RECUPERO DEI DATI
ALGORITMI DI ORDINAMENTO

ALGORITMI E STRUTTURE DATI

Indicizzazione

Recupero dei Dati

$A =< a_1, \ldots, a_n >$ contiene alcuni dati, es. dati medici di pazienti

Ciascun elemento è associato a un identificatore, $A[i].id$, es. codice fiscale

Come trovare i dati associati all'identificatore id_1?

La Soluzione Naïve

Scandiamo tutta la base di dati cercando un i per cui $A[i].id = \mathrm{id}_1$

Qual'à la complessità asintotica?

La Soluzione Naïve

Scandiamo tutta la base di dati cercando un i per cui $A[i].id = \mathrm{id}_1$

Qual'à la complessità asintotica? $O(n)$

Possiamo fare meglio?

Suggerimento: Come cerchiamo una pagina in un libro? E una parola nel dizionario? Perché?

Una Tecnica più Efficiente: La Ricerca Binaria

Se $A =< a_1, \ldots, a_n >$ è ordinato rispetto agli id...

(cioè, $i < j$ implica $A[i].id \leq A[j].id$)

Una Tecnica più Efficiente: La Ricerca Binaria

Se $A =< a_1, \ldots, a_n >$ è ordinato rispetto agli id...

(cioè, $i < j$ implica $A[i].id \leq A[j].id$)

Consideriamo il valore della mediana (cioè $A[n/2]$)

Una Tecnica più Efficiente: La Ricerca Binaria

Se $A =< a_1, \ldots, a_n >$ è ordinato rispetto agli id...

(cioè, $i < j$ implica $A[i].id \leq A[j].id$)

Consideriamo il valore della mediana (cioè $A[n/2]$)

se $A[n/2].id = \mathrm{id}_1$

Trovato!

se $A[n/2].id > \mathrm{id}_1$

Concentriamoci sulla I metà di A, i.e, $< a_1, \ldots, a_{n/2-1} >$

if $A[n/2].id < \mathrm{id}_1$

Concentriamoci sulla II metà di A, i.e, $< a_{n/2+1}, \ldots, a_n >$

Ripetiamo finchè A non è vuoto

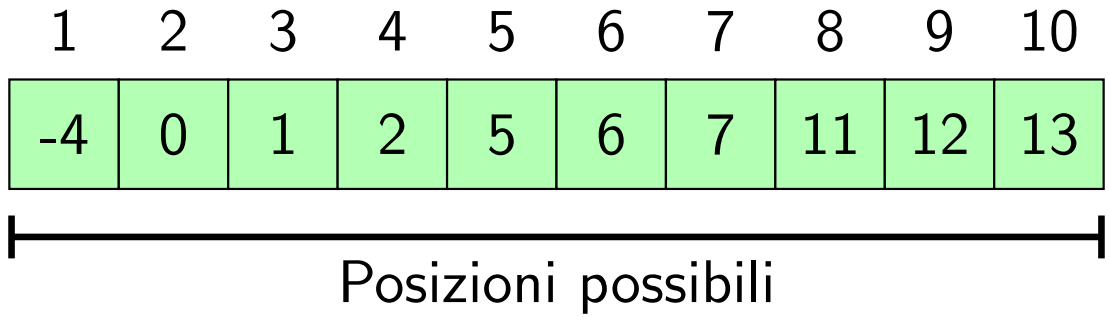
Ricerca Dicotomica: Un Esempio

Cerchiamo 2 in $< -4, 0, 1, 2, 5, 6, 7, 11, 12, 13 >$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-4	0	1	2	5	6	7	11	12	13

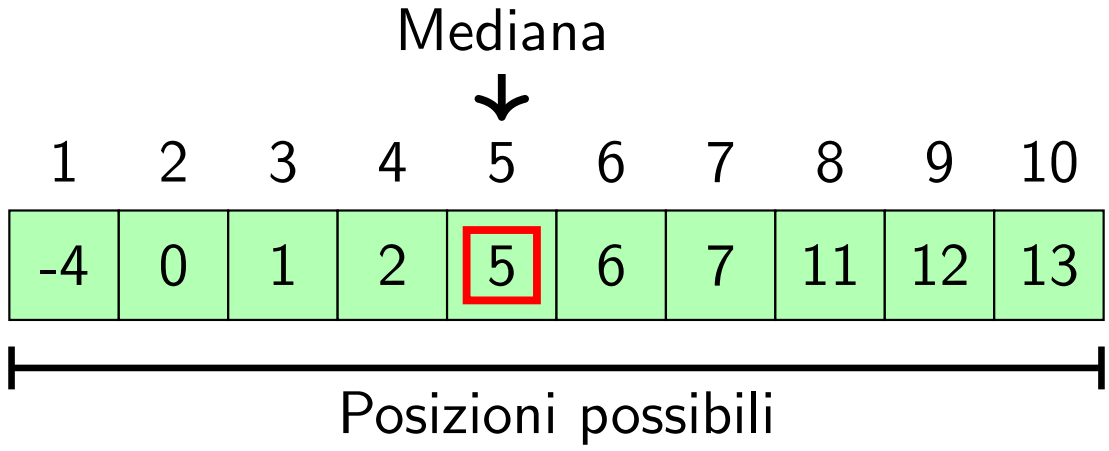
Ricerca Dicotomica: Un Esempio

Cerchiamo 2 in $< -4, 0, 1, 2, 5, 6, 7, 11, 12, 13 >$.



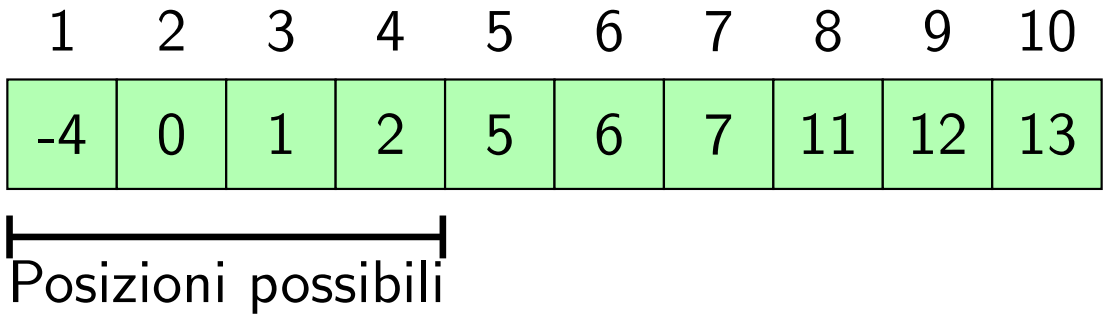
Ricerca Dicotomica: Un Esempio

Cerchiamo 2 in $< -4, 0, 1, 2, 5, 6, 7, 11, 12, 13 >$.



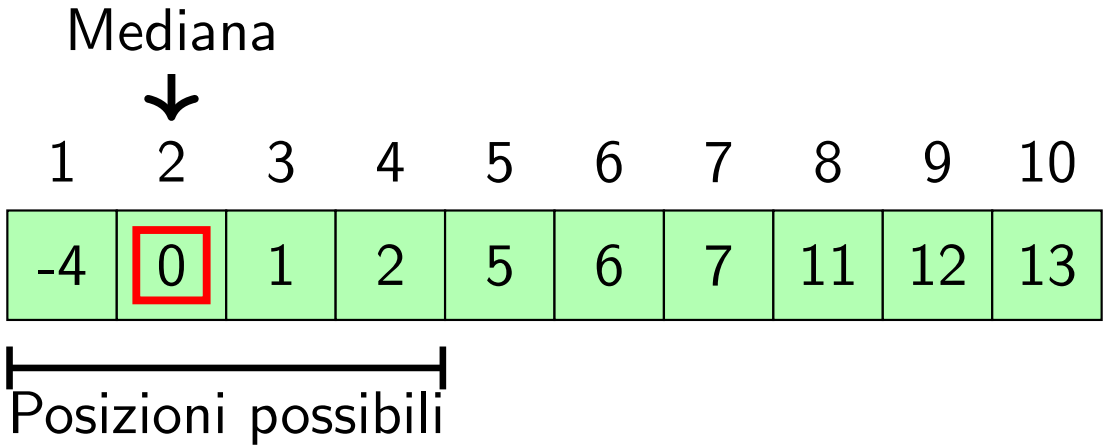
Ricerca Dicotomica: Un Esempio

Cerchiamo 2 in $< -4, 0, 1, 2, 5, 6, 7, 11, 12, 13 >$.



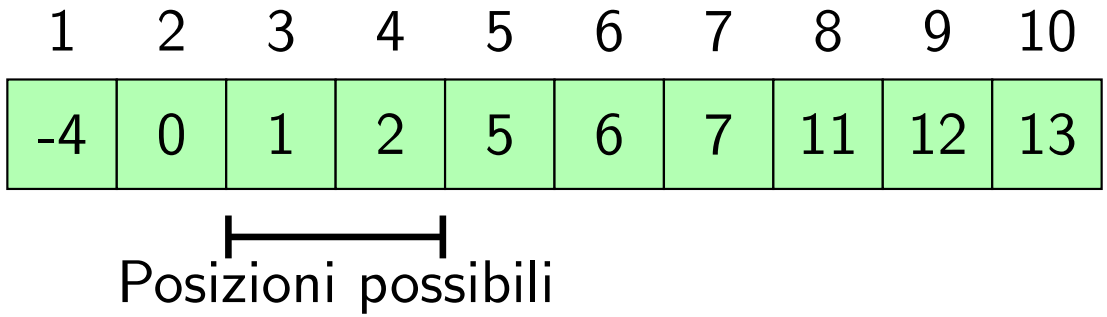
Ricerca Dicotomica: Un Esempio

Cerchiamo 2 in $< -4, 0, 1, 2, 5, 6, 7, 11, 12, 13 >$.



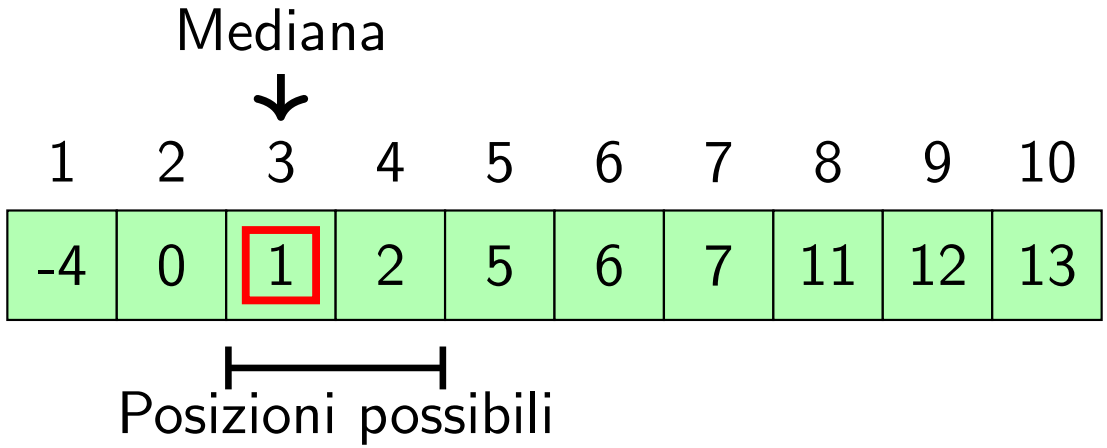
Ricerca Dicotomica: Un Esempio

Cerchiamo 2 in $< -4, 0, 1, 2, 5, 6, 7, 11, 12, 13 >$.



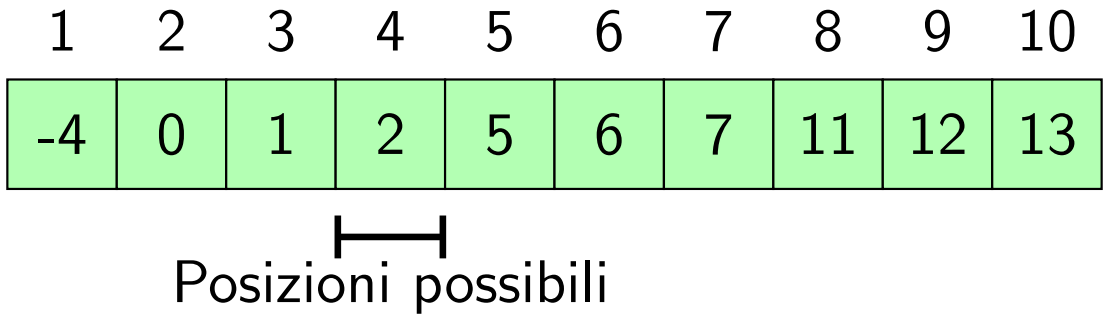
Ricerca Dicotomica: Un Esempio

Cerchiamo 2 in $< -4, 0, 1, 2, 5, 6, 7, 11, 12, 13 >$.



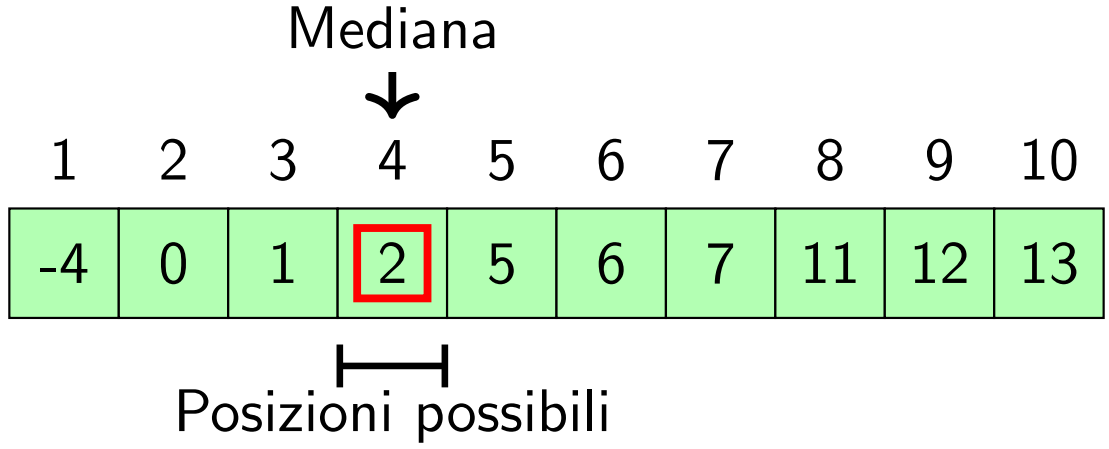
Ricerca Dicotomica: Un Esempio

Cerchiamo 2 in $< -4, 0, 1, 2, 5, 6, 7, 11, 12, 13 >$.



Ricerca Dicotomica: Un Esempio

Cerchiamo 2 in $< -4, 0, 1, 2, 5, 6, 7, 11, 12, 13 >$.



Trovato: $A[4] = 2$

Ricerca Dicotomica: Pseudo-Codice e Complessità

```
def di_find(A, a):
  (l, r) ← (1, |A|)
  while r ≥ l
    m ← (l+r)/2
    if A[m]=a
      return m
    endif
    if A[m]>a
      r ← m−1
    else
      l ← m+1
    endif
 endwhile

 return 0
enddef
```

Ricerca Dicotomica: Pseudo-Codice e Complessità

```
def di_find(A, a):
  (l, r) ← (1, |A|)
  while r ≥ l
    m ← (l+r)/2
    if A[m]=a
      return m
    endif
    if A[m]>a
      r ← m−1
    else
      l ← m+1
    endif
 endwhile

 return 0
enddef
```

$l - r$ si dimezza a ogni iterazione

Se $|A| = 2^n$, di_find termina in al più n iterazioni

Ricerca Dicotomica: Pseudo-Codice e Complessità

```
def di_find(A, a):
  (l, r) ← (1, |A|)
  while r ≥ l
    m ← (l+r)/2
    if A[m]=a
      return m
    endif
    if A[m]>a
      r ← m−1
    else
      l ← m+1
    endif
 endwhile

 return 0
enddef
```

$l - r$ si dimezza a ogni iterazione

Se $|A| = 2^n$, di_find termina in al più n iterazioni

La complessità di di_find è

Ricerca Dicotomica: Pseudo-Codice e Complessità

```
def di_find(A, a):
  (l, r) ← (1, |A|)
  while r ≥ l
    m ← (l+r)/2
    if A[m]=a
      return m
    endif
    if A[m]>a
      r ← m−1
    else
      l ← m+1
    endif
 endwhile

 return 0
enddef
```

$l - r$ si dimezza a ogni iterazione

Se $|A| = 2^n$, di_find termina in al più n iterazioni

La complessità di di_find è

$$O(\log n)$$

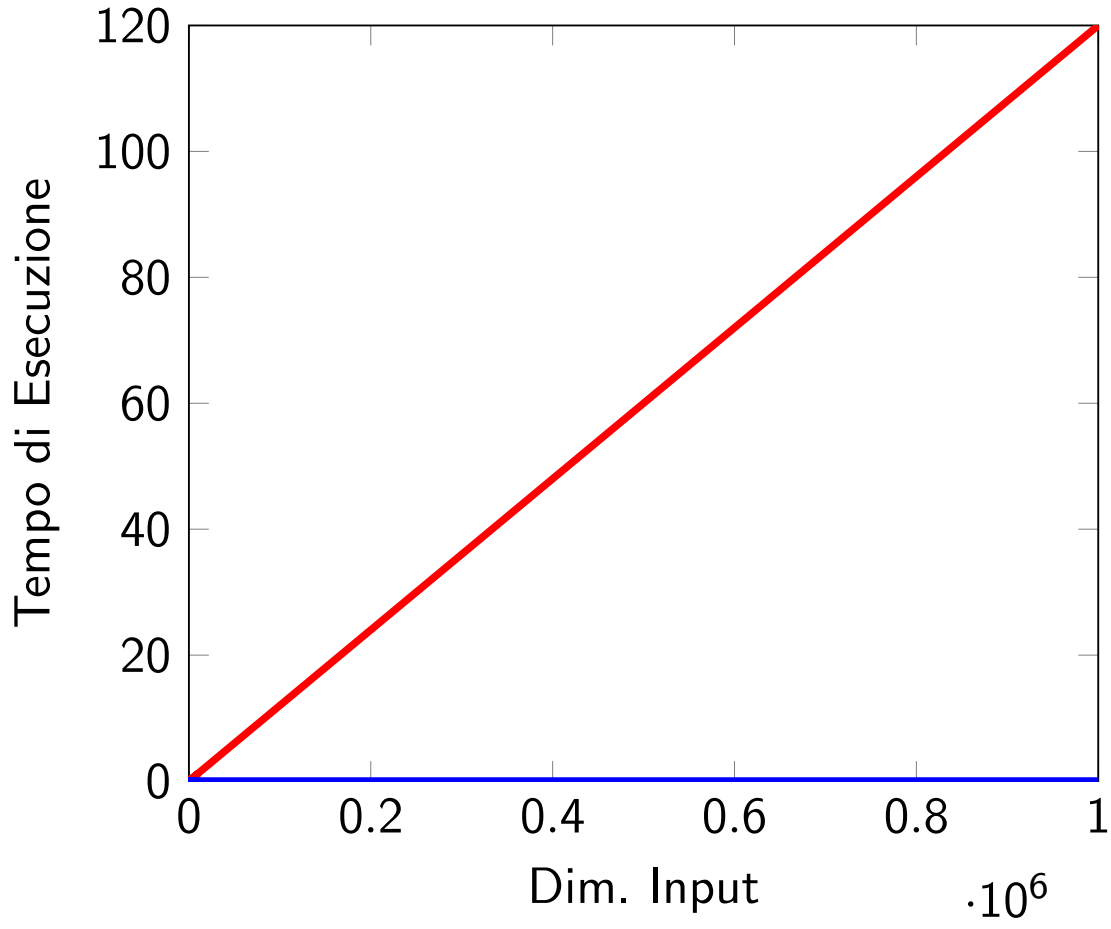
Ricerca Dicotomica vs Ricerca Lineare: un Test

Tempo di esecuzione per 1×10^5 ricerche casuali.

Dim. Input	**Ricerca Lineare**	**Ricerca Dicotomica**
1×10^1	3.3×10^{-3} s	3.2×10^{-3} s
1×10^2	1.4×10^{-2} s	4.3×10^{-3} s
1×10^3	1.2×10^{-1} s	5.9×10^{-3} s
1×10^4	1.2 s	7.8×10^{-3} s
1×10^5	1.2×10^1 s	8.7×10^{-3} s
1×10^6	1.2×10^2 s	1.2×10^{-2} s

Ricerca Dicotomica vs Ricerca Lineare: un Test

Tempo di esecuzione per 1×10^5 ricerche casuali.

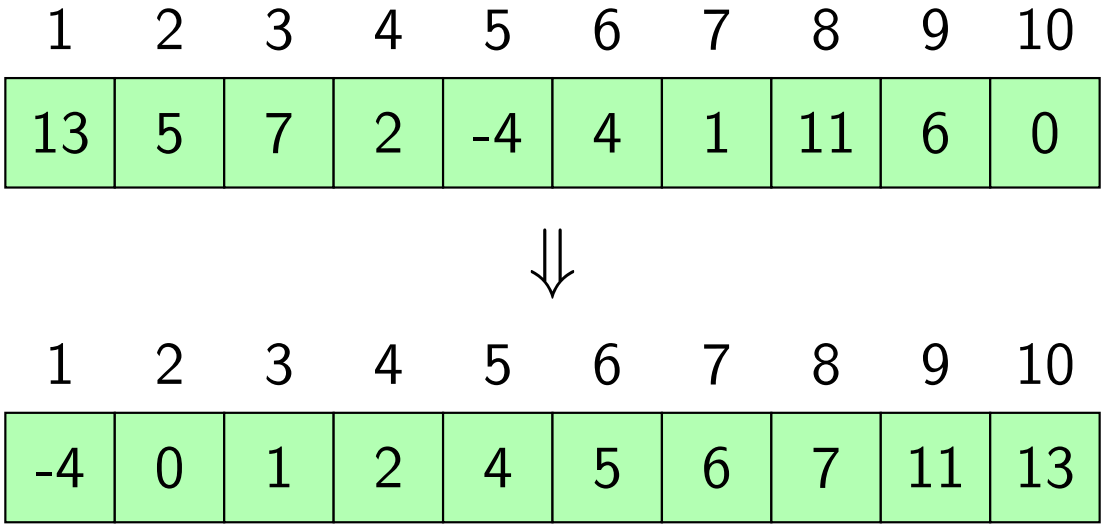


Ordinamento

Il Problema dell'Ordinamento

Input: Un array A di numeri
Output: L'array A ordinato, cioè, se $i < j$ allora $A[i] \leq A[j]$

Es.,

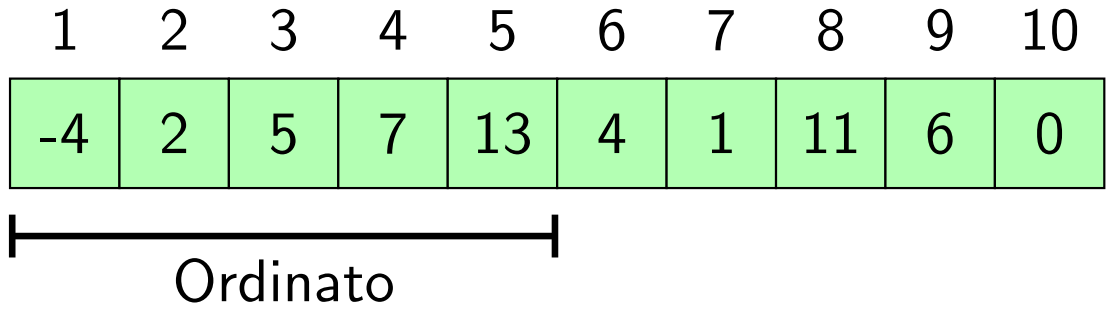


Qualche suggerimento su un possibile algoritmo? Qual'è la complessità attesa?

Insertion Sort

Insertion Sort: Intuizione

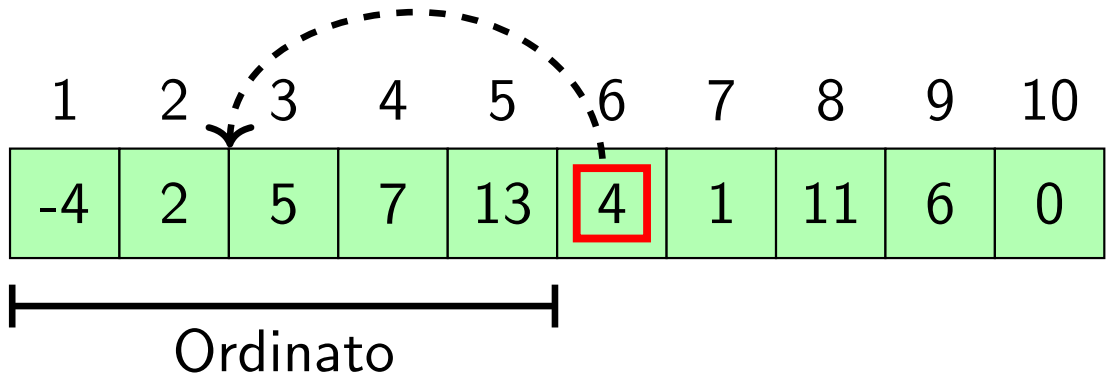
Se la prima parte dell'array è già ordinata



Insertion Sort: Intuizione

Se la prima parte dell'array è già ordinata

possiamo "*allargarla*" inserendo il valore successivo **v** nella posizione corretta

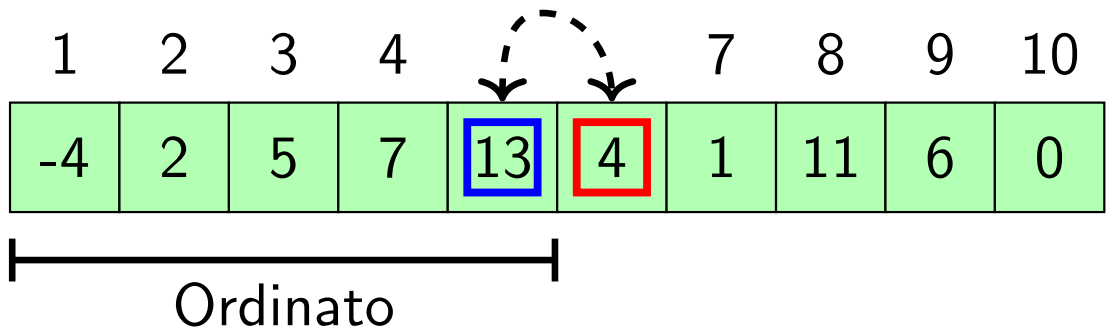


Insertion Sort: Intuizione

Se la prima parte dell'array è già ordinata

possiamo "*allargarla*" inserendo il valore successivo **v** nella posizione corretta

scambiando **v** con il valore precedente nell'array **p**

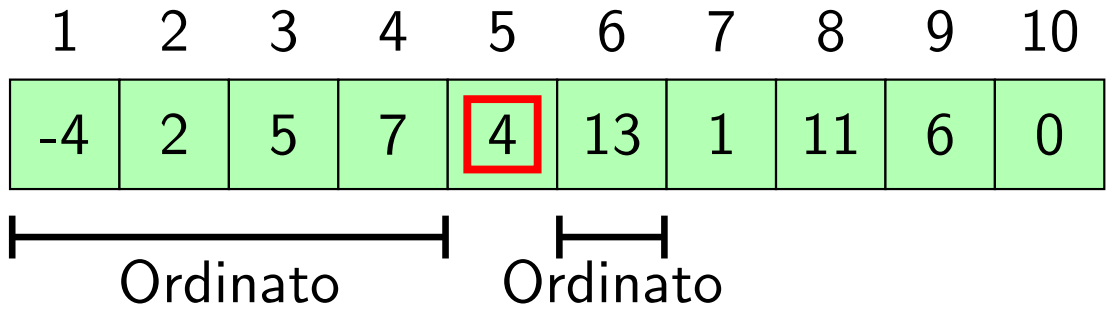


Insertion Sort: Intuizione

Se la prima parte dell'array è già ordinata

possiamo "*allargarla*" inserendo il valore successivo **v** nella posizione corretta

scambiando **v** con il valore precedente nell'array **p**

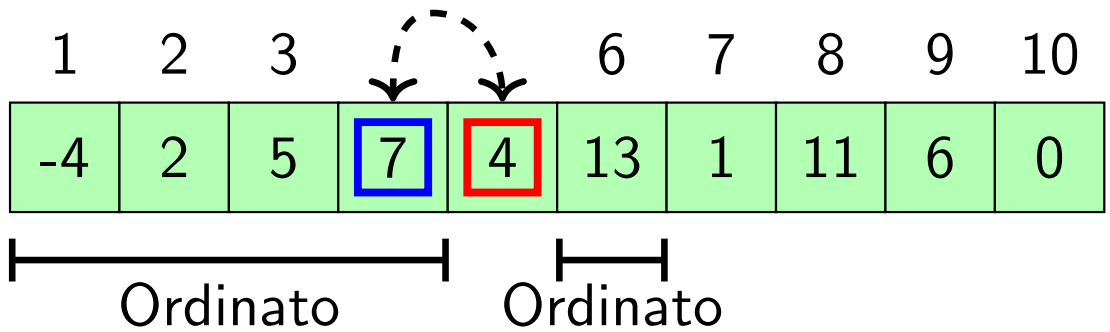


Insertion Sort: Intuizione

Se la prima parte dell'array è già ordinata

possiamo "*allargarla*" inserendo il valore successivo **v** nella posizione corretta

scambiando **v** con il valore precedente nell'array **p**

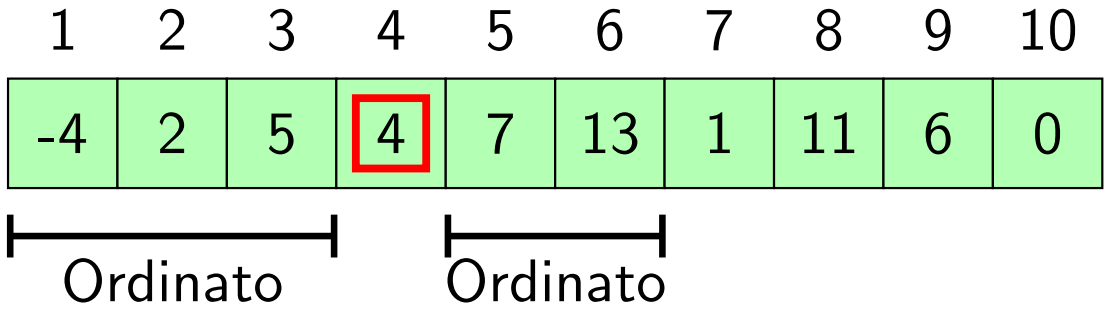


Insertion Sort: Intuizione

Se la prima parte dell'array è già ordinata

possiamo "*allargarla*" inserendo il valore successivo **v** nella posizione corretta

scambiando **v** con il valore precedente nell'array **p**

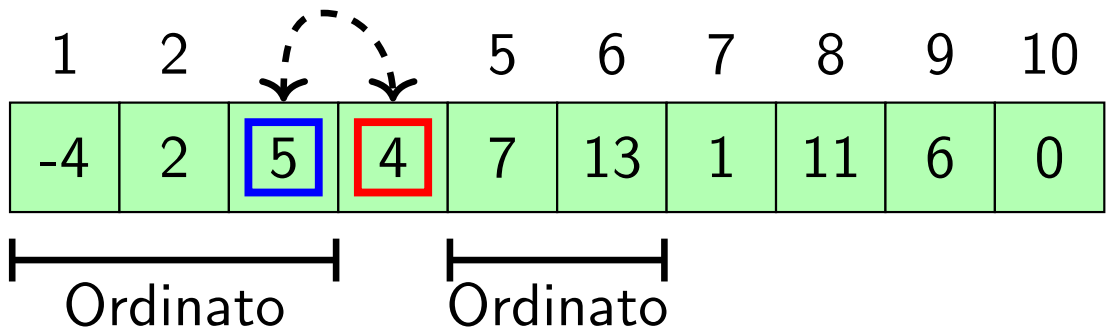


Insertion Sort: Intuizione

Se la prima parte dell'array è già ordinata

possiamo "*allargarla*" inserendo il valore successivo **v** nella posizione corretta

scambiando **v** con il valore precedente nell'array **p**



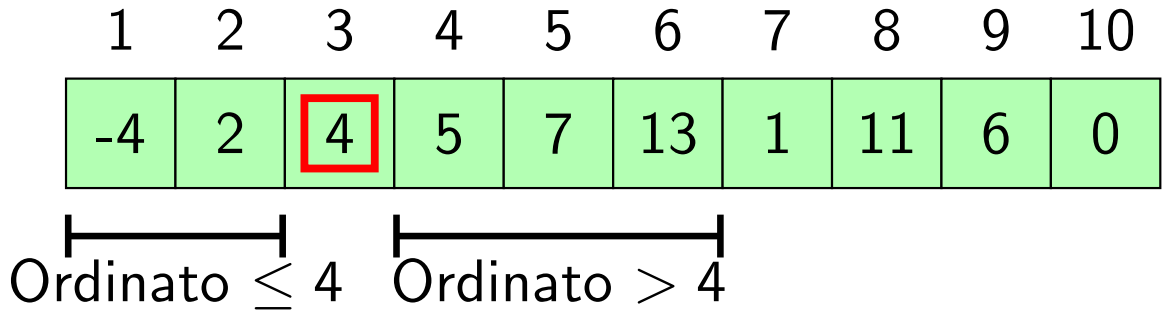
Insertion Sort: Intuizione

Se la prima parte dell'array è già ordinata

possiamo "*allargarla*" inserendo il valore successivo **v** nella posizione corretta

scambiando **v** con il valore precedente nell'array **p**

finchè **p** (se esiste) è più grande di **v**



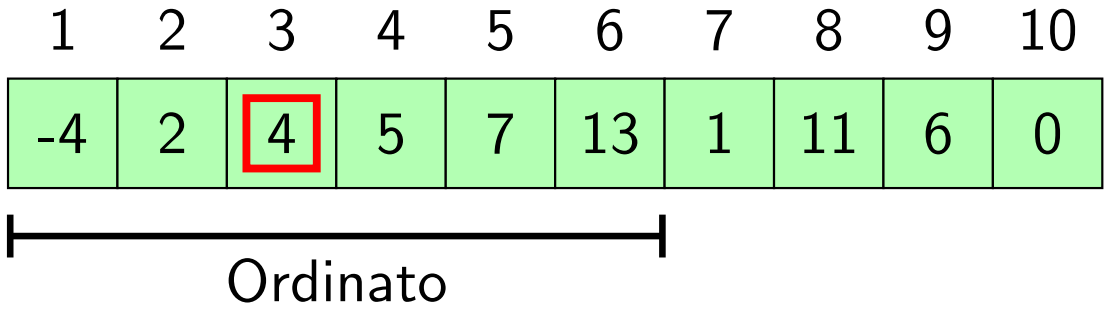
Insertion Sort: Intuizione

Se la prima parte dell'array è già ordinata

possiamo "*allargarla*" inserendo il valore successivo **v** nella posizione corretta

scambiando **v** con il valore precedente nell'array **p**

finchè **p** (se esiste) è più grande di **v**



Insertion Sort: Codice e Complessità

```
def insertion_sort(A):
    for i in 2..|A|:
        j ← i
        while (j>1 and
                A[j]<A[j-1]):

            swap(A,j-1,j)
            j←j-1

        endwhile
    endfor
enddef
```

Insertion Sort: Codice e Complessità

```
def insertion_sort(A):
    for i in 2..|A|:
        j ← i
        while (j>1 and
                A[j]<A[j-1]):

            swap(A,j-1,j)
            j←j-1

        endwhile
    endfor
enddef
```

Il blocco del while costa $\Theta(1)$

Insertion Sort: Codice e Complessità

```
def insertion_sort(A):
    for i in 2..|A|:
        j ← i
        while (j>1 and
               A[j]<A[j-1]):

            swap(A,j-1,j)
            j←j-1

        endwhile
    endfor
enddef
```

Il blocco del while costa $\Theta(1)$

Viene iterato $O(i)$ $(\Omega(1))$ volte per ogni $i \in [2, n]$

Insertion Sort: Codice e Complessità

```
def insertion_sort(A):
    for i in 2..|A|:
        j ← i
        while (j>1 and
                A[j]<A[j-1]):

            swap(A,j-1,j)
            j←j-1

        endwhile
    endfor
enddef
```

Il blocco del while costa $\Theta(1)$

Viene iterato $O(i)$ $(\Omega(1))$ volte per ogni $i \in [2, n]$

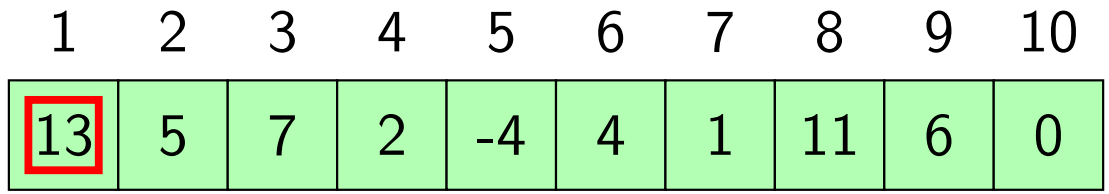
$$\sum_{i=2}^{n} O(i) * O(1) = O(\sum_{i=2}^{n} i)$$
$$= O(n^2)$$

$$\sum_{i=2}^{n} \Omega(1) * \Omega(1) = \Omega(\sum_{i=2}^{n} 1)$$
$$= \Omega(n)$$

Bolle, Selezioni e Varie

Ordinare Scegliendo il Massimo

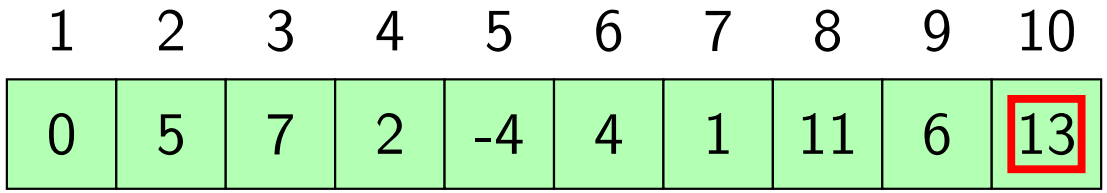
Trova il massimo



Ordinare Scegliendo il Massimo

Trova il massimo

Sposta il massimo alla fine dell'array

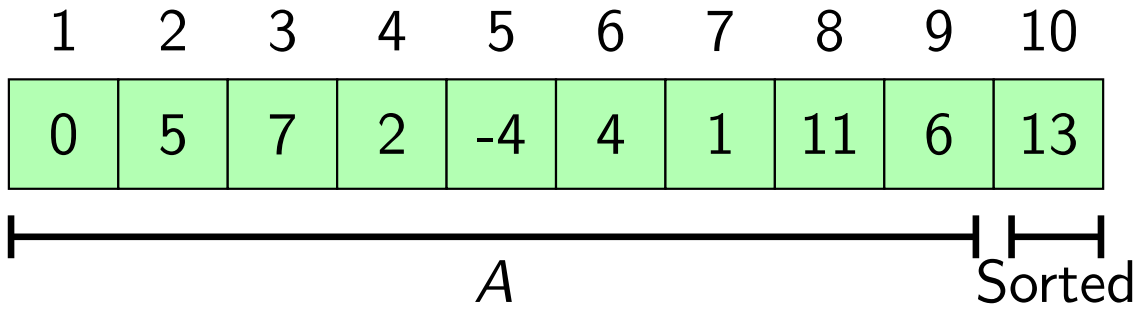


Ordinare Scegliendo il Massimo

Trova il massimo

Sposta il massimo alla fine dell'array

Se $|A| > 1$, ripeti sul frammento iniziale di A

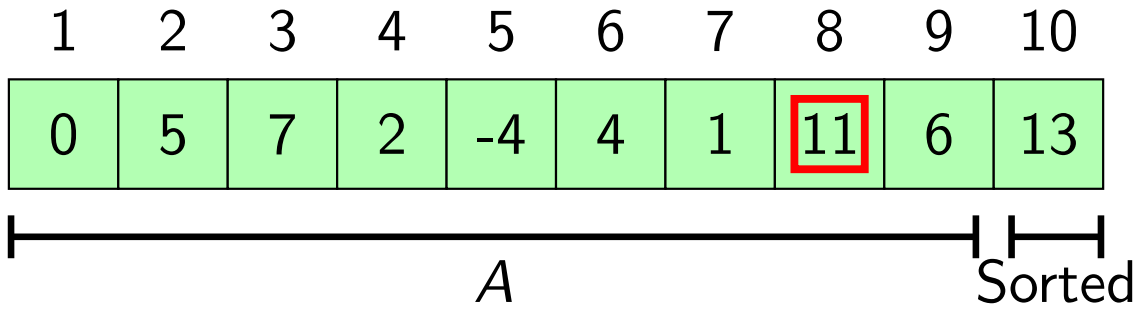


Ordinare Scegliendo il Massimo

Trova il massimo

Sposta il massimo alla fine dell'array

Se $|A| > 1$, ripeti sul frammento iniziale di A

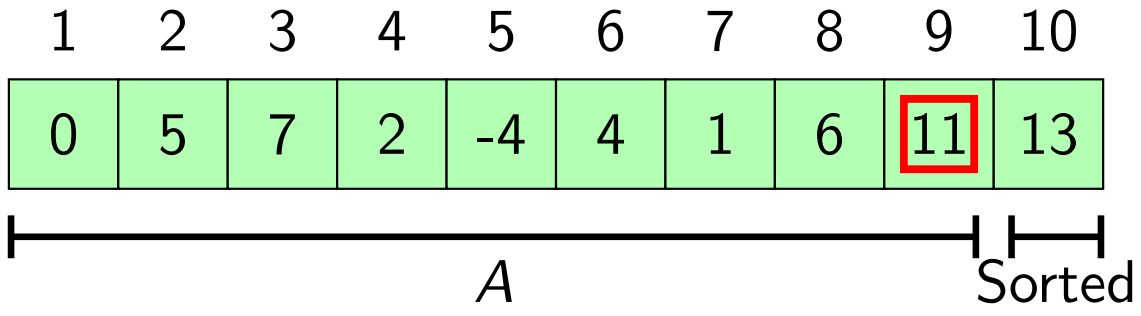


Ordinare Scegliendo il Massimo

Trova il massimo

Sposta il massimo alla fine dell'array

Se $|A| > 1$, ripeti sul frammento iniziale di A

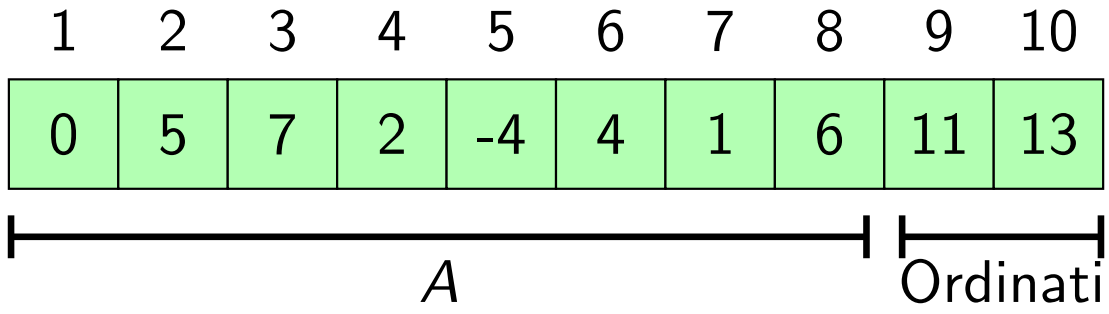


Ordinare Scegliendo il Massimo

Trova il massimo

Sposta il massimo alla fine dell'array

Se $|A| > 1$, ripeti sul frammento iniziale di A

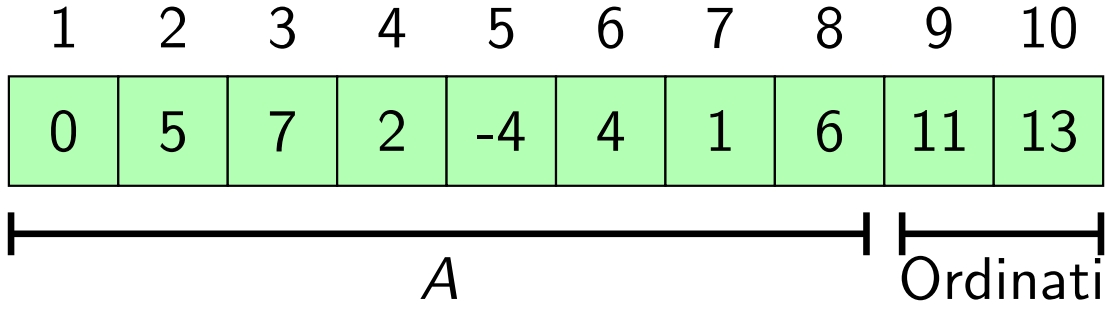


Ordinare Scegliendo il Massimo

Trova il massimo

Sposta il massimo alla fine dell'array

Se $|A| > 1$, ripeti sul frammento iniziale di A



La complessità è $\sum_{i=1}^{|A|} \left(T_{\texttt{max}}(i) + \Theta(1) \right)$

Come Trovare il Massimo?

Usando . . .

- spostandolo verso destra con scambi $\Longrightarrow$ Bubble Sort

Come Trovare il Massimo?

Usando . . .

- spostandolo verso destra con scambi $\Longrightarrow$ Bubble Sort

$$T(|A|) \in \sum_{i=1}^{|A|} (\Theta(i) + O(i)) = \Theta(|A|^2)$$

Come Trovare il Massimo?

Usando . . .

- spostandolo verso destra con scambi $\Longrightarrow$ Bubble Sort

$$T(|A|) \in \sum_{i=1}^{|A|} (\Theta(i) + O(i)) = \Theta(|A|^2)$$

- ricerca lineare sulla porzione non ordinata $\Longrightarrow$ Selection Sort

Come Trovare il Massimo?

Usando . . .

- spostandolo verso destra con scambi $\Longrightarrow$ Bubble Sort

$$T(|A|) \in \sum_{i=1}^{|A|} (\Theta(i) + O(i)) = \Theta(|A|^2)$$

- ricerca lineare sulla porzione non ordinata $\Longrightarrow$ Selection Sort

$$T(|A|) \in \sum_{i=1}^{|A|} (\Theta(i) + \Theta(1)) = \Theta(|A|^2)$$

Bubble Sort: Pseudo-Codice e Complessità

```
def bubble_sort(A):
    for i in |A|..2:
        for j in 1..i-1:
            if A[j] > A[j+1]:
                swap(A, j, j+1)
            endif
        endfor
    endfor
enddef
```

il costrutto if costa $\Theta(1)$

Viene iterato $i - 1$ volte per ogni $i \in [2, n]$

Bubble Sort: Pseudo-Codice e Complessità

```
def bubble_sort(A):
    for i in |A|..2:
        for j in 1..i-1:
            if A[j] > A[j+1]:
                swap(A, j, j+1)
            endif
        endfor
    endfor
enddef
```

il costrutto if costa $\Theta(1)$

Viene iterato $i - 1$ volte per ogni $i \in [2, n]$

$$\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \Theta(1) = \Theta(n^2)$$

Selection Sort: Pseudo-Codice e Complessità

```
def selection_sort(A):
    for i in |A|..2:
        max_i ← i
        for j in 1..i−1:
            if A[j] > A[max_i]:
                max_i ← j
            endif
        endfor
        swap(A, max_i, i)
    endfor
enddef
```

il costrutto **if**, l'assegnamento e lo scambio costano $\Theta(1)$

il costrutto **if** viene iterato $i - 1$ volte per ogni $i \in [2, n]$

Selection Sort: Pseudo-Codice e Complessità

```
def selection_sort(A):
    for i in |A|..2:
        max_i ← i
        for j in 1..i−1:
            if A[j] > A[max_i]:
                max_i ← j
            endif
        endfor
        swap(A, max_i, i)
    endfor
enddef
```

il costrutto **if**, l'assegnamento e lo scambio costano $\Theta(1)$

il costrutto **if** viene iterato $i-1$ volte per ogni $i \in [2, n]$

$$\sum_{i=2}^{n} \left(\Theta(1) + \sum_{j=1}^{i-1} \Theta(1) \right) = \Theta(n^2)$$

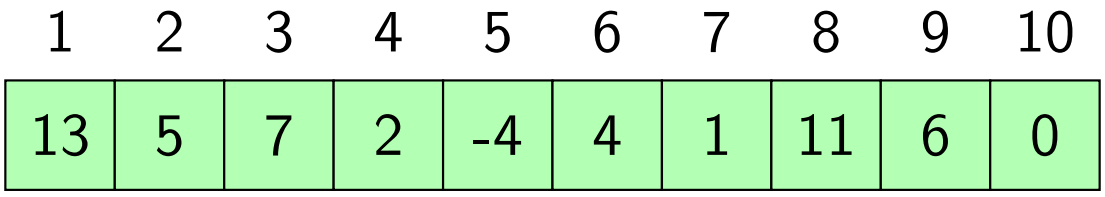
Merge Sort

Divide-et-Impera

Il paradigma divide-et-impera è uno strumento tipico di progettazione degli algoritmi.

L'idea di fondo è di risolvere ricorsivamente istanze più semplici del problema e combinare queste soluzioni parziali in una soluzione del problema originale.

Se le istanze sono molto semplici, la soluzione è di solito banale.



Divide-et-Impera

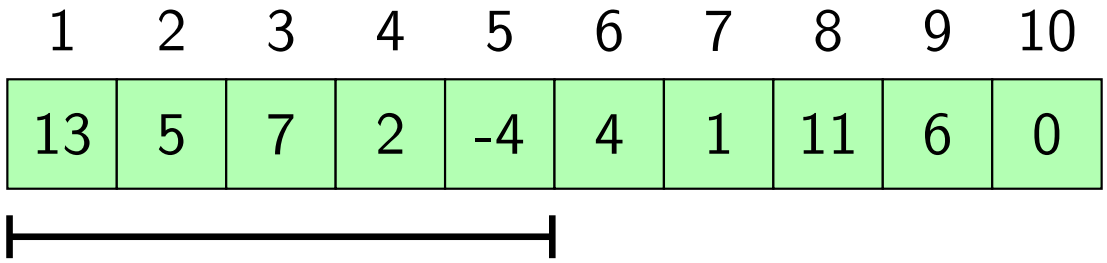
Il paradigma divide-et-impera è uno strumento tipico di progettazione degli algoritmi.

L'idea di fondo è di risolvere ricorsivamente istanze più semplici del problema e combinare queste soluzioni parziali in una soluzione del problema originale.

Se le istanze sono molto semplici, la soluzione è di solito banale.

Un idea per ordinare un array:

1. ordino la prima metà



Divide-et-Impera

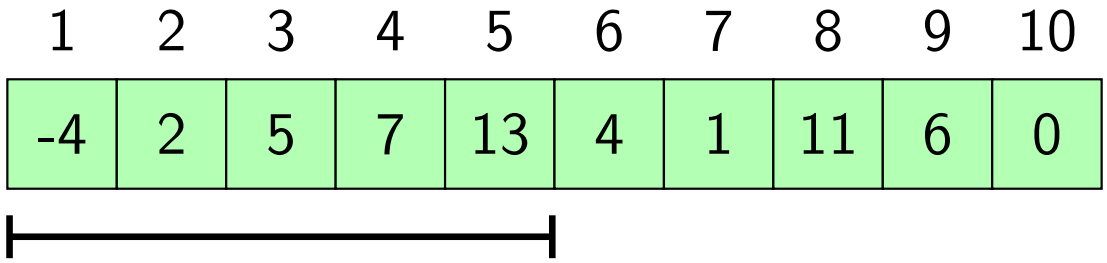
Il paradigma divide-et-impera è uno strumento tipico di progettazione degli algoritmi.

L'idea di fondo è di risolvere ricorsivamente istanze più semplici del problema e combinare queste soluzioni parziali in una soluzione del problema originale.

Se le istanze sono molto semplici, la soluzione è di solito banale.

Un idea per ordinare un array:

1. ordino la prima metà



Divide-et-Impera

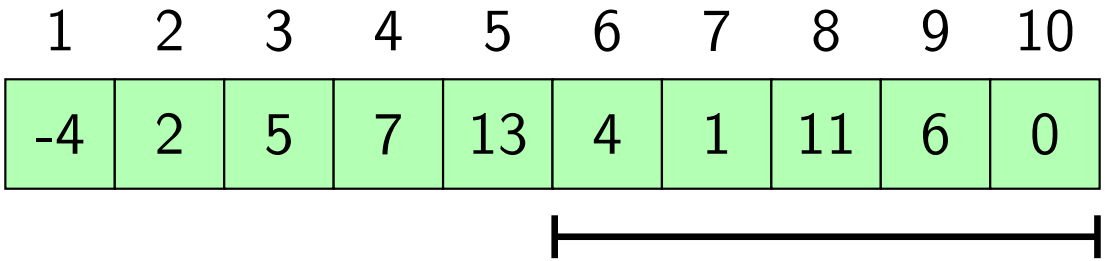
Il paradigma divide-et-impera è uno strumento tipico di progettazione degli algoritmi.

L'idea di fondo è di risolvere ricorsivamente istanze più semplici del problema e combinare queste soluzioni parziali in una soluzione del problema originale.

Se le istanze sono molto semplici, la soluzione è di solito banale.

Un idea per ordinare un array:

1. ordino la prima metà
2. ordino la seconda metà



Divide-et-Impera

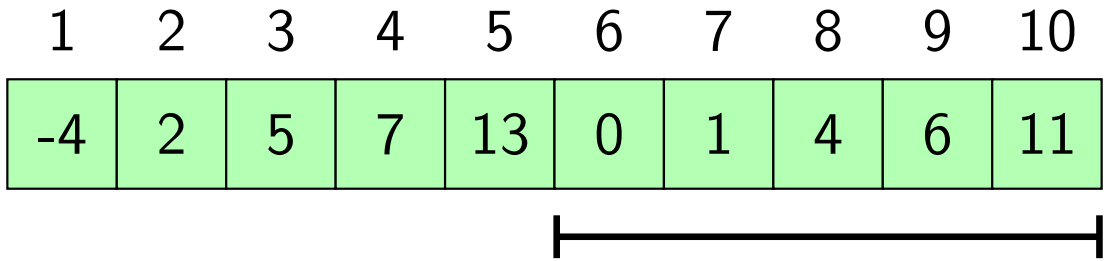
Il paradigma divide-et-impera è uno strumento tipico di progettazione degli algoritmi.

L'idea di fondo è di risolvere ricorsivamente istanze più semplici del problema e combinare queste soluzioni parziali in una soluzione del problema originale.

Se le istanze sono molto semplici, la soluzione è di solito banale.

Un idea per ordinare un array:

1. ordino la prima metà
2. ordino la seconda metà



Divide-et-Impera

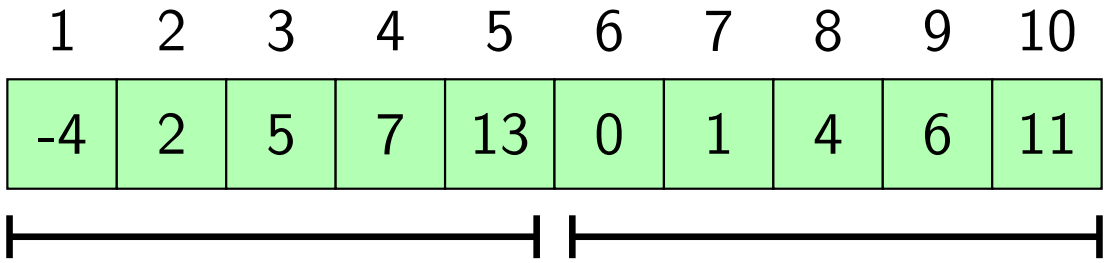
Il paradigma divide-et-impera è uno strumento tipico di progettazione degli algoritmi.

L'idea di fondo è di risolvere ricorsivamente istanze più semplici del problema e combinare queste soluzioni parziali in una soluzione del problema originale.

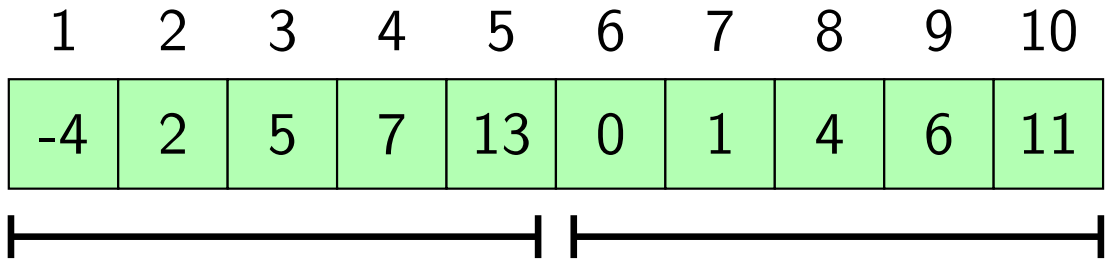
Se le istanze sono molto semplici, la soluzione è di solito banale.

Un idea per ordinare un array:

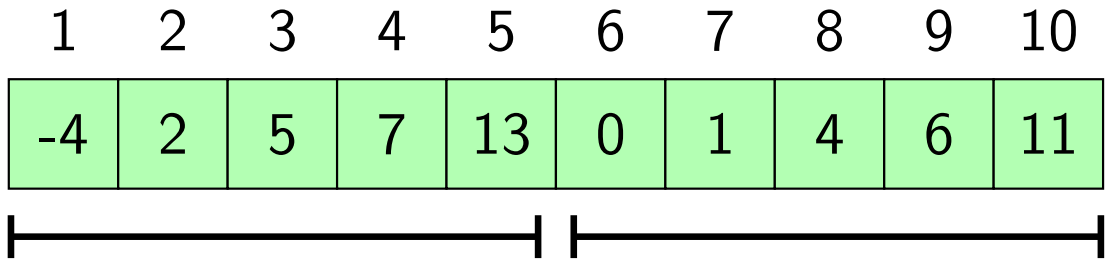
1. ordino la prima metà
2. ordino la seconda metà
3. unisco in qualche modo le due metà

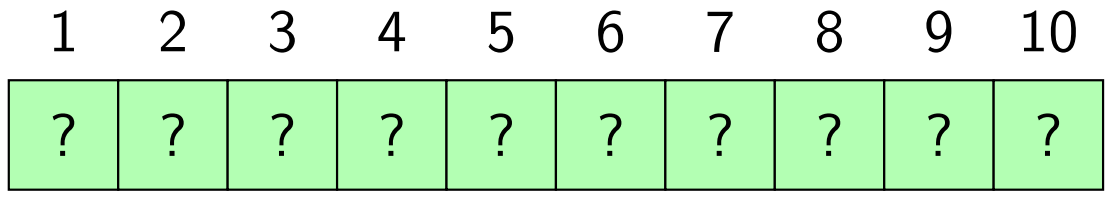


Come unisco (`merge`) due array ordinati?

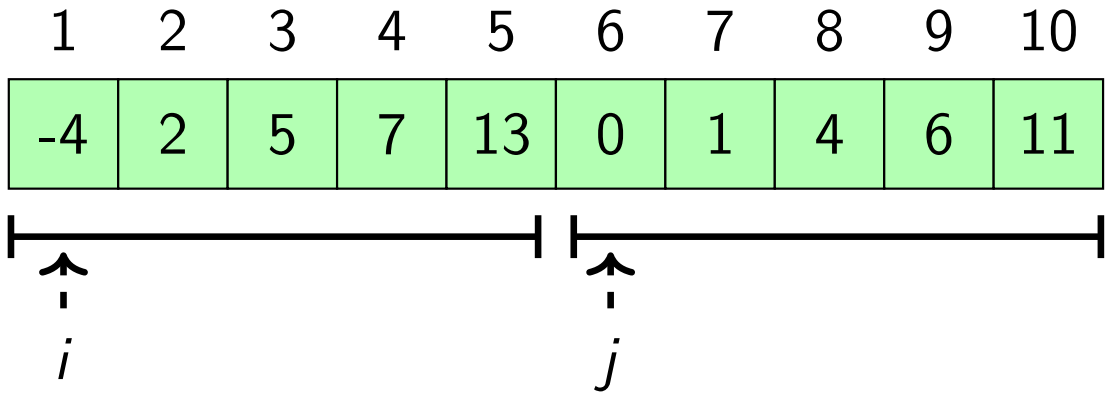


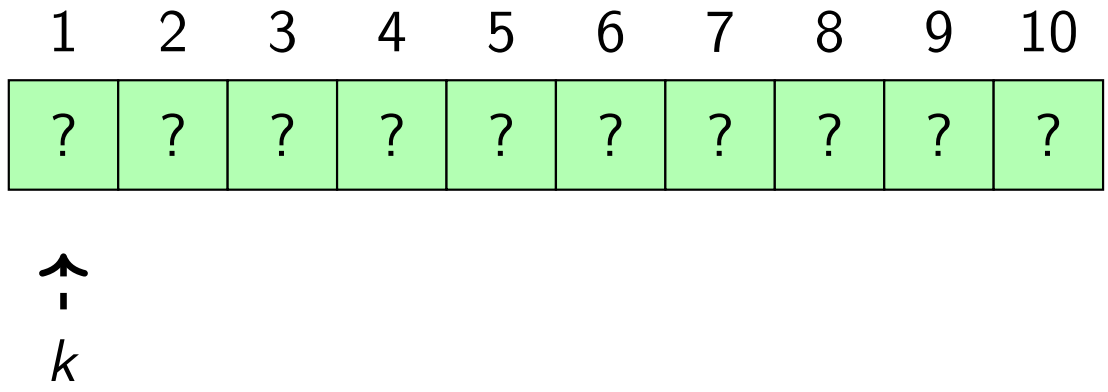
Come unisco (`merge`) due array ordinati?



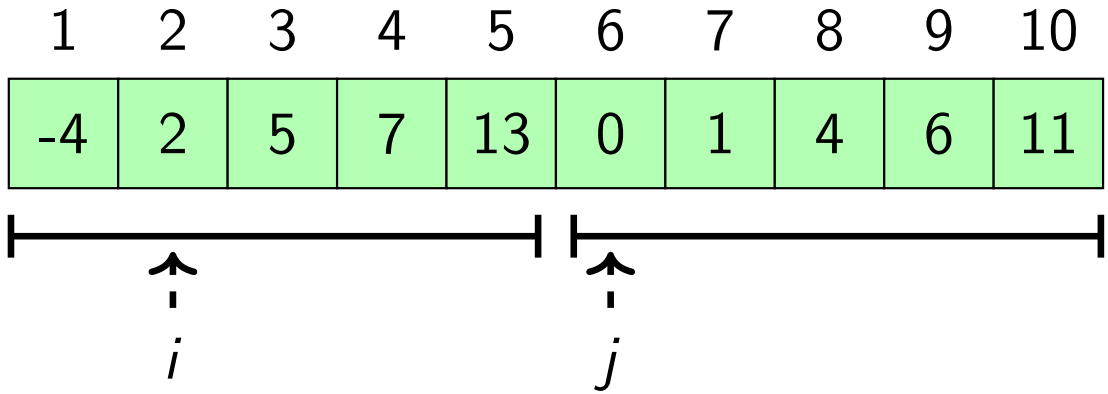


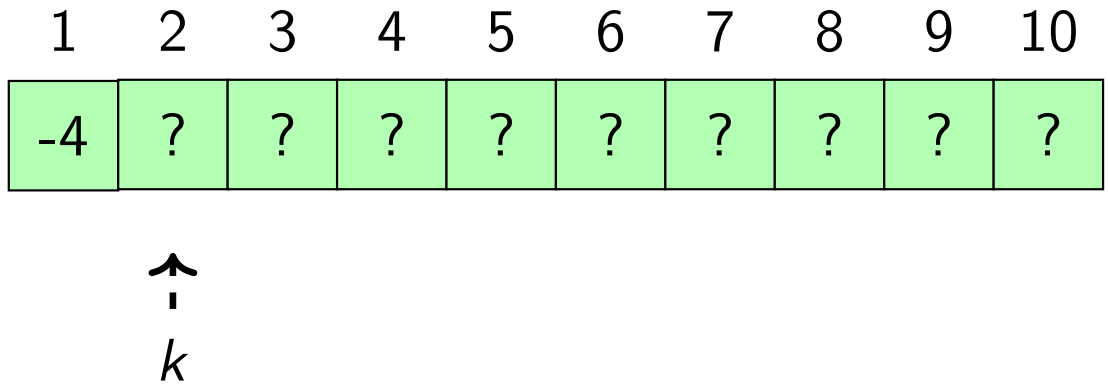
Come unisco (`merge`) due array ordinati?



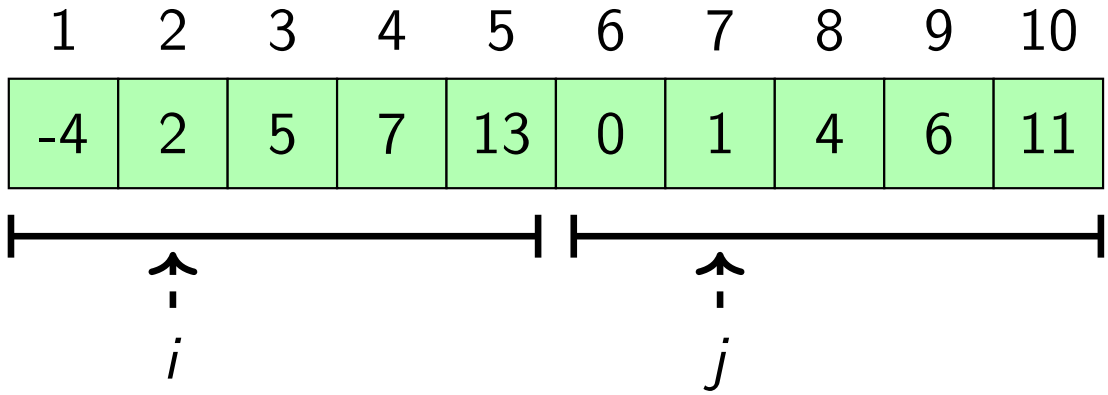


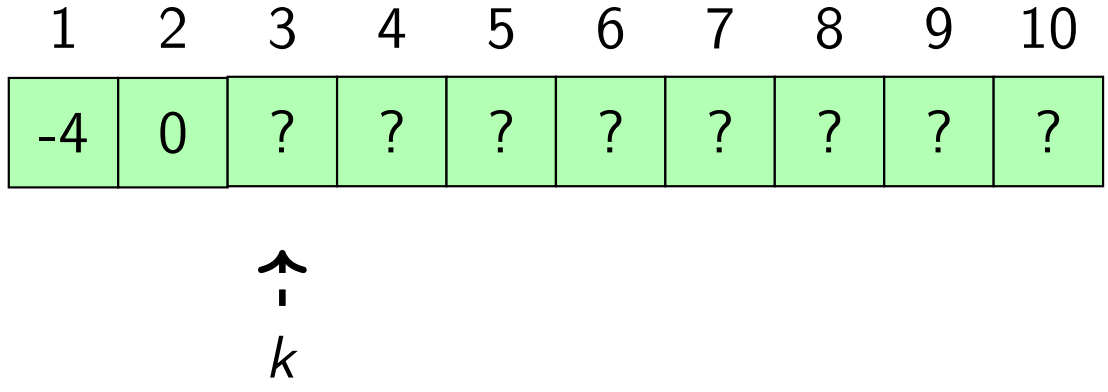
Come unisco (`merge`) due array ordinati?



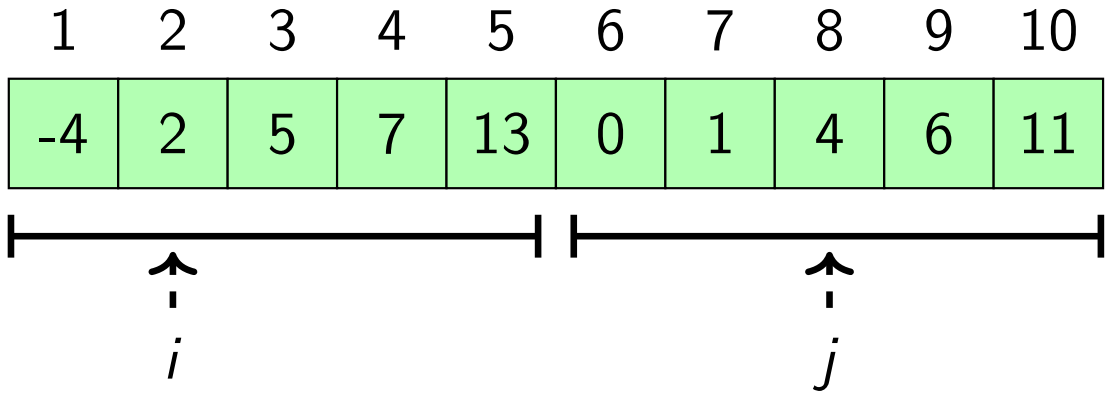


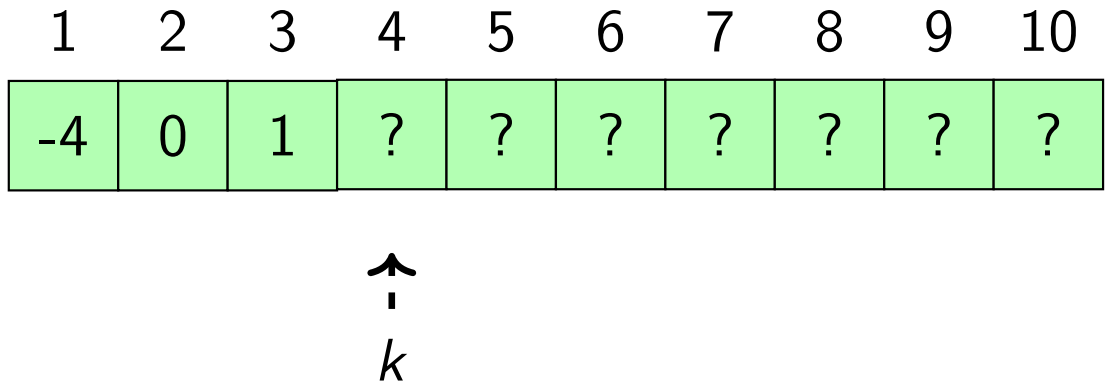
Come unisco (`merge`) due array ordinati?



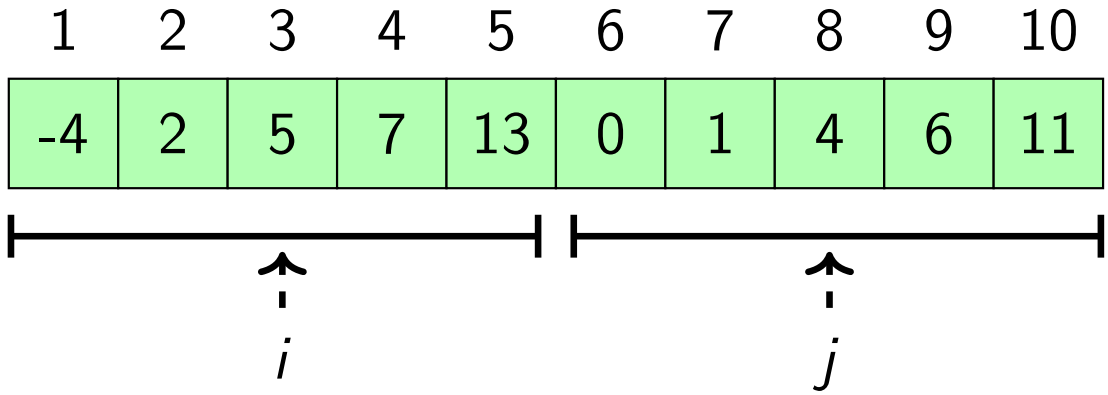


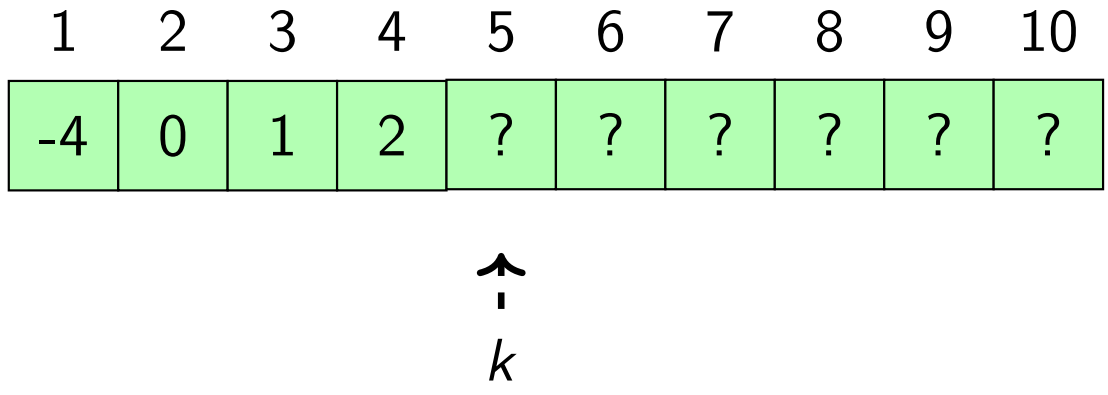
Come unisco (`merge`) due array ordinati?



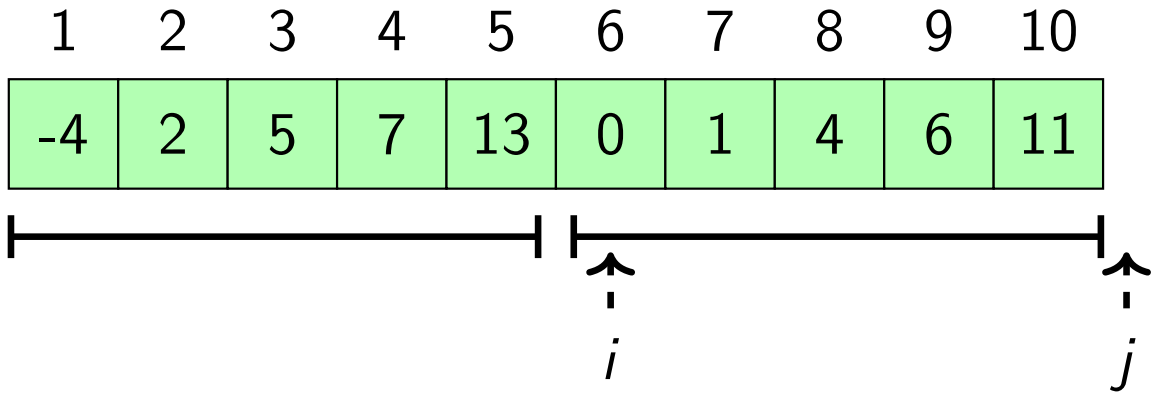


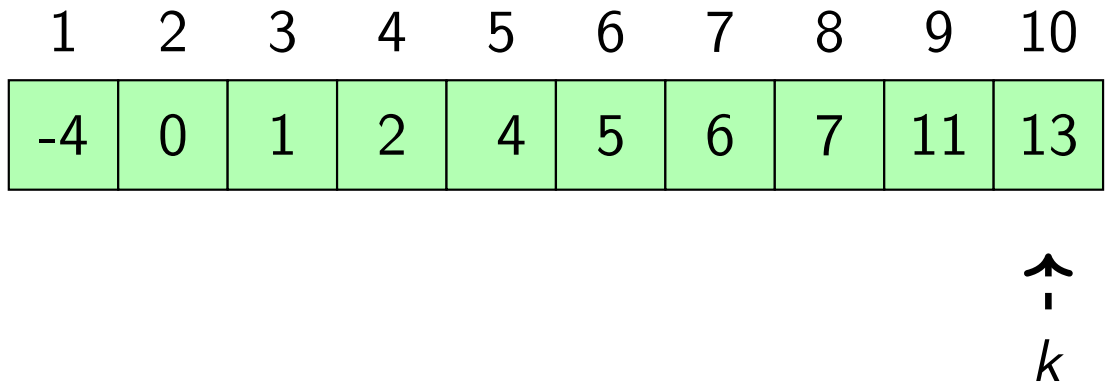
Come unisco (`merge`) due array ordinati?





Come unisco (`merge`) due array ordinati?





Merge sort: Pseudo-Code

```
def MERGESORT(A, begin=1, end=|A|):
    if end>begin:
        median ← (begin+end)/2
        MERGESORT(A, begin, median)
        MERGESORT(A, median+1, end)

        MERGE(A, begin, median, end)
enddef
```

Merge: Pseudo-Code

```
def MERGE(A, begin, median, end):
    L ← A[begin:median]
    R ← A[median+1:end]

    i, j ← 1, 1

    for k in range(begin, end):
        if (i > len(L) or
                (j ≤ len(R) and R[j] ≤ L[i])):
            A[k] ← R[j]
            j ← j+1
        else:
            A[k] ← L[i]
            i ← i+1
enddef
```

La Complessità di Merge Sort

Merge prende tempo $\Theta(n)$

Ma mergesort contiene due chiamate ricorsive. Come facciamo a calcolare la complessità in questo caso?