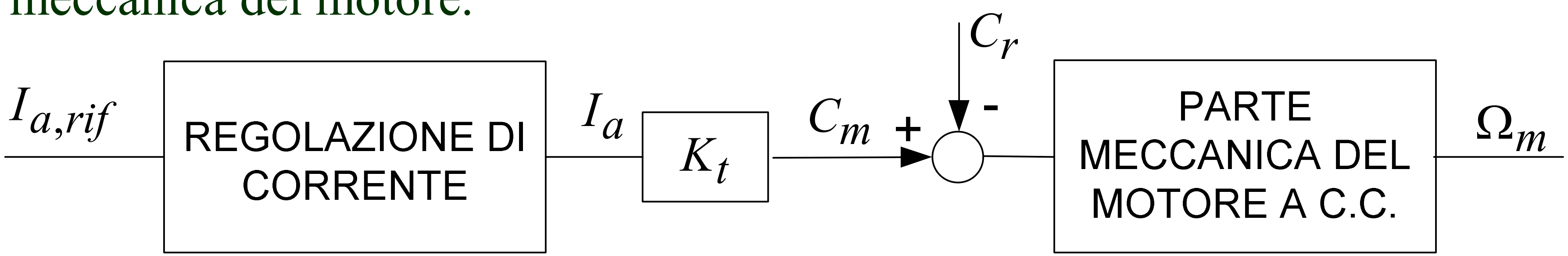
b) la massima banda passante ω_v ottenibile con tale margine di fase,

c) buona (tendente all'ottimo) reiezione al disturbo di coppia.

PROGETTO DEL REGOLATORE DI VELOCITA' CON OTTIMO SIMMETRICO

Gli obiettivi elencati nella precedente dia sono quelli tipicamente ottenuti ricorrendo alla tecnica dell'ottimo simmetrico. Ma per poter applicare convenientemente tale tecnica si deve ipotizzare un modello dell'impianto del tipo indicato precedentemente (un polo nell'origine e un polo discosto dall'origine assi).

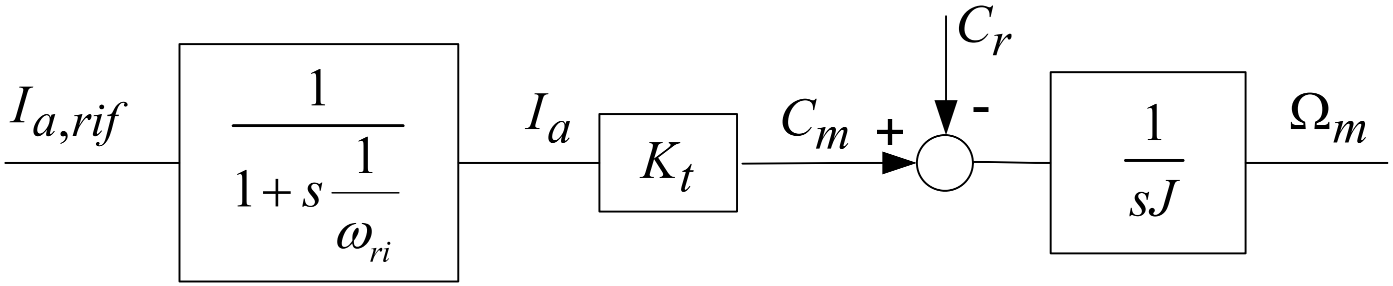
L'impianto sotto esame comprende la regolazione di corrente e la parte meccanica del motore.



Si ricordi che la precedente procedura per la progettazione del regolatore di velocità considerava la regolazione di corrente modellizzabile con una trasferenza unitaria (pur di rispettare il rapporto 1/10 ca. tra le bande di velocità e di corrente) e il modello della parte meccanica del motore costituito da un sistema del primo ordine (momento d'inerzia e coefficiente di attrito viscoso).

PROGETTO DEL REGOLATORE DI VELOCITA' CON OTTIMO SIMMETRICO

In alternativa al modello ricordato, si può ipotizza di modellizzare la regolazione di corrente con un sistema del primo ordine il cui polo coincida con la pulsazione della banda passante (costante di tempo uguale all'inverso della stessa). Inoltre si può semplificare il modello della parte meccanica trascurando il coefficiente di attrito viscoso (ponendolo uguale a zero). In tal modo l'impianto può essere modellizzato con lo schema seguente:



Così si ricadrebbe nella forma prevista per l'applicazione dell'ottimo simmetrico con le seguenti corrispondenze:

$$\tau = \frac{1}{\omega_{ri}} \qquad K = K_t \qquad T = J$$

ESEMPIO

Ci si riferisca all'azionamento a c.c. il cui motore ha le caratteristiche già esposte in precedenza. Si supponga di aver progettato un regolatore di corrente per una banda ω_{ri}. E si voglia riprogettare il regolatore di velocità il cui margine di fase sia $\varphi_M=60°$.

Il calcolo della costante di tempo del regolatore conduce a:

$$\tau_v = \frac{1}{\omega_{ri}} \frac{1+\sin(60)}{1-\sin(60)} = \frac{1}{\omega_{ri}} \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \cong \frac{13.93}{\omega_{ri}}$$

$$\omega_d \cong \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\omega_{ri}} \frac{13.93}{\omega_{ri}}}} = \frac{\omega_{ri}}{\sqrt{13.93}} \cong \frac{\omega_{ri}}{3.73} \cong 0.2679\omega_{ri}$$

$$K_v = \frac{J\omega_{ri}}{3.73K_t} \cong \frac{0.3}{3.73 \cdot 2.69}\omega_{ri} \cong 0.02966\omega_{ri}$$

$$a = \sqrt{\frac{1+\sin(\varphi_M)}{1-\sin(\varphi_M)}} \cong \sqrt{13.93} \cong 3.73$$

ESEMPIO

Una prima osservazione di carattere generale è che fissato un margine di fase di 60° il valore massimo della banda di velocità che si riesce ad ottenere (usando questa tecnica) si attesta intorno al 26% della banda di corrente. Ragionamenti analoghi si possono dedurre per altri valori del margine di fase (o addirittura pervenire ad una relazione che lega il rapporto tra le bande in funzione del margine di fase).

Come esempio numerico si ipotizzi di aver progettato un regolatore di corrente con una banda passante di 100 HZ (ω_{ri}=628 rad/s), i parametri del regolatore di velocità diventano:

$$\tau_v = \frac{13.93}{\omega_{ri}} = 22,2 \cdot 10^{-3} \qquad\qquad \omega_d = \frac{\omega_{ri}}{3.73} = 168\ \text{rad/s} \quad \Rightarrow \quad 26.8\ \text{Hz}$$

$$K_v = 0.02966\omega_{ri} = 18.6$$

Se in fase di verifica svolta tramite analisi del diagramma di Bode di ciclo chiuso o della risposta al gradino oppure tramite simulazione numerica, le prestazioni non risultassero soddisfacenti, si potrebbe agire modificando il coefficiente *a*. A tal proposito si ricordi p.es. che un suo aumento conduce ad un aumento del margine di fase a scapito della banda passante.