ORDINAMENTO
HEAPSORT

ALGORITMI E STRUTTURE DATI

HEAPSORT: IDEA DI BASE

```
selection_sort(A):
    for i in len(a)...2:
        j = find_argmax(A,1,i)
        swap(A,i,j)
```

Qual è il bottleneck computazionale di selection_sort?

Idea: uso una struttura dati che permetta di
estrarre il massimo in tempo sublineare e la cui costruzione costi poco.

CODA DI PRIORITÀ

Una struttura dati in cui:

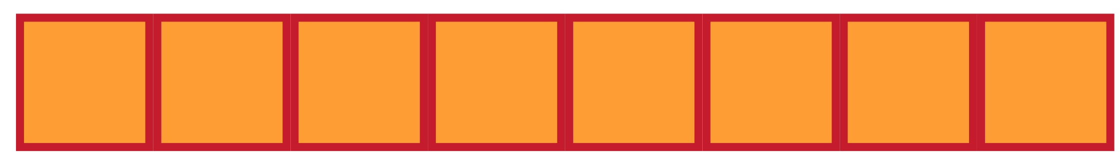
- Possiamo inserire elementi
- Possiamo estrarre il massimo tra tutti gli elementi inseriti

HEAPSORT: IDEA DI BASE

- Dobbiamo eseguire n inserimenti nella coda di priorità
- Dobbiamo eseguire n rimozioni dalla coda di priorità
- Quindi la complessità computazione dipende da:
  - Costo degli inserimenti
  - Costo delle rimozioni del massimo

PRIMO APPROCCIO PER CREARE UNA CODA DI PRIORITÀ

Un primo approccio è quello di creare una coda di priorità usando un array di n elementi e una variabile che ci dice il prossimo posto libero nell'array:



`indice_libero = 0`

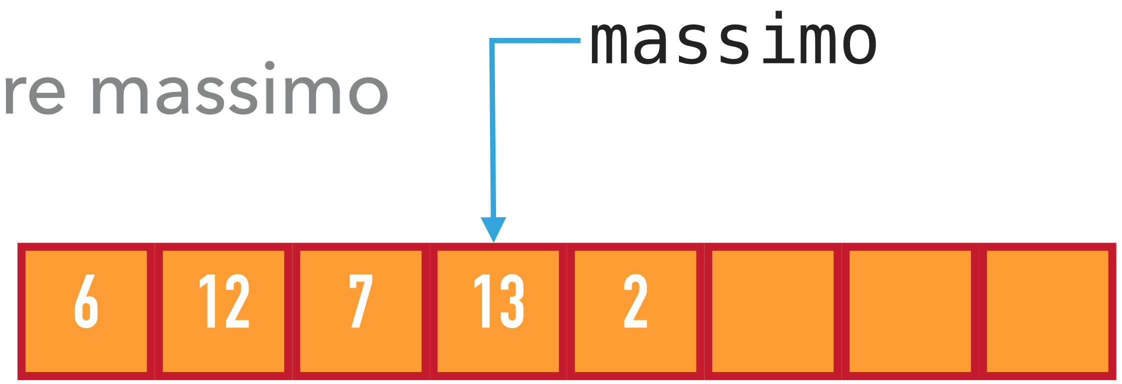
L'inserimento aggiunge solo l'elemento nella prima posizione libera

`indice_libero = 1`

PRIMO APPROCCIO PER CREARE UNA CODA DI PRIORITÀ

La rimozione consiste in due fasi

1. Individuare l’elemento col valore massimo



`indice_libero = 5`

2. Rimuovere l’elemento di valore massimo e rimpiazzarlo con l’ultimo elemento presente nell’array

`indice_libero = 4`

ANALISI DELL'APPROCCIO NAIVE

- L'inserimento richiede di copiare un valore e modificare una variabile, questo richiede tempo costante: $O(1)$
- La rimozioni richiede di trovare il massimo in un array di n elementi e nel *caso peggiore* richiede un numero lineare di passi: $O(n)$
- Per ordinare, ognuna di queste operazioni viene eseguita un numero lineare di volte, ottenendo quindi un costo totale che è *quadratico*: $O(n^2)$

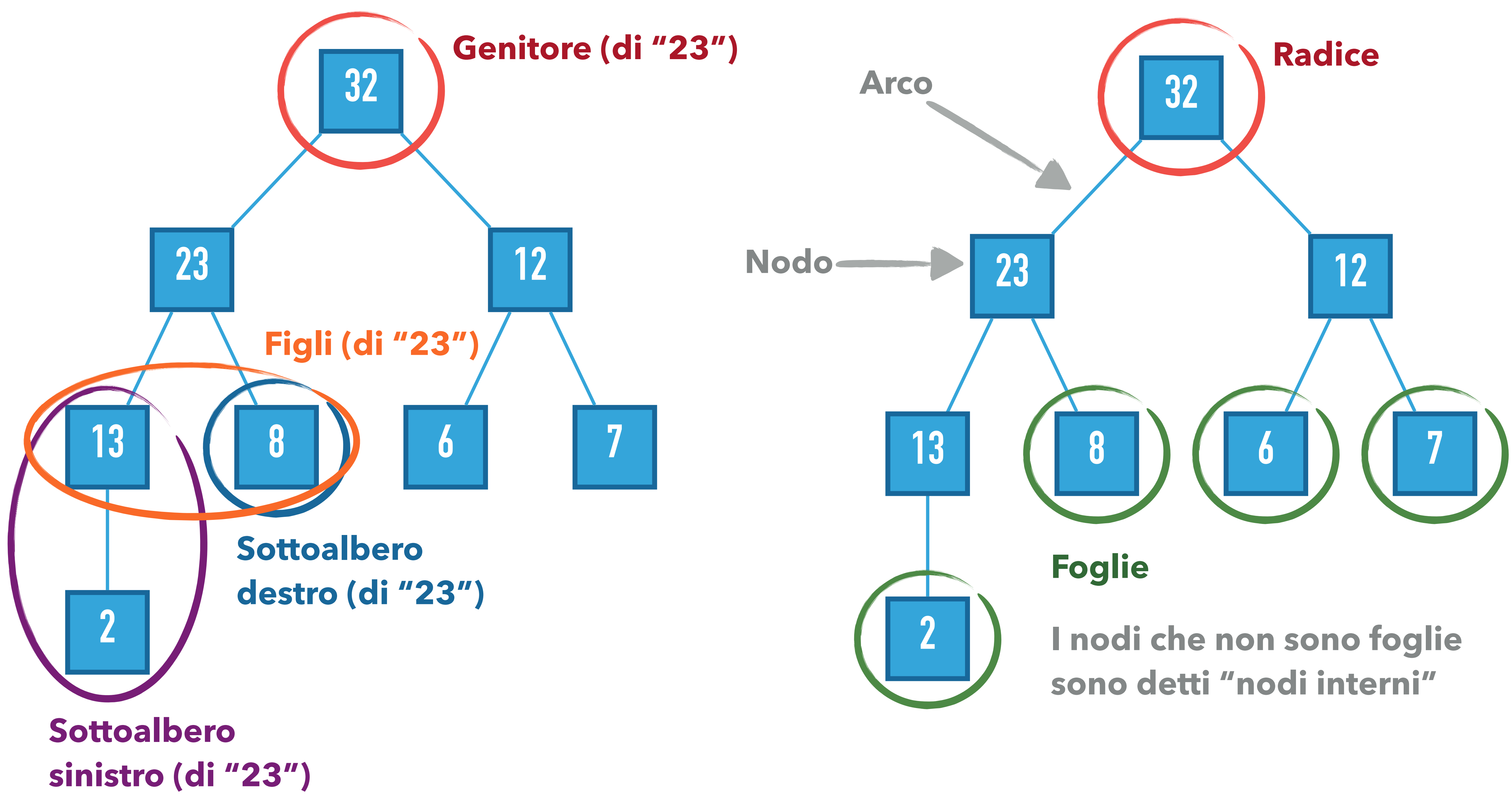
ANALISI DELL'APPROCCIO NAIVE

- Il costo di questo approccio è lo stesso di insertion sort, selection sort e bubble sort.
- Possiamo migliorare la situazione cambiando il modo di rappresentare la coda di priorità?
- Vediamo la struttura del *max-heap*, che consente di effettuare inserimenti e rimozioni in tempo $O(\log n)$

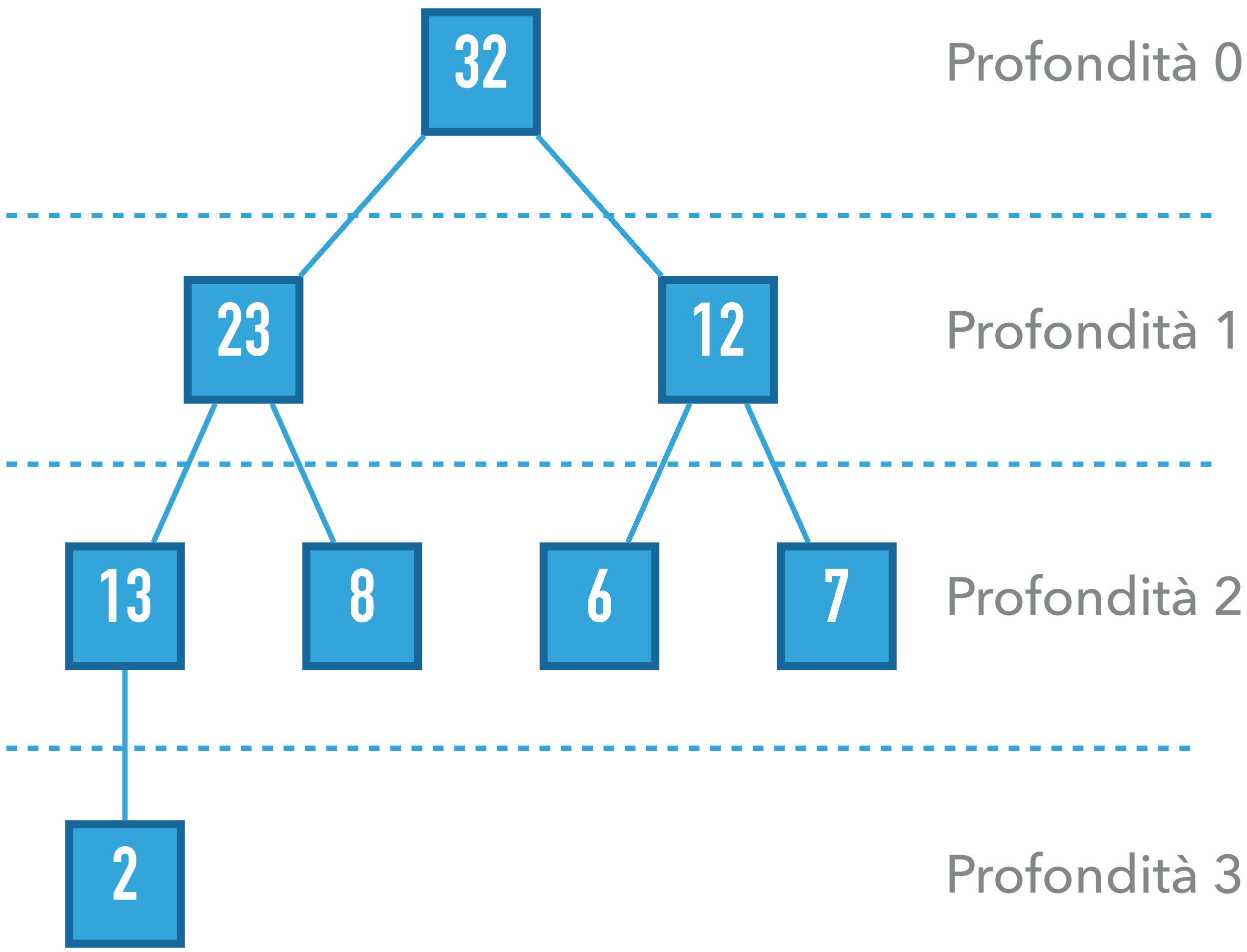
ALBERI BINARI

- Un **albero binario** è una struttura su un insieme finito di nodi tale per cui:
  - Non contiene nodi (albero vuoto), oppure
  - È una tripla composta da:
    - Un **nodo radice**
    - Un albero binario chiamato **sottoalbero sinistro**
    - Un albero binario chiamato **sottoalbero destro**

ALBERI BINARI



ALBERI BINARI



La **profondità** del nodo i è il numero di archi da percorrere a partire dalla radice per raggiungere il nodo i.

L'**altezza** di un albero è il massimo della profondità dei suoi nodi

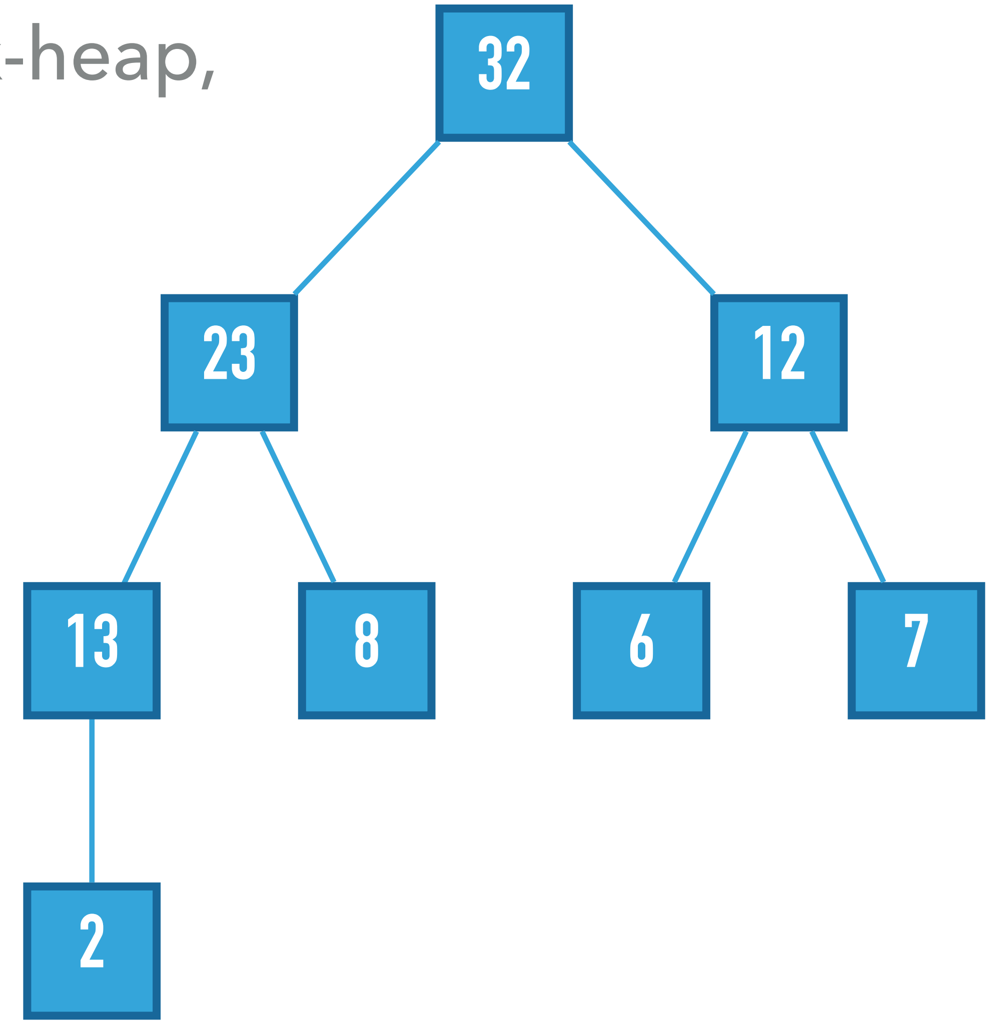
Un albero di altezza h ha al più $2^{h+1} - 1$ nodi: let's prove it!

Un albero binario **quasi completo** ha tutti i livelli pieni eccetto l'ultimo, pieno da sx a dx.

Un albero binario completo con n nodi ha $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ foglie.

MAX-HEAP

Questo albero binario rappresenta un max-heap, ovvero rispetta la proprietà di max-heap



Definizione (proprietà di max-heap)

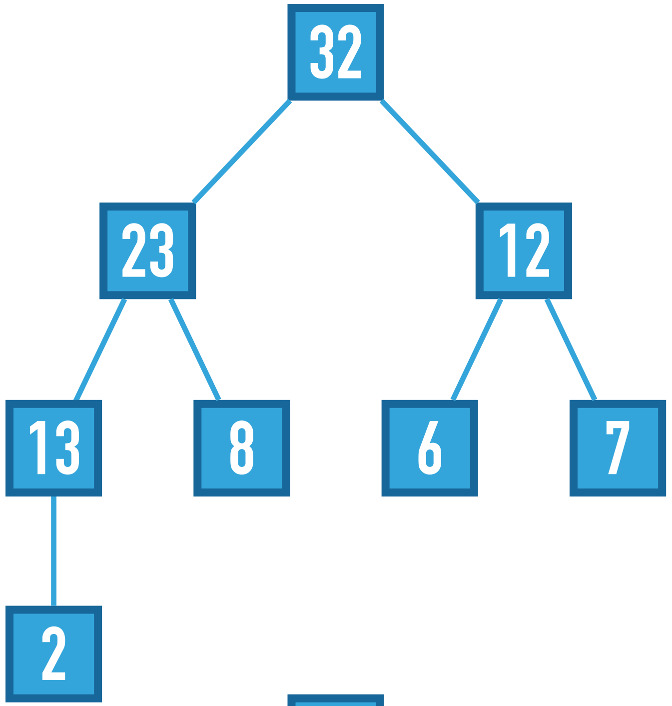
Un albero binario ha la proprietà di *max-heap* (resp., *min-heap*) se per ogni nodo diverso dalla radice, il valore in esso contenuto è minore o uguale (resp. maggiore o uguale) al valore contenuto nel nodo genitore.

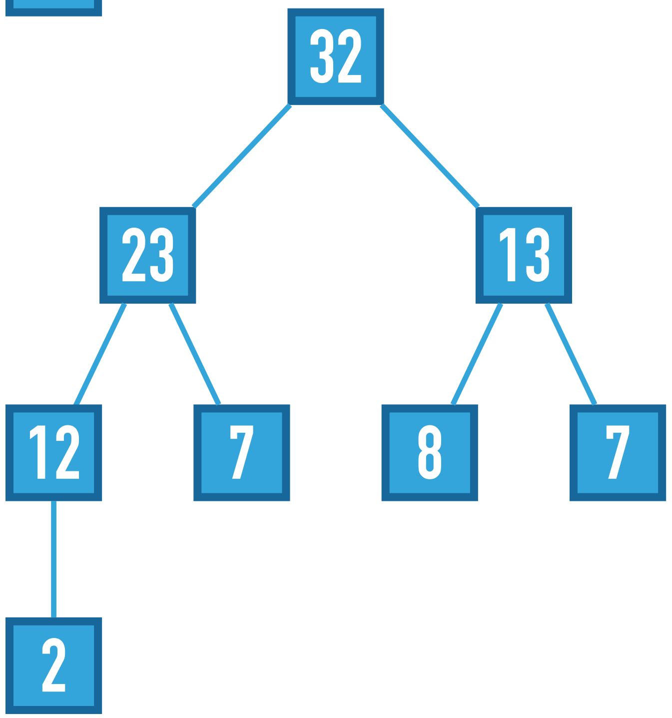
key(x) ≥ key(left(x))   e key(x) ≥ key(right(x))

x.key ≥ x.left.key   e x.key ≥ x.right.key

CONSEGUENZE DELLA PROPRIETÀ DI MAX-HEAP

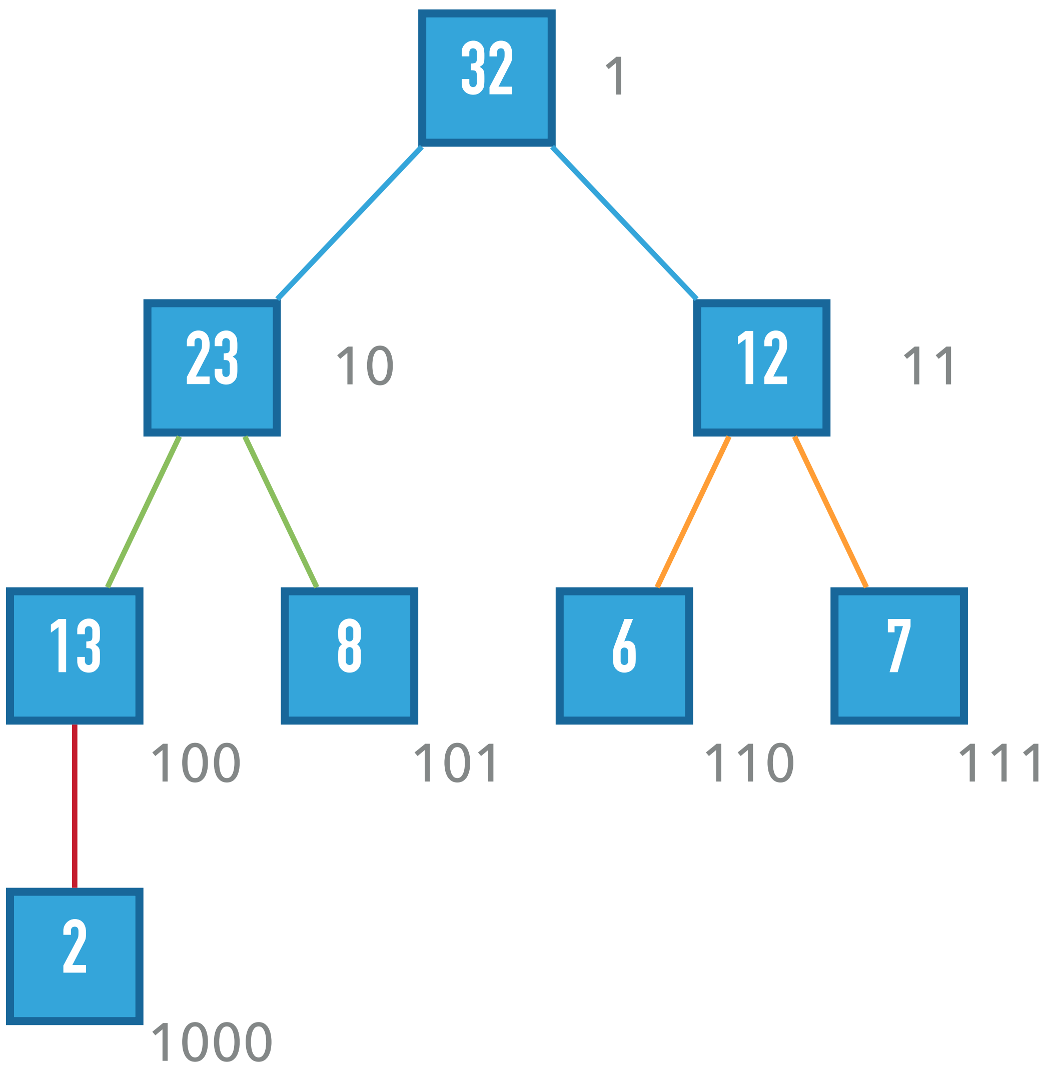
- Il valore massimo del max-heap si trova sempre nella radice
- Per lo stesso insieme di valori possono esistere più alberi che rispettano la propria di max-heap

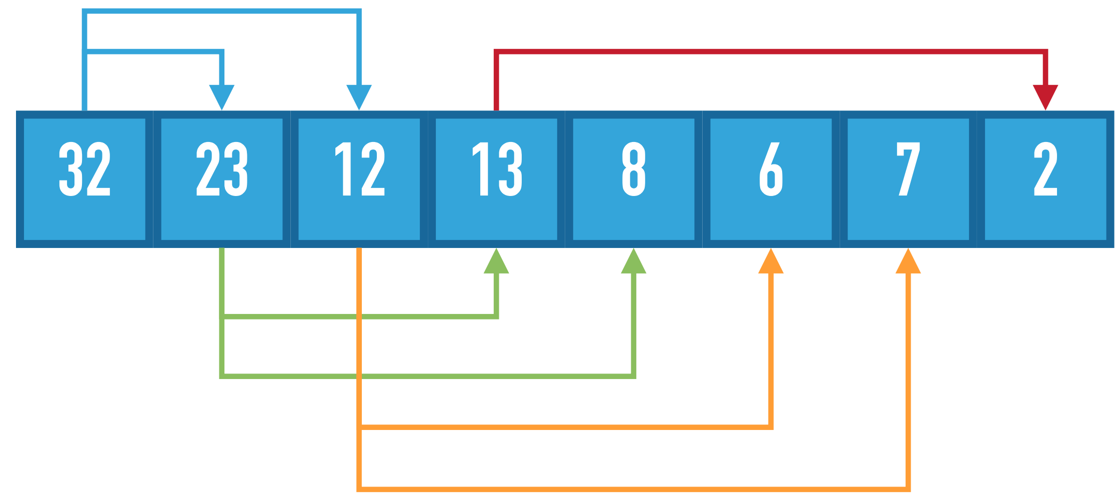




MA COME POSSO RAPPRESENTARE UN MAX-HEAP NEL CODICE?

ALBERI BINARI COME ARRAY





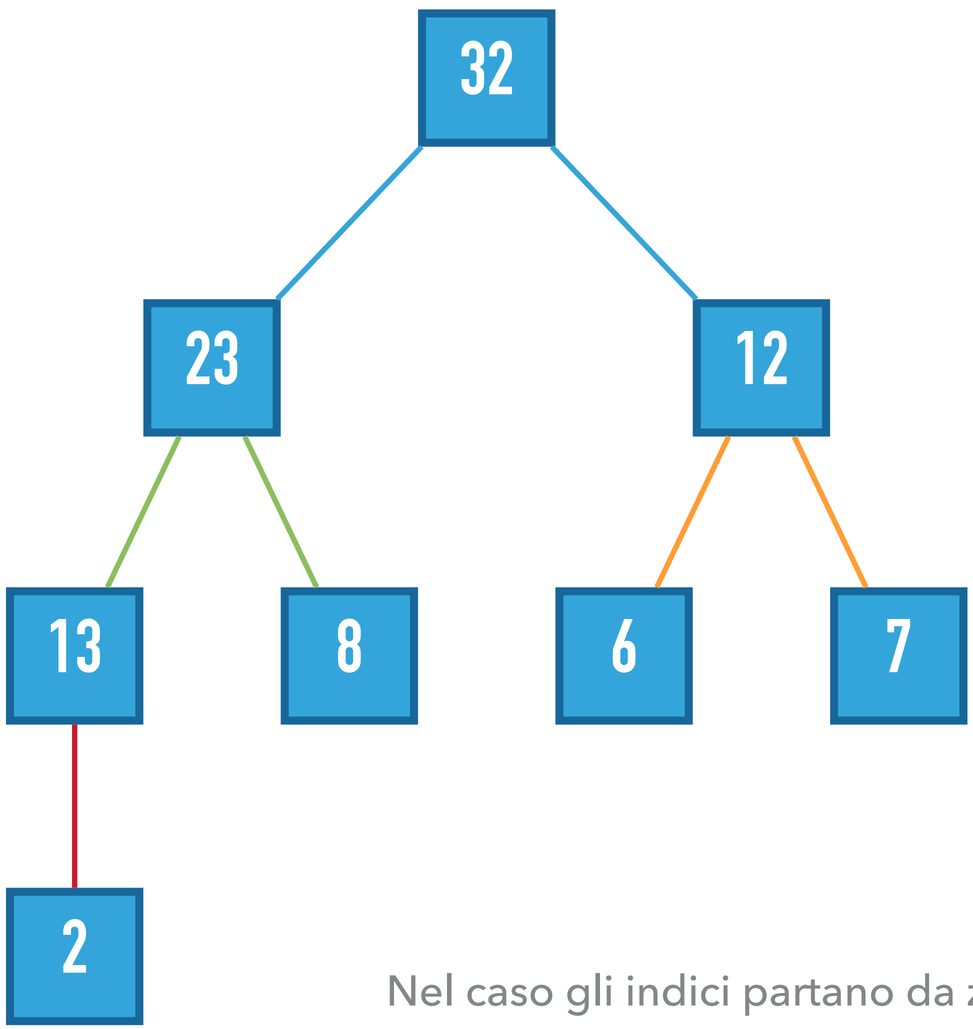
Usiamo un array per rappresentare un max-heap. Gli indici ci indicano chi sono i figli e il genitore di un nodo.

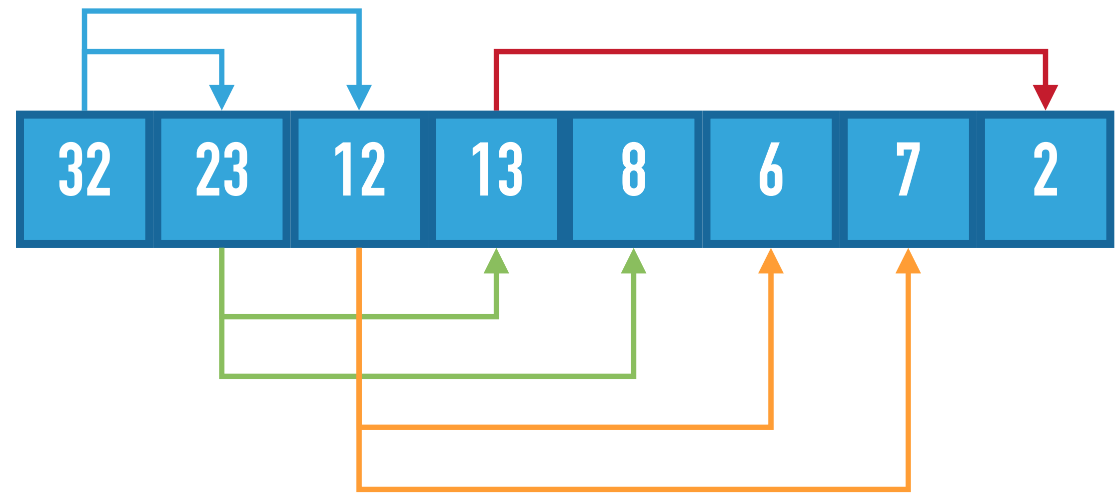
heap-size(A) (≤ length(A))

Dato il nodo in posizione i dell'array:

	parent(i)=$\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$	Genitore
	left(i)=$2i$	Figlio sinistro
	right(i)=$2i+1$	Figlio destro

ALBERI BINARI COME ARRAY





Usiamo un array per rappresentare un max-heap. Gli indici ci indicano chi sono i figli e il genitore di un nodo

Nel caso gli indici partano da zero

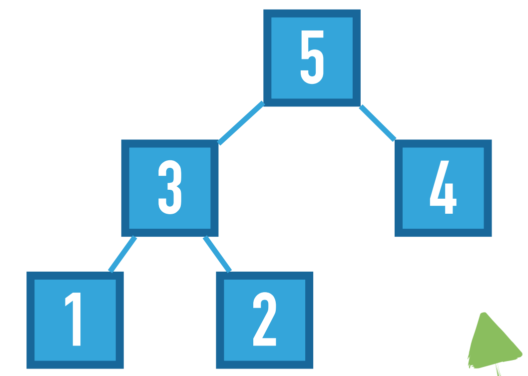
Dato il nodo in posizione i dell'array:

parent(i)=$\left\lfloor \frac{i-1}{2} \right\rfloor$ Genitore

left(i)=$2i+1$ Figlio sinistro

right(i)=$2i+2$ Figlio destro

ARRAY COME MAX-HEAP: QUIZ



Quale dei seguenti array rappresenta un max-heap?

1)

4	5	3	1	2

2)

5	3	4	1	2

3)

5	3	2	4	1

4)

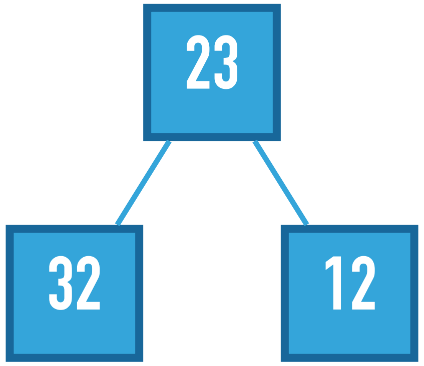
1	5	2	4	3

PROCEDURE DA DEFINIRE

- Inserimento nello heap
- Rimozione del massimo dall'heap
- Come procedure di support useremo:
  - Build-max-heap: per costruire un max-heap dato l'array da ordinare
  - Max-heapify: per ripristinare la proprietà di max-heap quando la radice non rispetta la proprietà di max-heap (ma tutti gli altri nodi la rispettano)

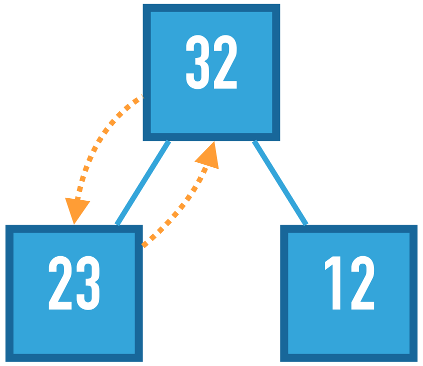
MAX-HEAPIFY

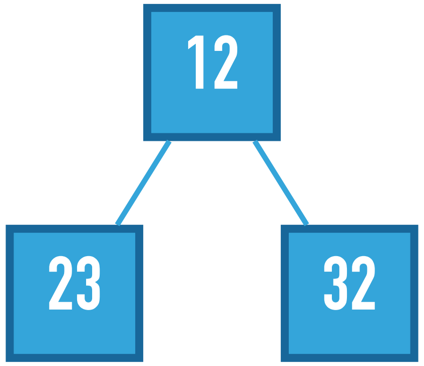
Vediamo su un albero di dimensione ridotta in che modi possiamo infrangere la proprietà di max-heap e come ripristinarla



Il valore massimo è nel figlio di sinistra

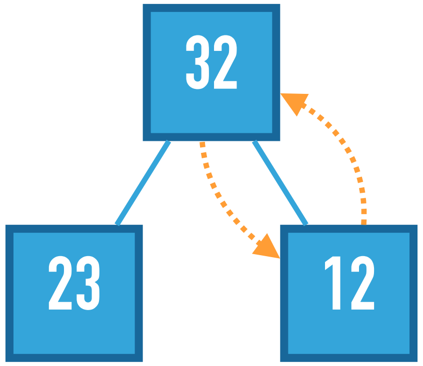
Scambiamo il valore del figlio di sinistra con quello contenuto nella radice





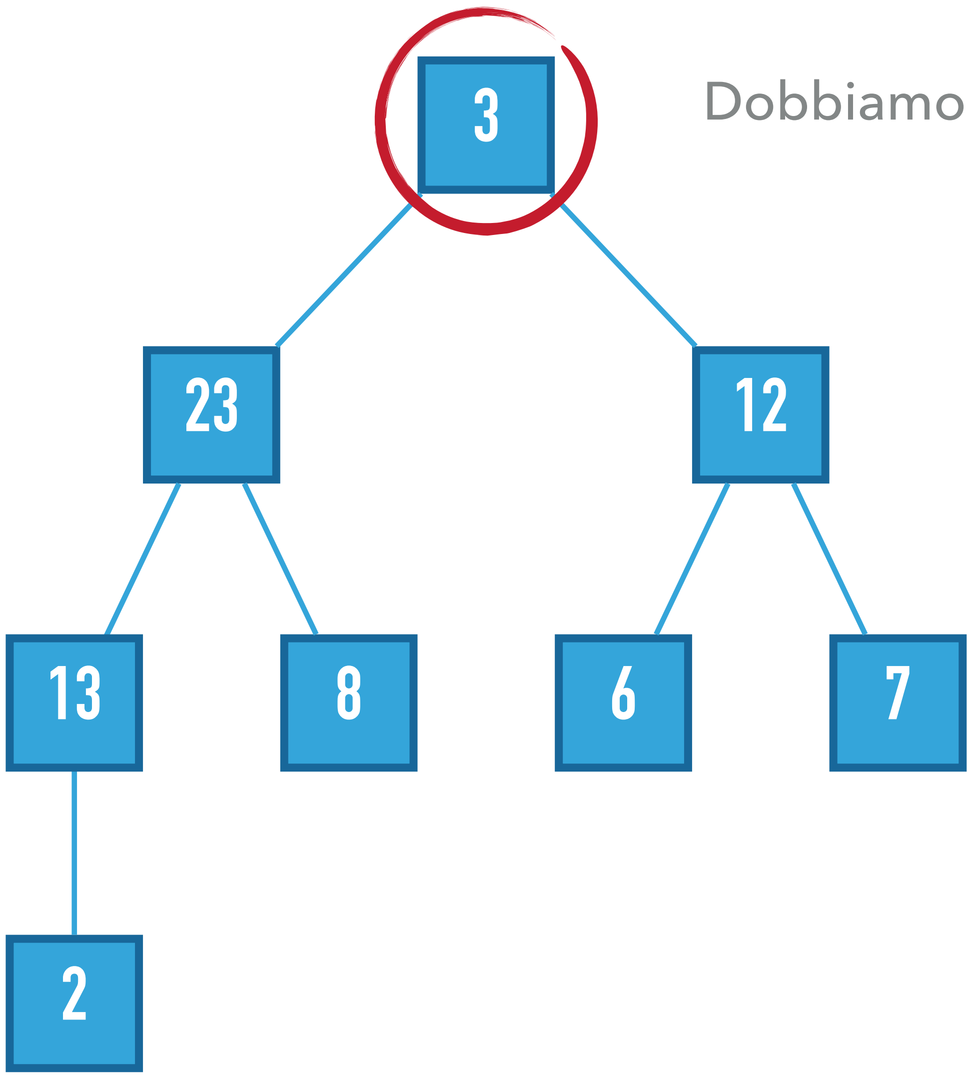
Il valore massimo è nel figlio di destra

Scambiamo il valore del figlio di destra con quello contenuto nella radice



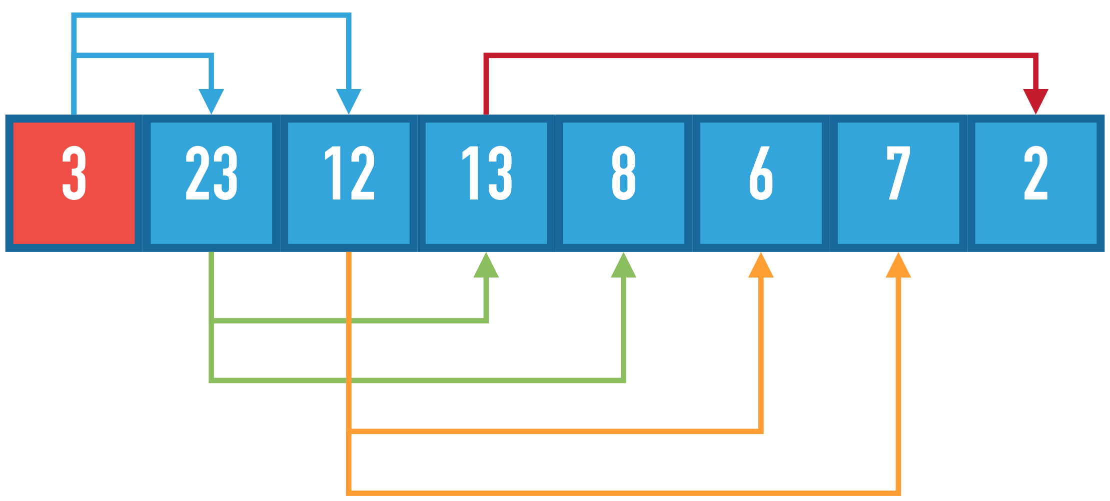
MAX-HEAPIFY

Per alberi di dimensione maggiore basta ripetere la procedura ricorsivamente finché la proprietà non è rispettata



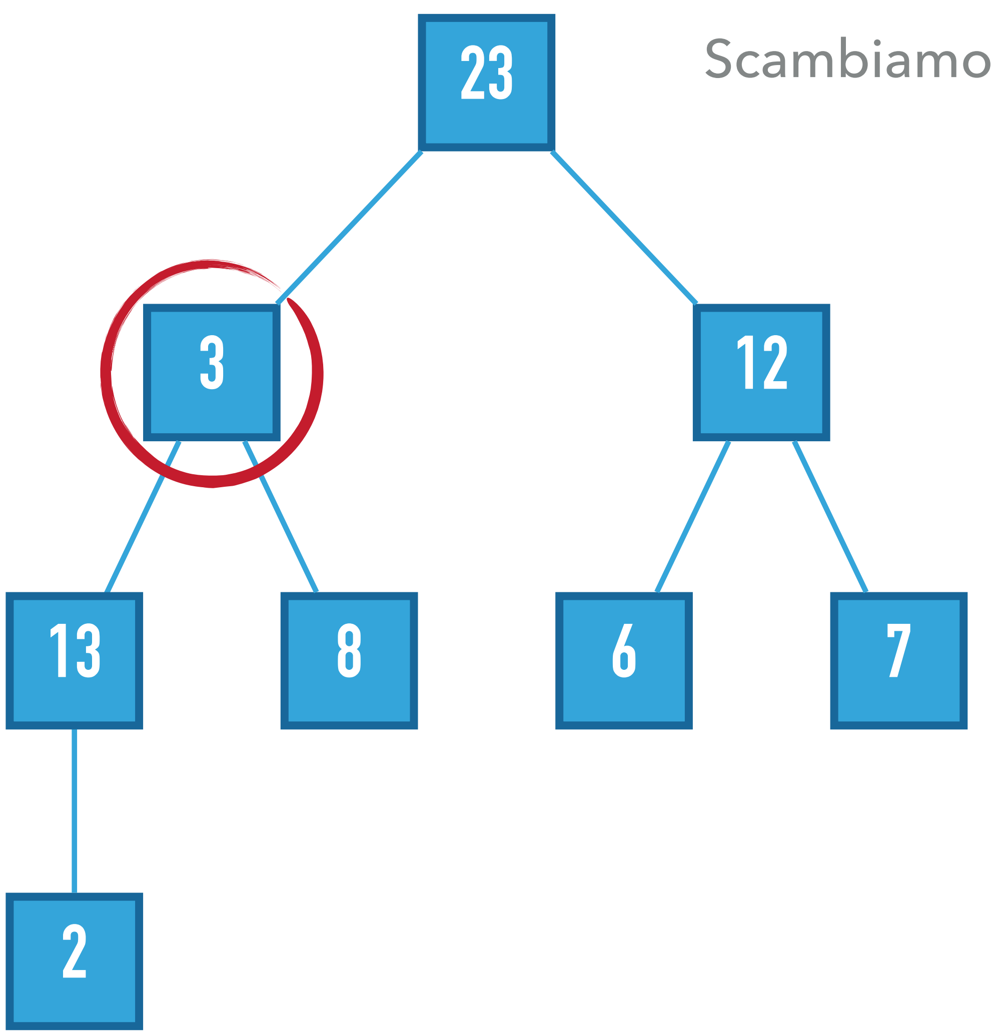
Dobbiamo posizionare "3" correttamente

Visualizzazione della rappresentazione come array del max-heap:



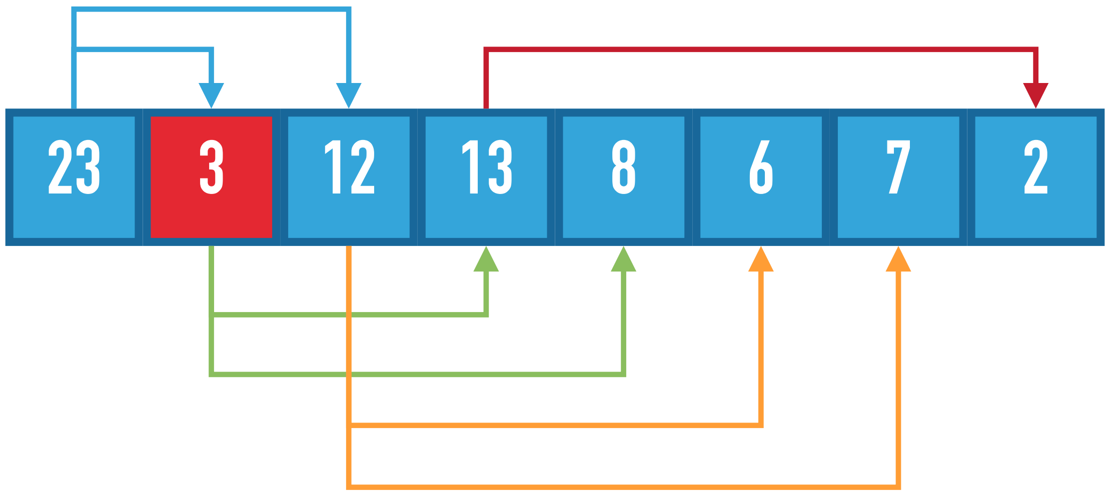
MAX-HEAPIFY

Per alberi di dimensione maggiore basta ripetere la procedura ricorsivamente finché la proprietà non è rispettata



Scambiamo con "23" perché è il maggiore

Visualizzazione della rappresentazione come array del max-heap:



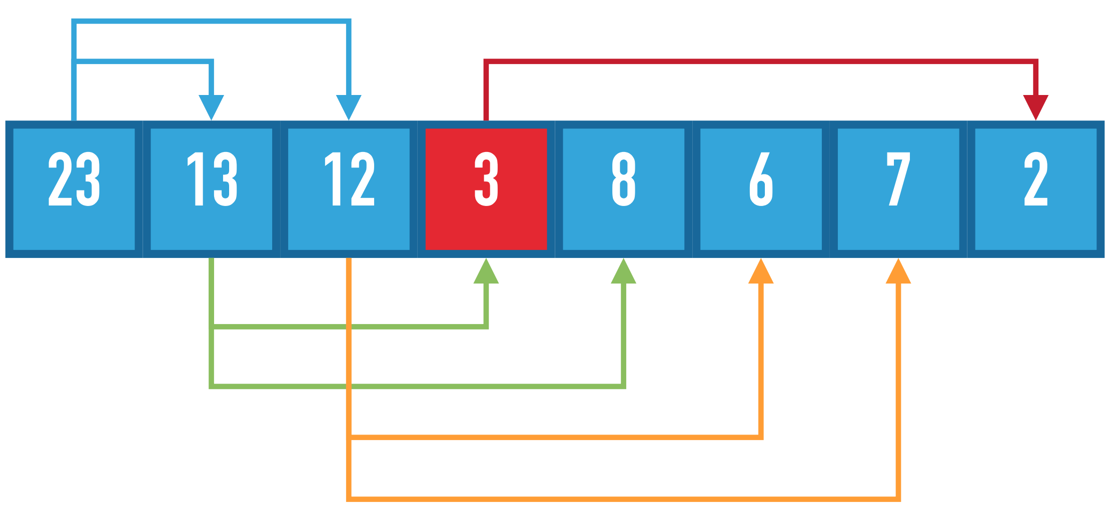
MAX-HEAPIFY

Per alberi di dimensione maggiore basta ripetere la procedura ricorsivamente finché la proprietà non è rispettata

Scambiamo con “13” perché è il maggiore

LA PROPRIETÀ DI MAX-HEAP
È STATA RIPRISTINATA

Visualizzazione della rappresentazione come array del max-heap:



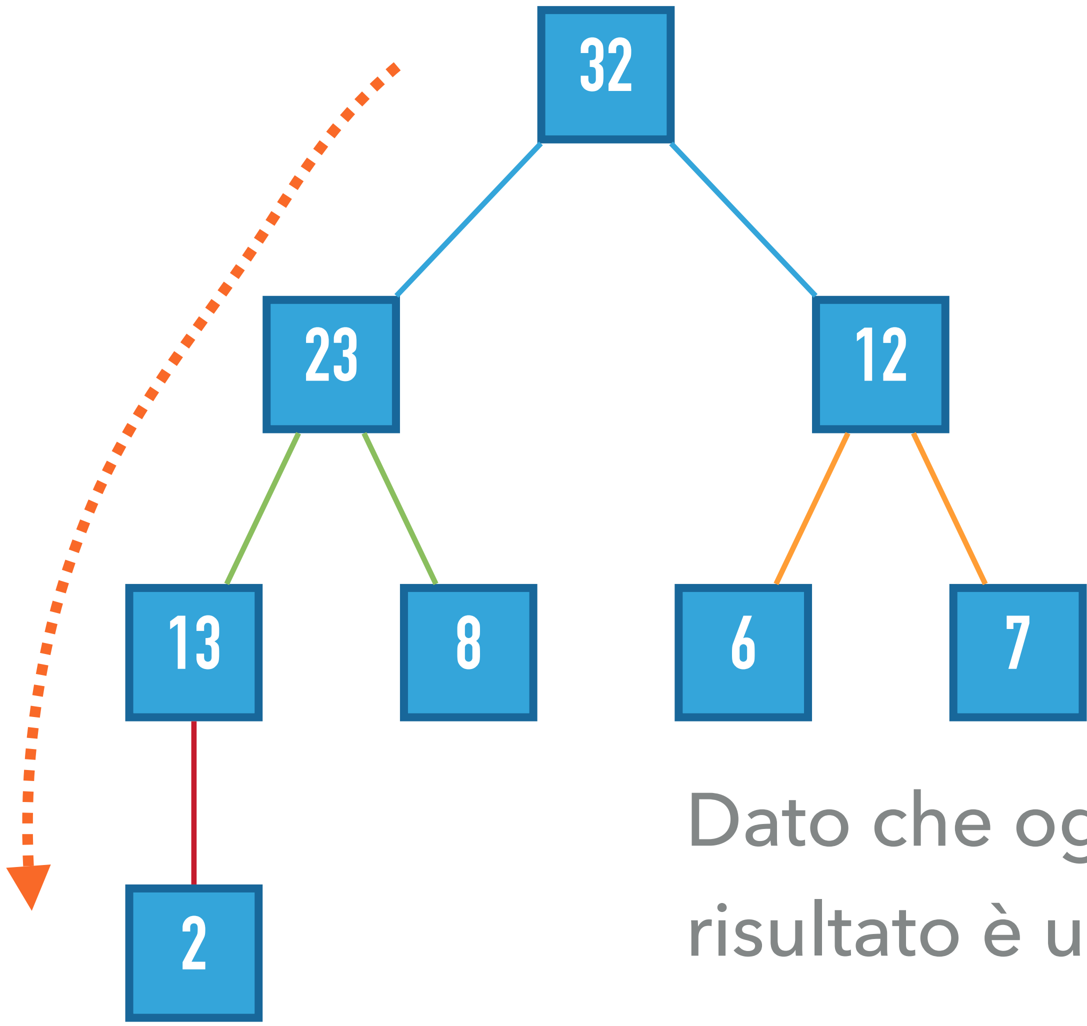
MAX-HEAPIFY: PSEUDOCODICE

```
‣ Parametri: A (array), i (posizione)
‣ L = left(i)
‣ R = right(i)
‣ largest = i # inizialmente "i" è il nostro candidato
‣ if L <heap-size(A) and A[L] > a[largest]
    ‣ largest = L # se il figlio sinistro è maggiore
‣ if R <heap-size(A) and A[R] > a[largest]
    ‣ largest = R # se il figlio destro è maggiore
‣ if largest ≠ i
    ‣ swap(A[i],A[largest])# scambiamo "i" e "largest"
    ‣ max-heapify(A, largest) # chiamiamo ricorsivamente
```

MAX-HEAPIFY: COMPLESSITÀ

- Le operazioni non ricorsive che facciamo ad ogni passo richiedono un tempo costante (si tratta di confronti e scambi): tempo $\Theta(1)$
- Ogni chiamata ricorsiva "elimina" un intero sottoalbero. Nel caso peggiore rimangono un numero di nodi che è pari a $2/3$ la dimensione originale. Perchè?
- L'equazione di ricorrenza è quindi: $T(n) \leq T(2n/3) + \Theta(1)$
- Per il teorema dell'esperto, $T(n) = O(\log n)$

MAX-HEAPIFY: COMPLESSITÀ



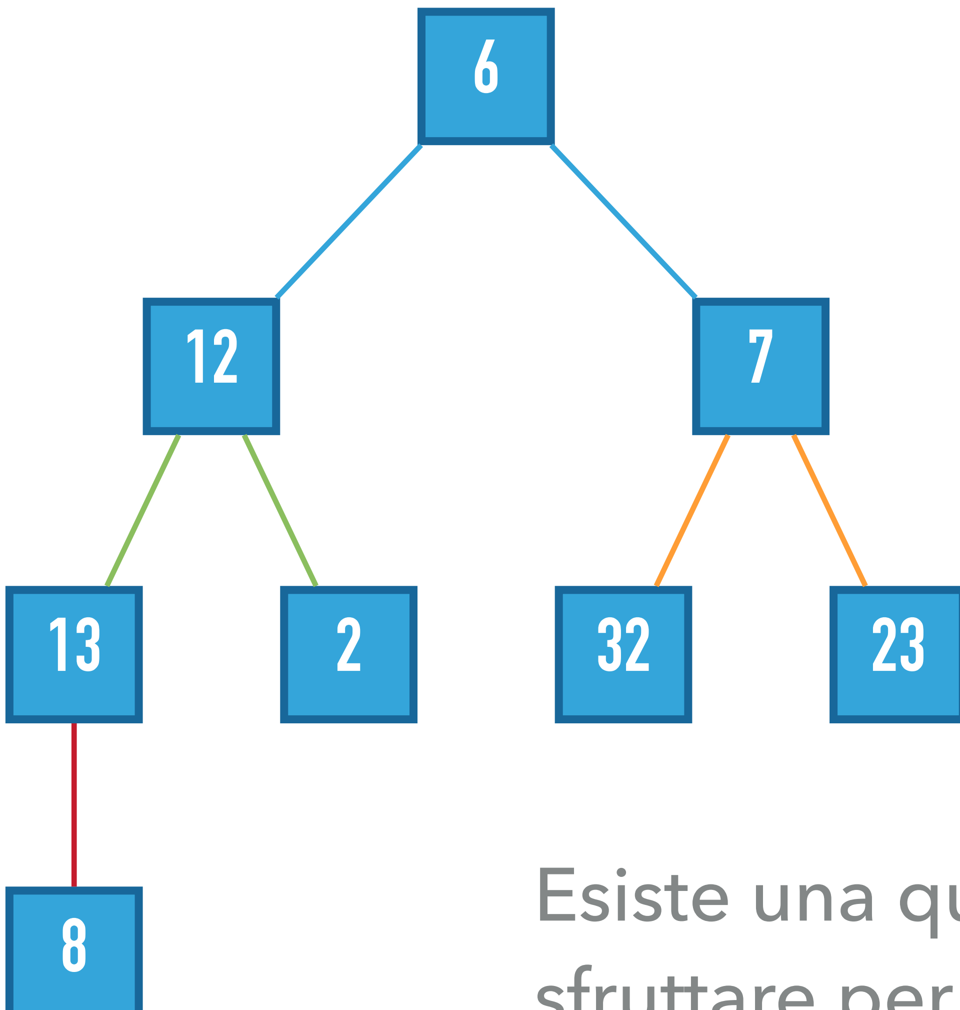
Un altro modo di vedere la complessità: ad ogni chiamata ricorsiva scendiamo di un livello nell'albero binario.

L'albero binario ha una profondità che è logaritmica rispetto al numero di nodi

Dato che ogni "discesa" richiede tempo costante, il risultato è una complessità di $O(\log n)$

In generale, per uno heap di altezza h, la procedura max-heapify richiede tempo $O(h)$

BUILD-MAX-HEAP: IDEA

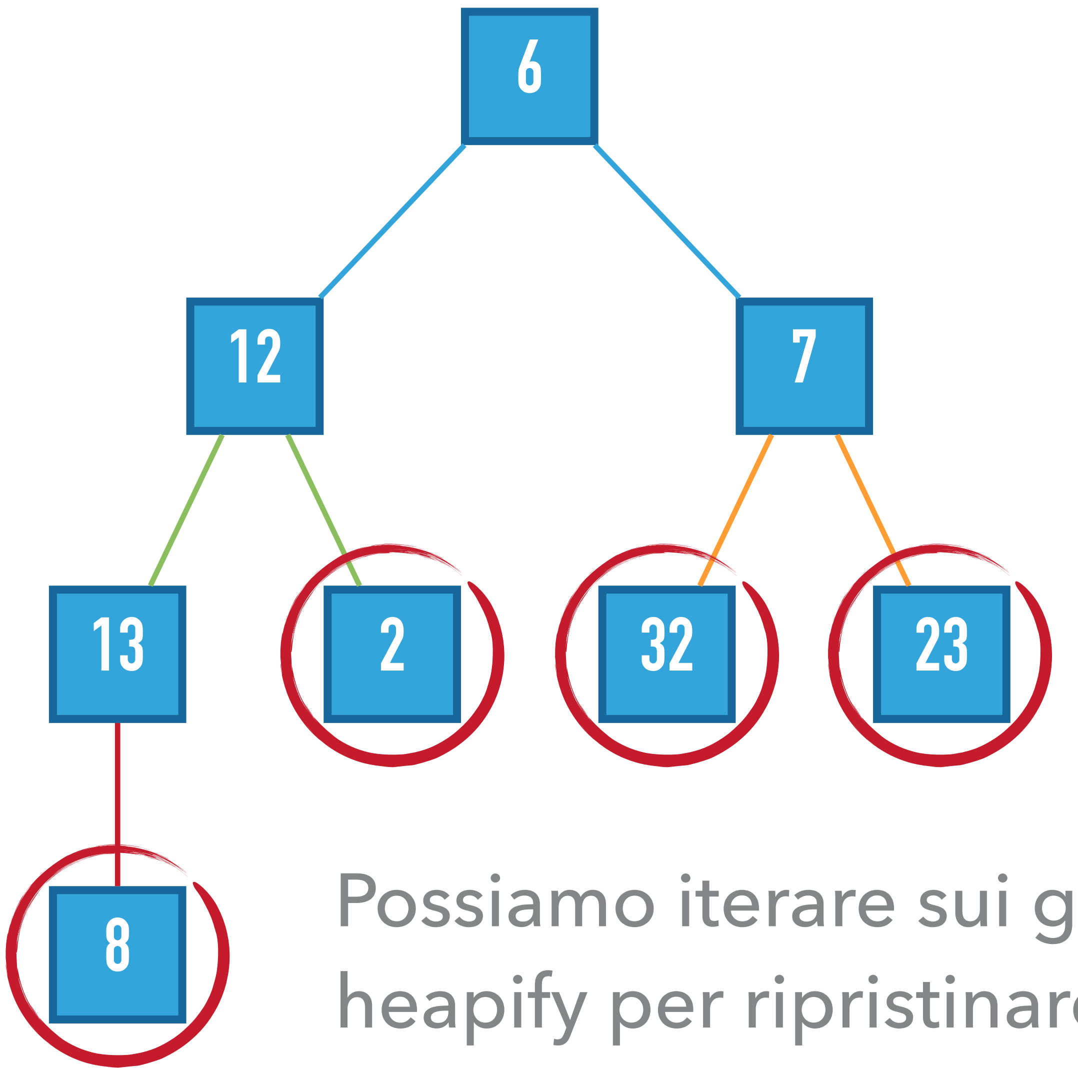


L'array con coi iniziamo non è un max-heap:

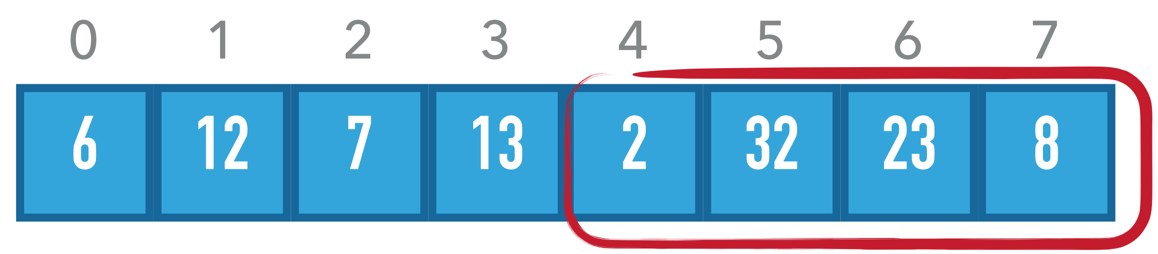
6	12	7	13	2	32	23	8

Esiste una qualche struttura che possiamo sfruttare per costruire un max-heap?

BUILD-MAX-HEAP: IDEA



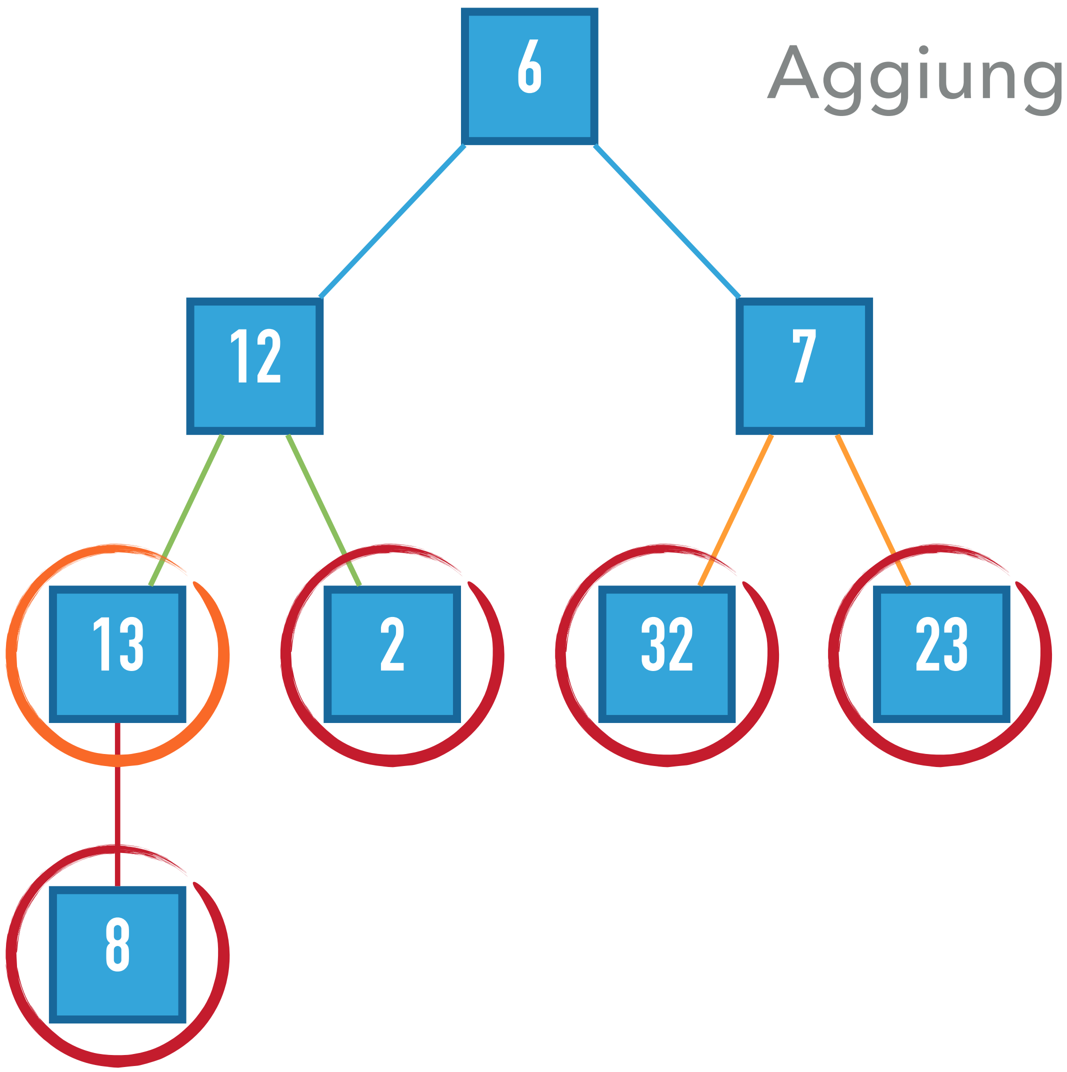
Tutte le foglie sono già max-heap!



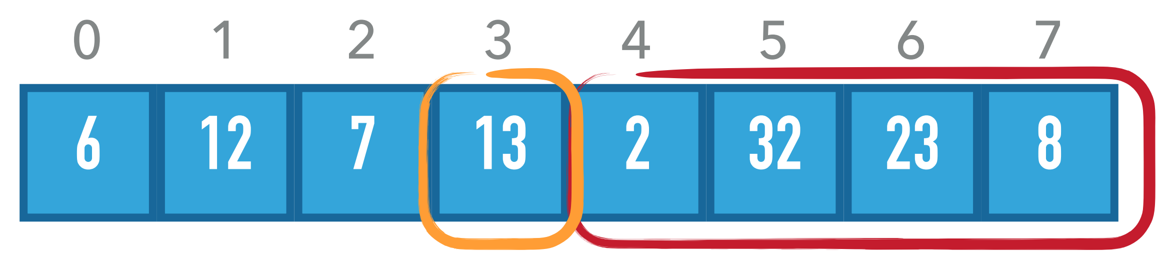
Le foglie sono nell'intervallo di indici da $\lfloor n/2 \rfloor$ a $n-1$

Possiamo iterare sui genitori delle foglie e chiamare max-heapify per ripristinare la proprietà di max-heap e proseguire sui genitori dei genitori e via così fino a quando non abbiamo creato un max-heap

BUILD-MAX-HEAP: IDEA

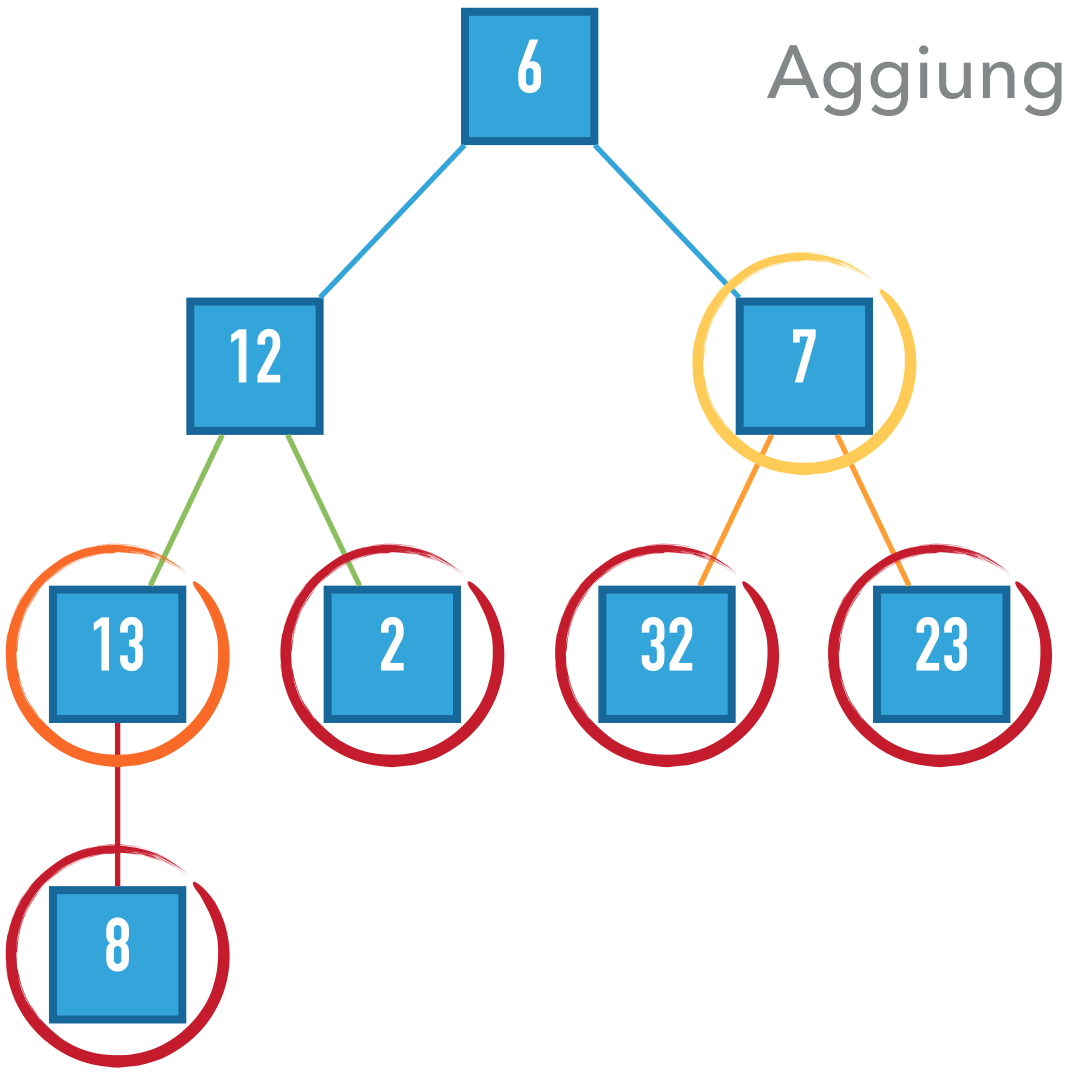


Aggiungiamo l'elemento in posizione $\lfloor n/2 \rfloor - 1$

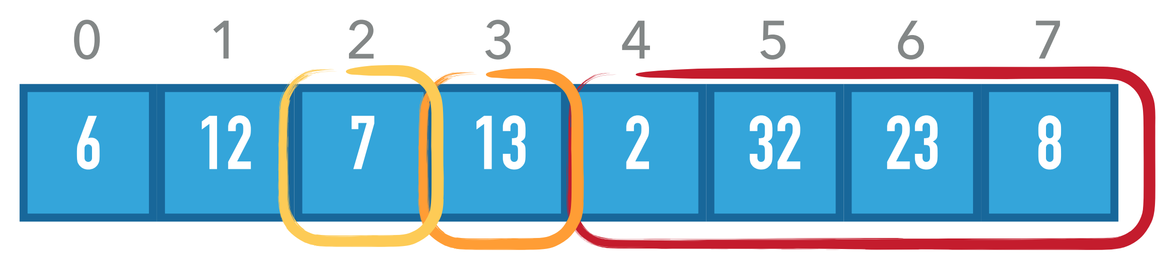


Chiamiamo max-heapify
con indice $\lfloor n/2 \rfloor - 1$

BUILD-MAX-HEAP: IDEA

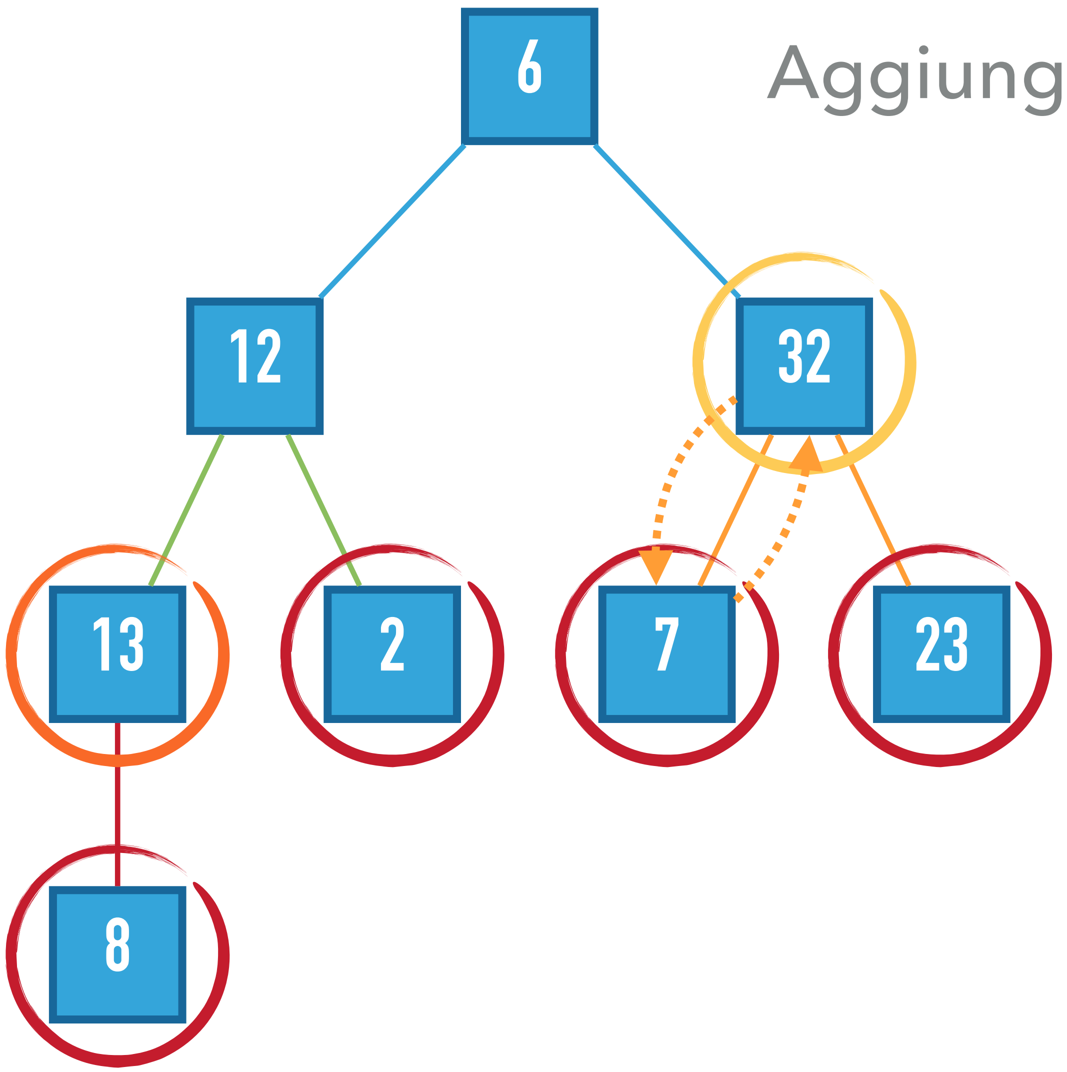


Aggiungiamo l'elemento in posizione $\lfloor n/2 \rfloor - 2$

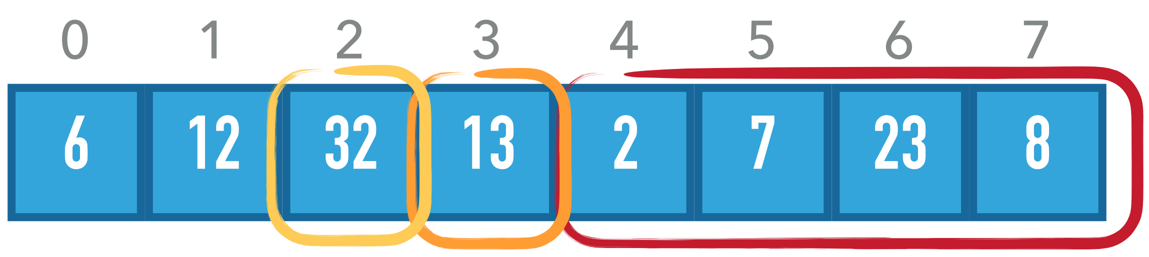


Chiamiamo max-heapify
con indice $\lfloor n/2 \rfloor - 2$

BUILD-MAX-HEAP: IDEA

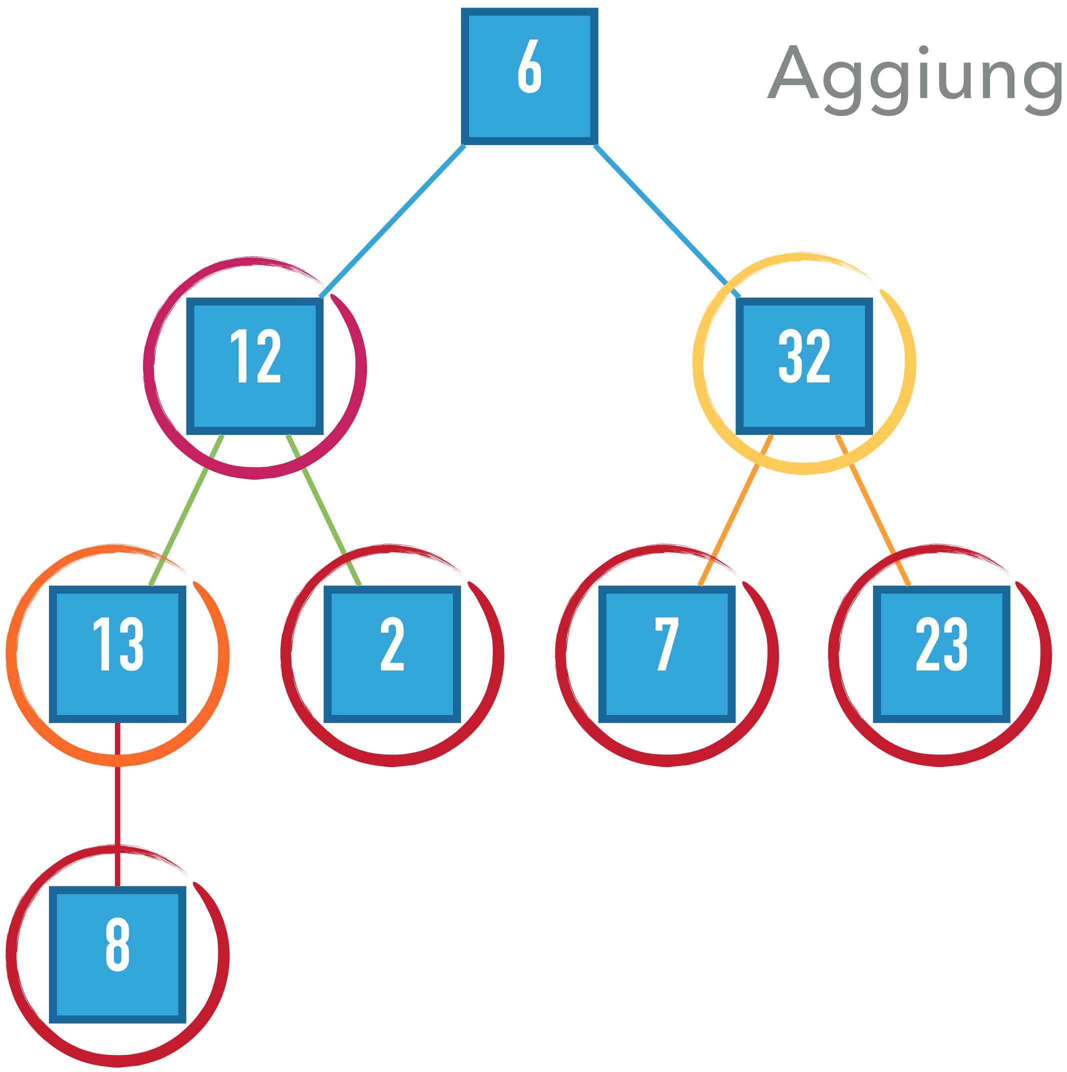


Aggiungiamo l'elemento in posizione $\lfloor n/2 \rfloor - 2$

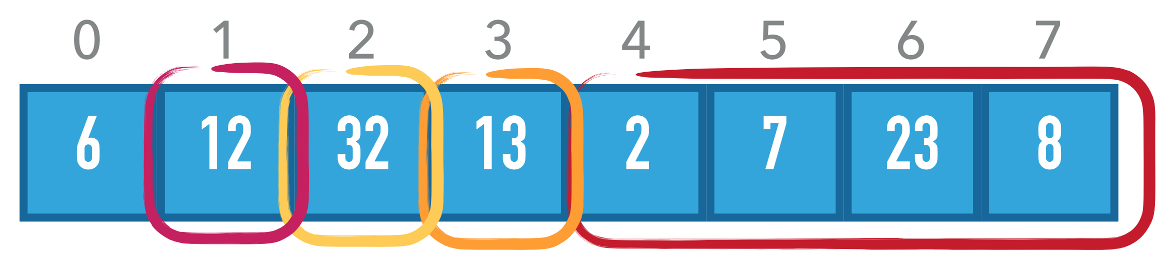


Chiamiamo max-heapify
con indice $\lfloor n/2 \rfloor - 2$

BUILD-MAX-HEAP: IDEA

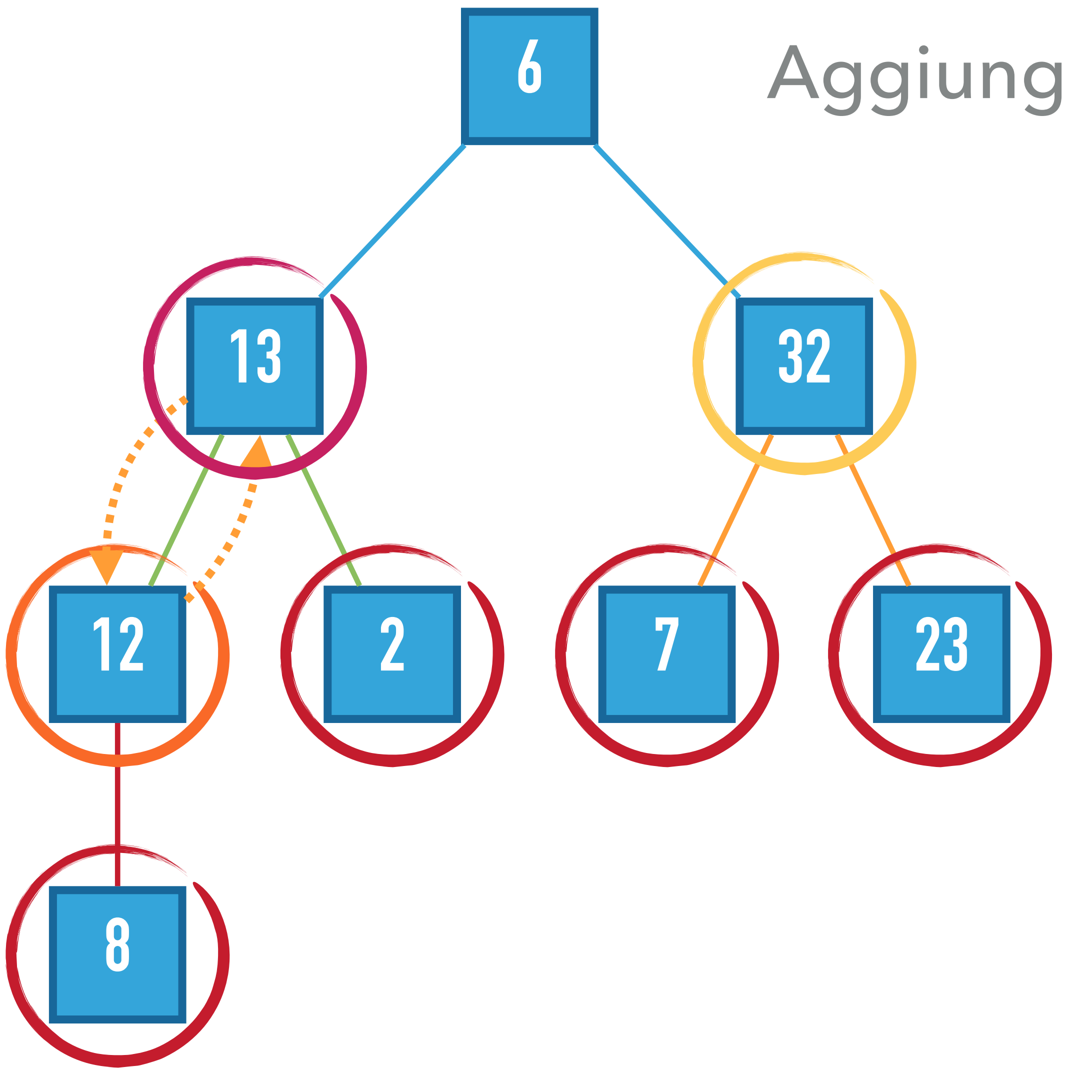


Aggiungiamo l'elemento in posizione 1

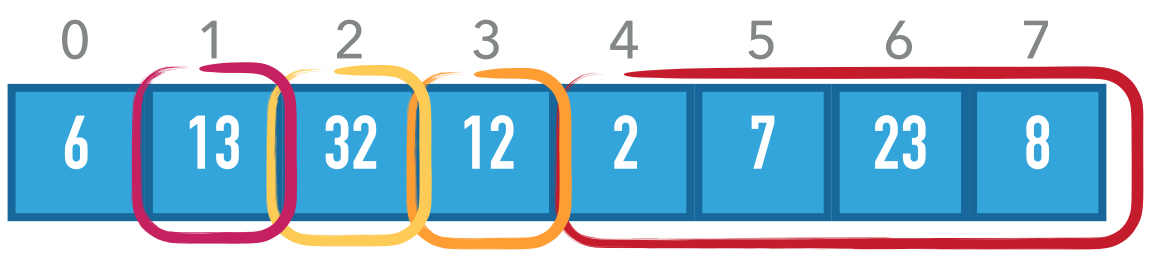


Chiamiamo max-heapify con indice 1

BUILD-MAX-HEAP: IDEA

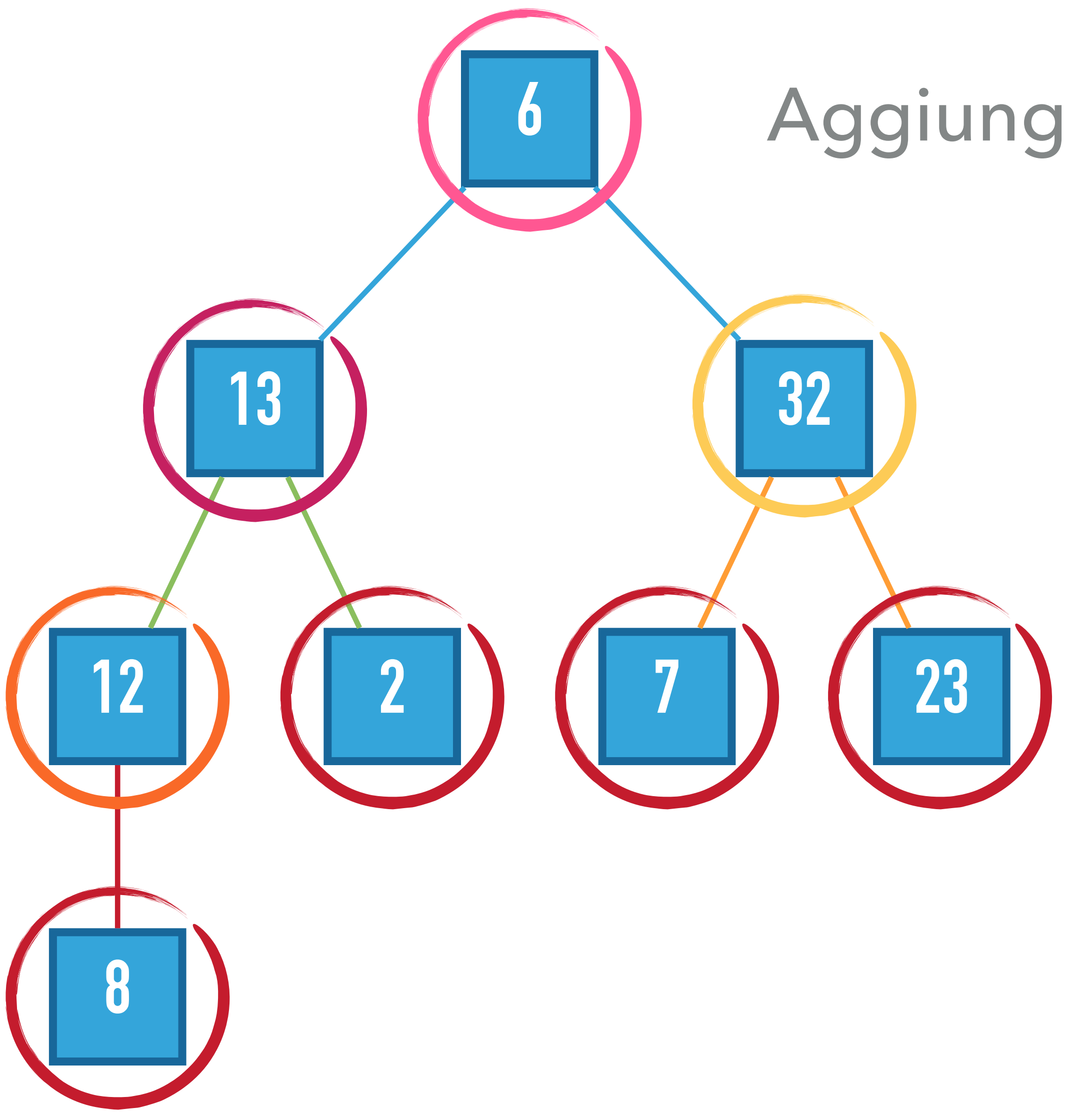


Aggiungiamo l'elemento in posizione 1

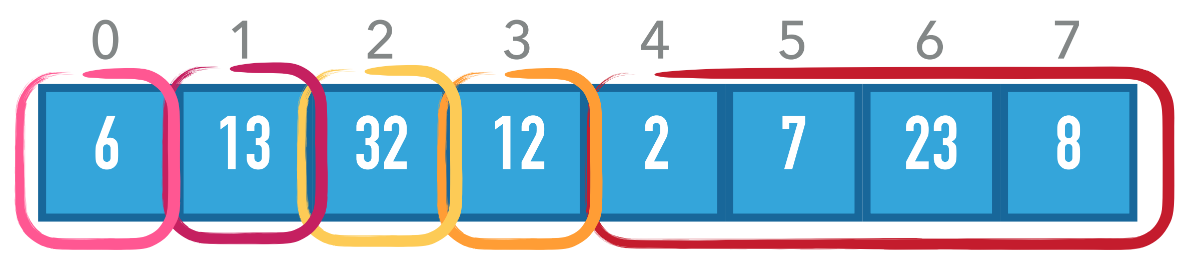


Chiamiamo max-heapify
con indice 1

BUILD-MAX-HEAP: IDEA

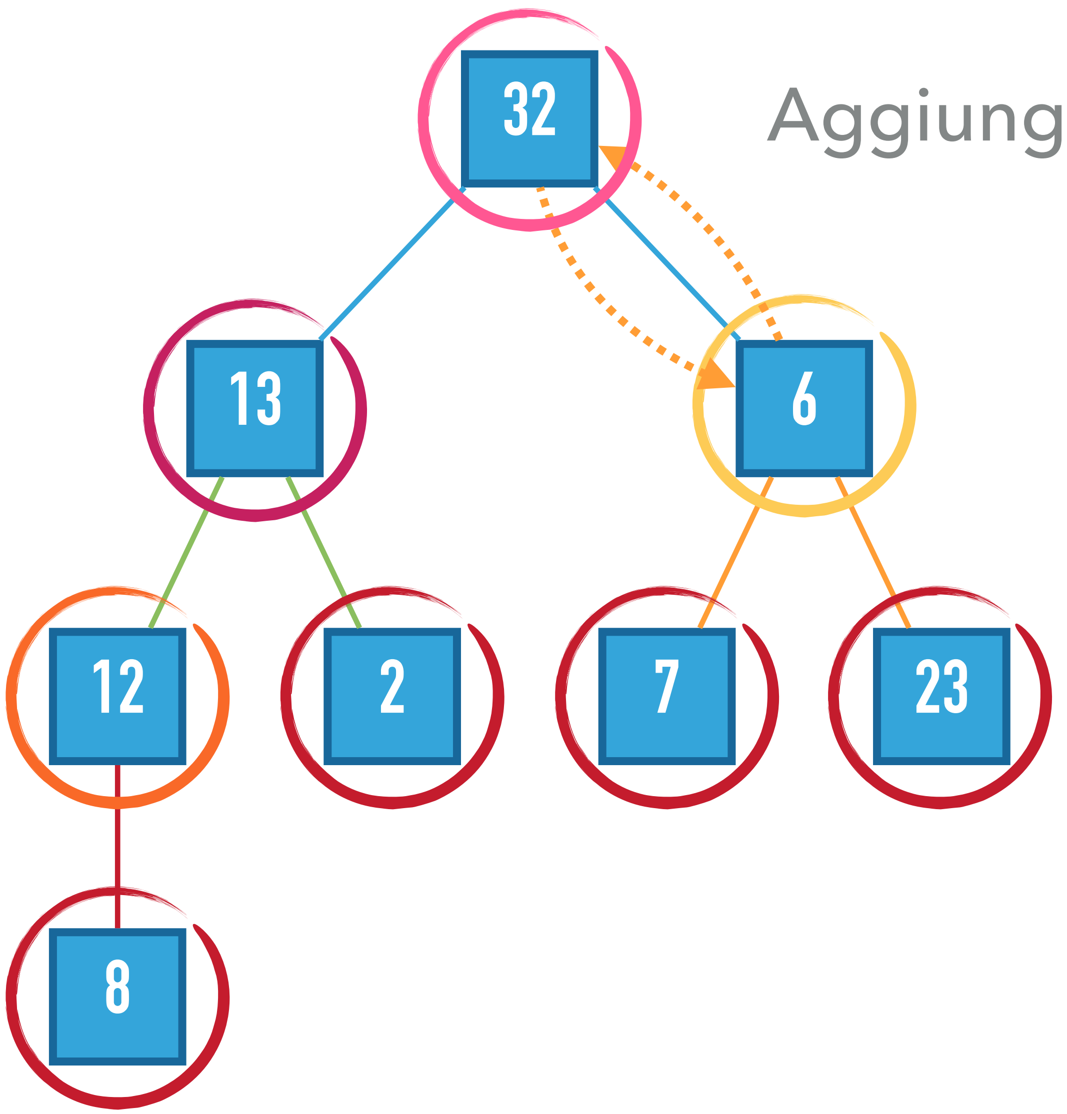


Aggiungiamo l'elemento in posizione 0

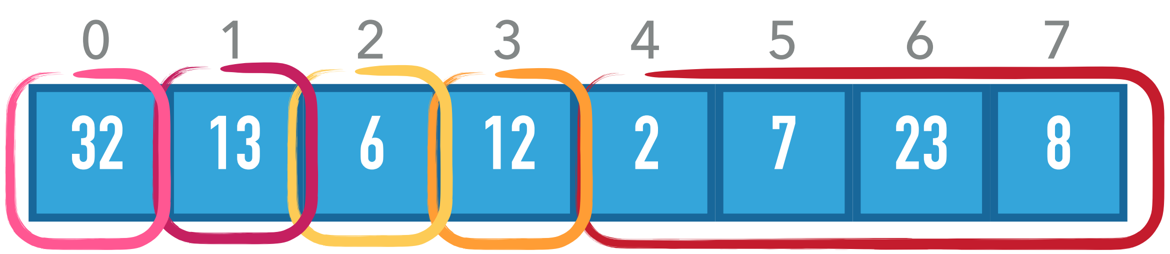


Chiamiamo max-heapify
con indice 0

BUILD-MAX-HEAP: IDEA

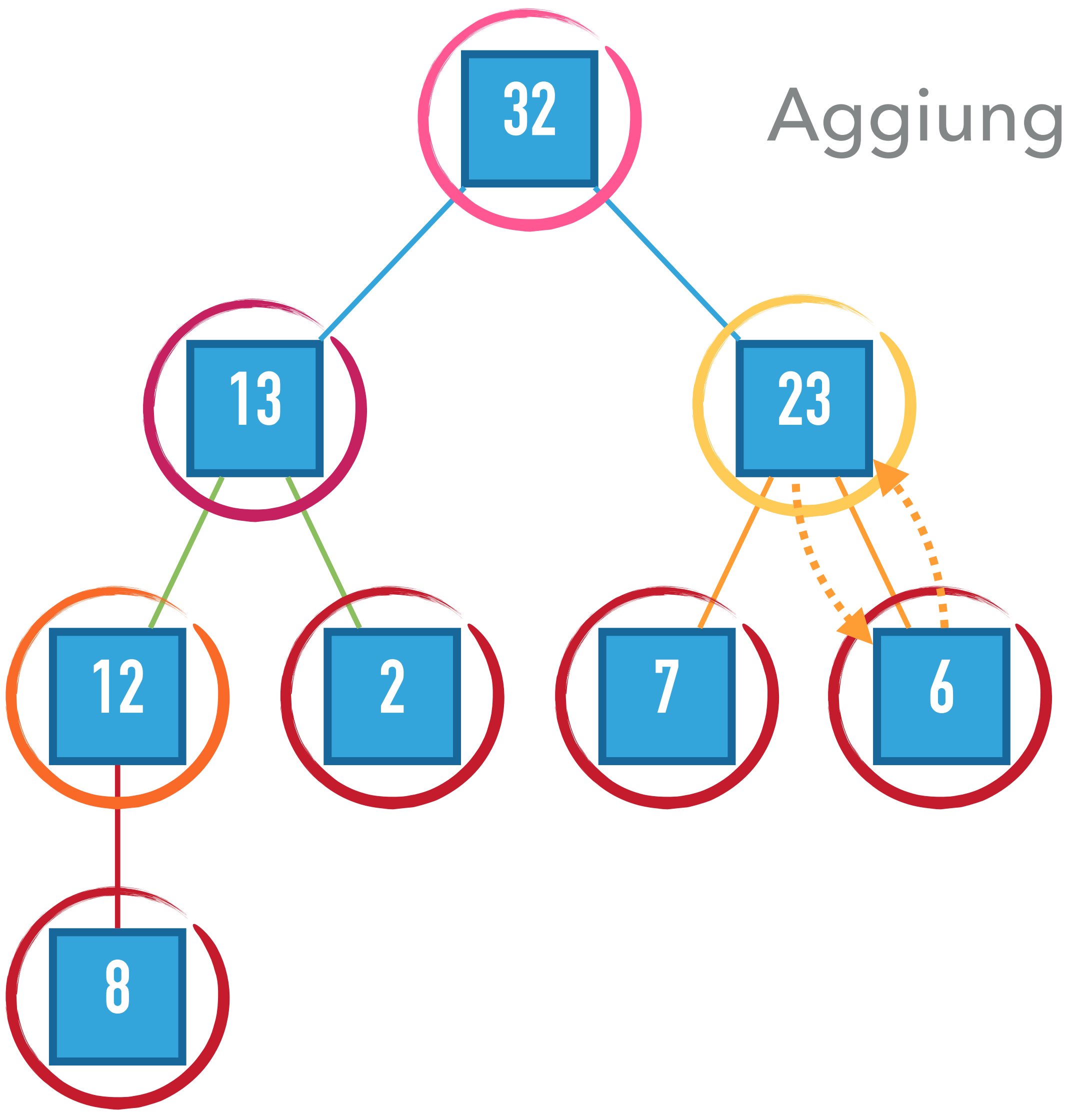


Aggiungiamo l'elemento in posizione 0

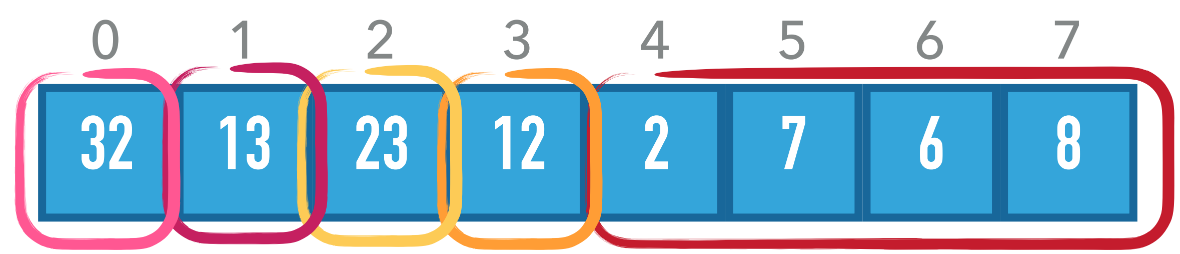


Chiamiamo max-heapify
con indice 0

BUILD-MAX-HEAP: IDEA



Aggiungiamo l'elemento in posizione 0



Chiamiamo max-heapify con indice 0

BUILD-MAX-HEAP: PSEUDOCODICE

- `Parametri: A (array)`
- `for i from` $\lfloor n/2 \rfloor - 1$ `down to` 0 `(o da` $\lfloor n/2 \rfloor$ `a` 1 `se numeriamo da 1)`
  - `max-heapify(A, i)`

- Inizializzazione: tutti gli elementi da $\lfloor n/2 \rfloor$ a $n-1$ sono, singolarmente, max-heap.

- Invariante: i figli dell'elemento i-esimo hanno indice maggiore di i, quindi sono già max-heap e dopo max-heapify anche A[i:] sarà una heap

- Terminazione: arrivati a $i = 0$, tutti gli elementi sono radici di un max-heap, in particolare il primo elemento è l'intero array

TEMPO DI CALCOLO

Ogni chiamata a max-heapify richiede tempo $O(h)$

Ed eseguiamo un numero lineare di chiamate a max-heapify

Ma ognuna di queste chiamate dipende dal valore di h che **non** è costante:

Abbiamo un sotto-albero di altezza $\lceil \log_2 n \rceil$, due di altezza $\lceil \log_2 n \rceil - 1$…

Fino ad arrivare a $\lceil n/2 \rceil$ albero di altezza 0

In generale, abbiamo al più $\left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil$ nodi che sono radici di (sotto-)alberi di altezza h.

Let’s prove it.

TEMPO DI CALCOLO

Quindi il tempo di richiesto è $\displaystyle\sum_{h=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil O(h)$, ovvero $\displaystyle O\left(n \sum_{h=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \left\lceil \frac{h}{2^{h+1}} \right\rceil \right)$.

Sapendo che $\displaystyle\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{h}{2^h} = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = 2$

Otteniamo $\displaystyle O\left(n \sum_{h=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \left\lceil \frac{h}{2^{h+1}} \right\rceil \right) = O\left(n \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{h}{2^{h+1}} \right) = O(n)$

Quindi la procedura max-heapify richiede tempo *lineare* rispetto alla dimensione dell'array.

HEAPSORT: DOVE SIAMO ARRIVATI

Array da ordinare

6	12	7	13	2	32	23	8

BUILD-MAX-HEAP

Inseriamo tutti gli elementi nella coda di priorità

MAX-HEAP

QUESTA PARTE CI MANCA

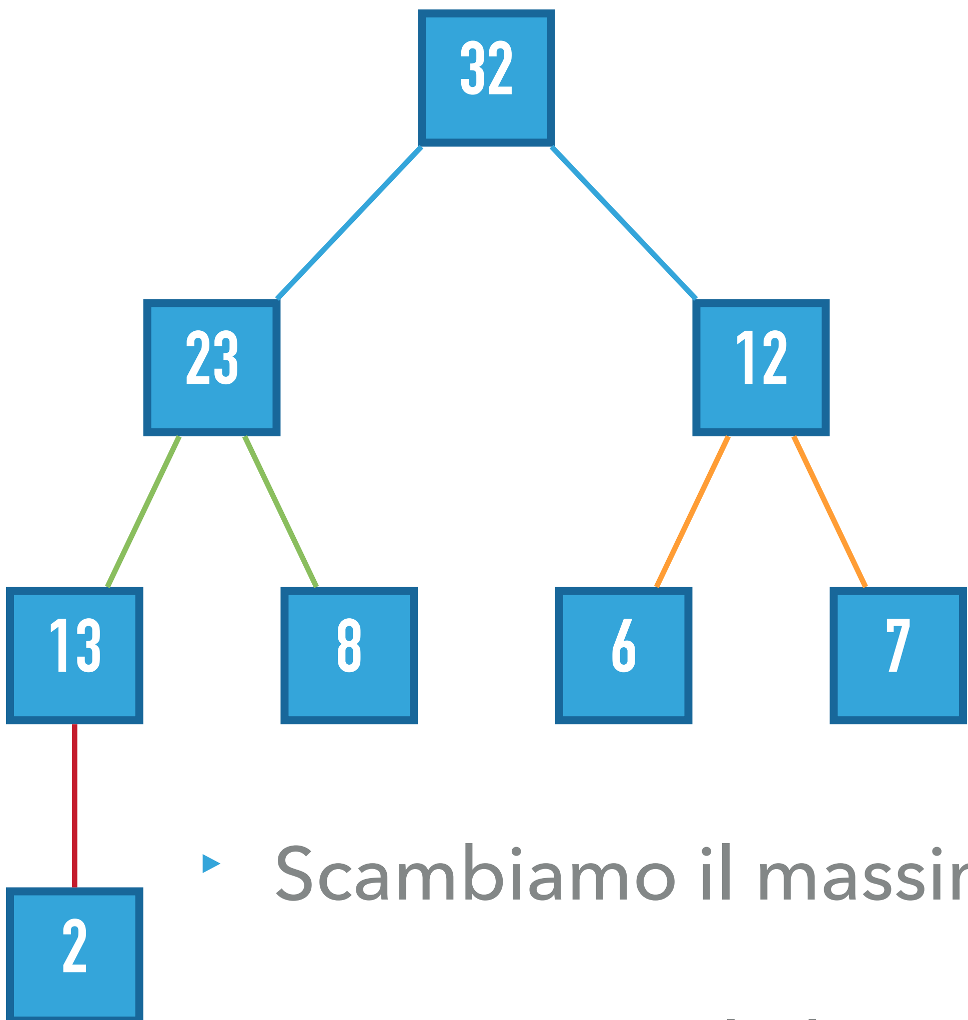
Estraiamo i valori uno ad uno, dal più grande al più piccolo

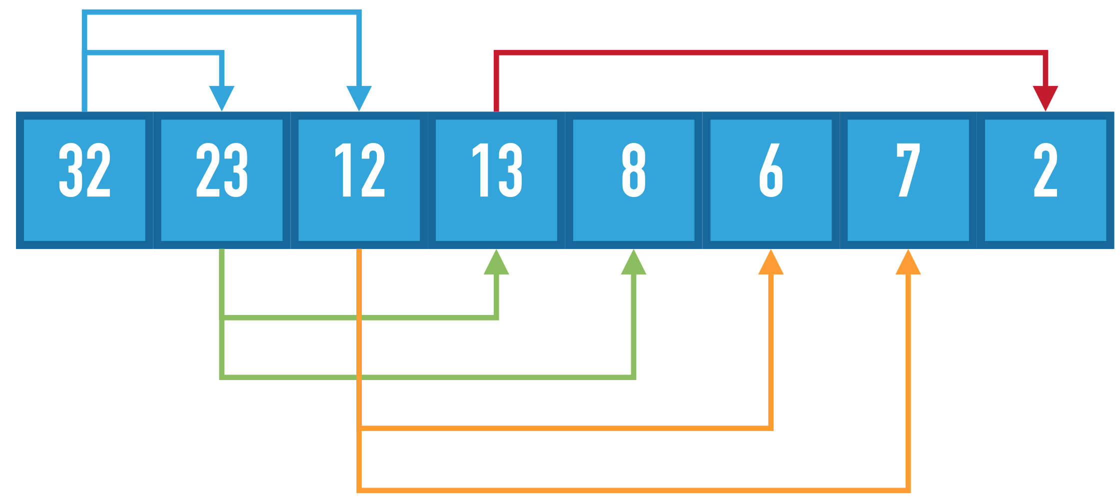
2	6	7	8	12	13	23	32

Una struttura dati in cui:

- Possiamo inserire elementi
- Possiamo estrarre il massimo tra tutti gli elementi inseriti

RIMOZIONE DEL MASSIMO

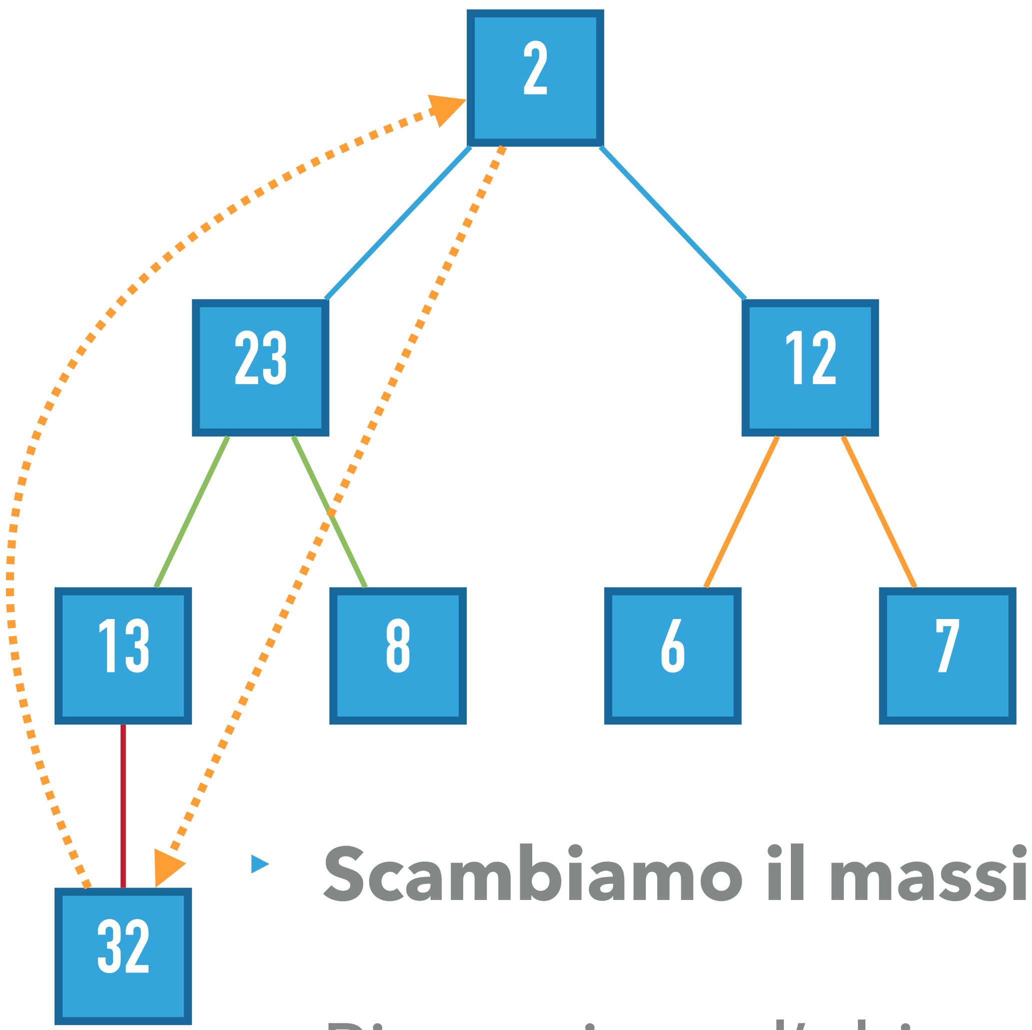


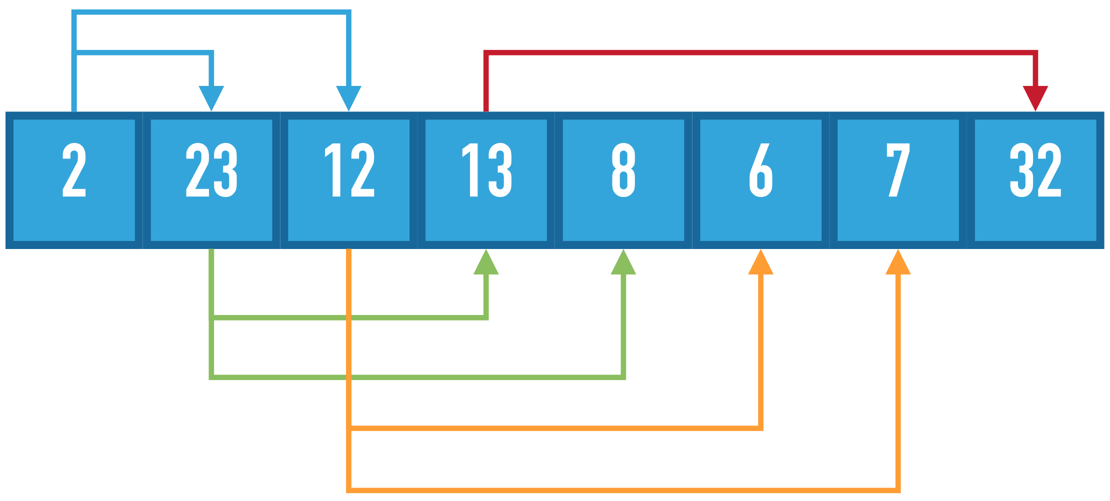


IDEA DI BASE

- Scambiamo il massimo con l’ultima foglia
- Rimuoviamo l’ultima foglia (decrementando heap_size)
- Chiamiamo max-heapify per ristabilire la proprietà di max-heap

RIMOZIONE DEL MASSIMO

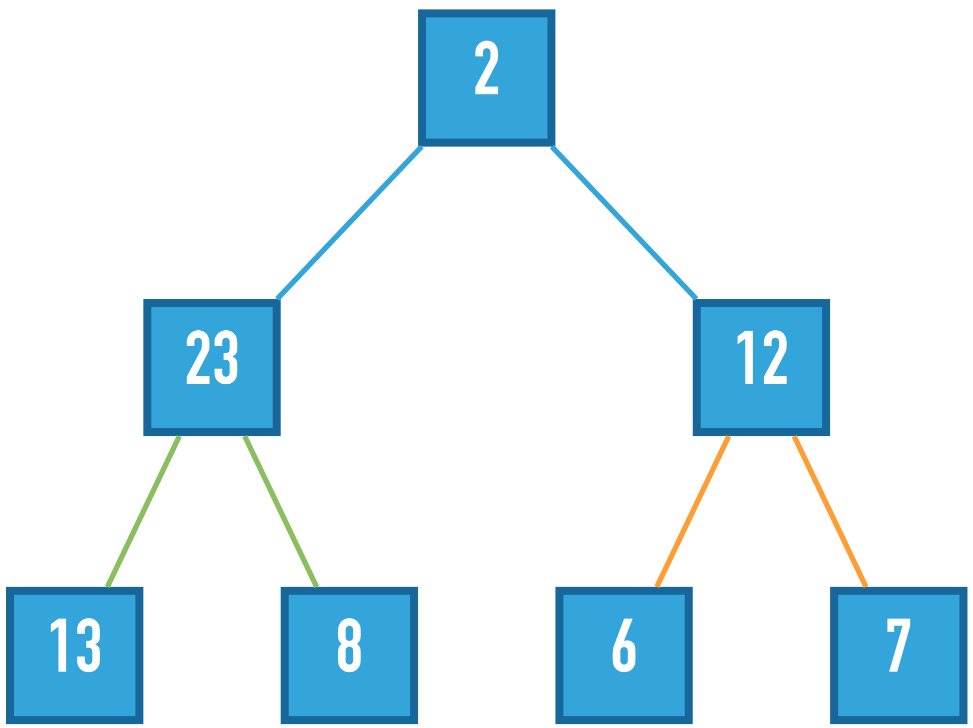




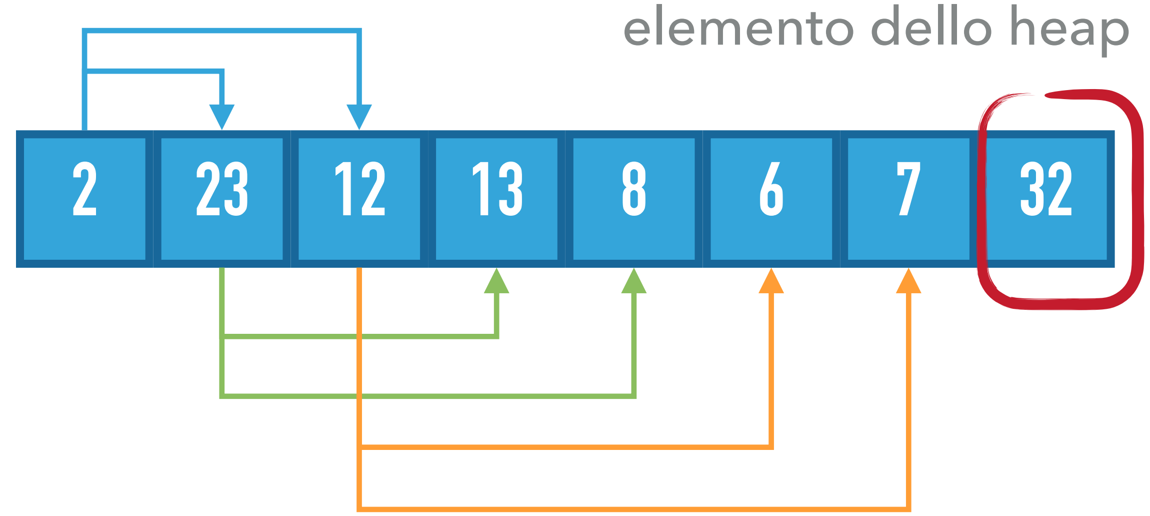
IDEA DI BASE

- **Scambiamo il massimo con l'ultima foglia**
- Rimuoviamo l'ultima foglia
- Chiamiamo max-heapify per ristabilire la proprietà di max-heap

RIMOZIONE DEL MASSIMO



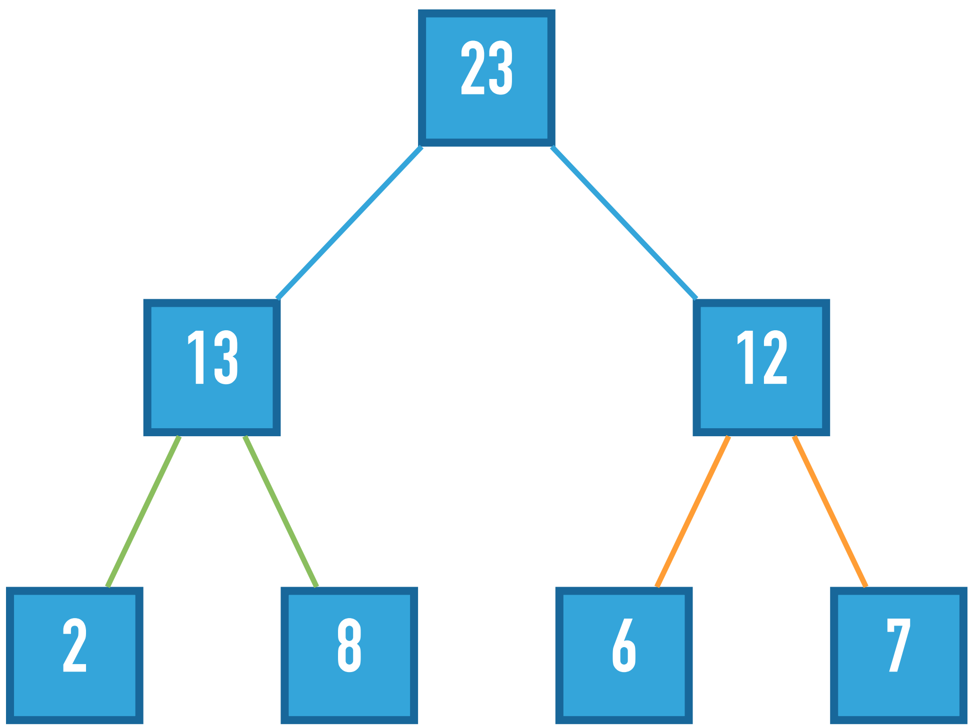
Questa parte non è più considerata un elemento dello heap



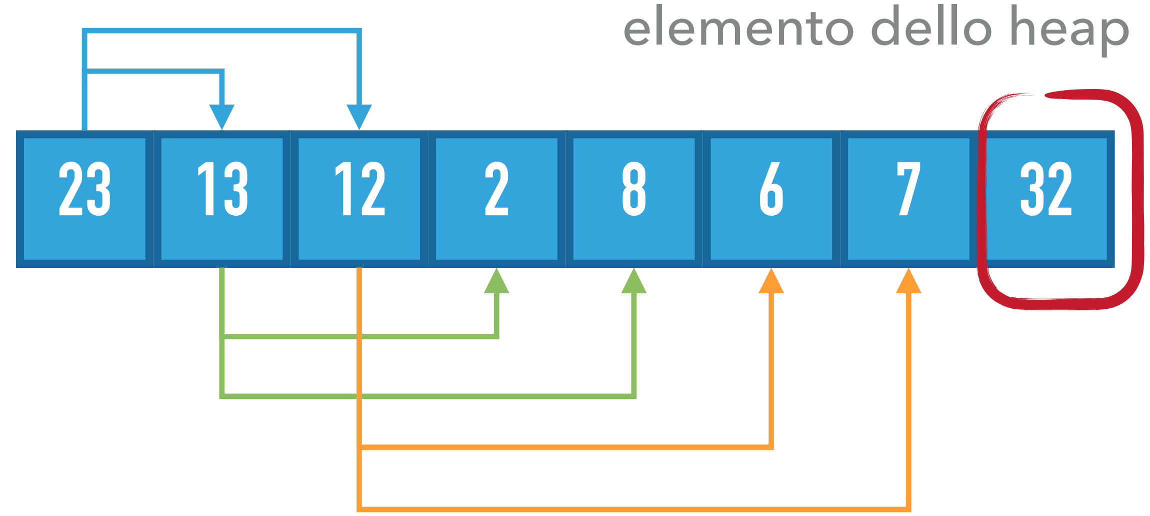
IDEA DI BASE

- Scambiamo il massimo con l'ultima foglia
- **Rimuoviamo l'ultima foglia**
- Chiamiamo max-heapify per ristabilire la proprietà di max-heap

RIMOZIONE DEL MASSIMO



Questa parte non è più considerata un elemento dello heap



IDEA DI BASE

- Scambiamo il massimo con l’ultima foglia
- Rimuoviamo l’ultima foglia
- **Chiamiamo max-heapify** per ristabilire la proprietà di max-heap

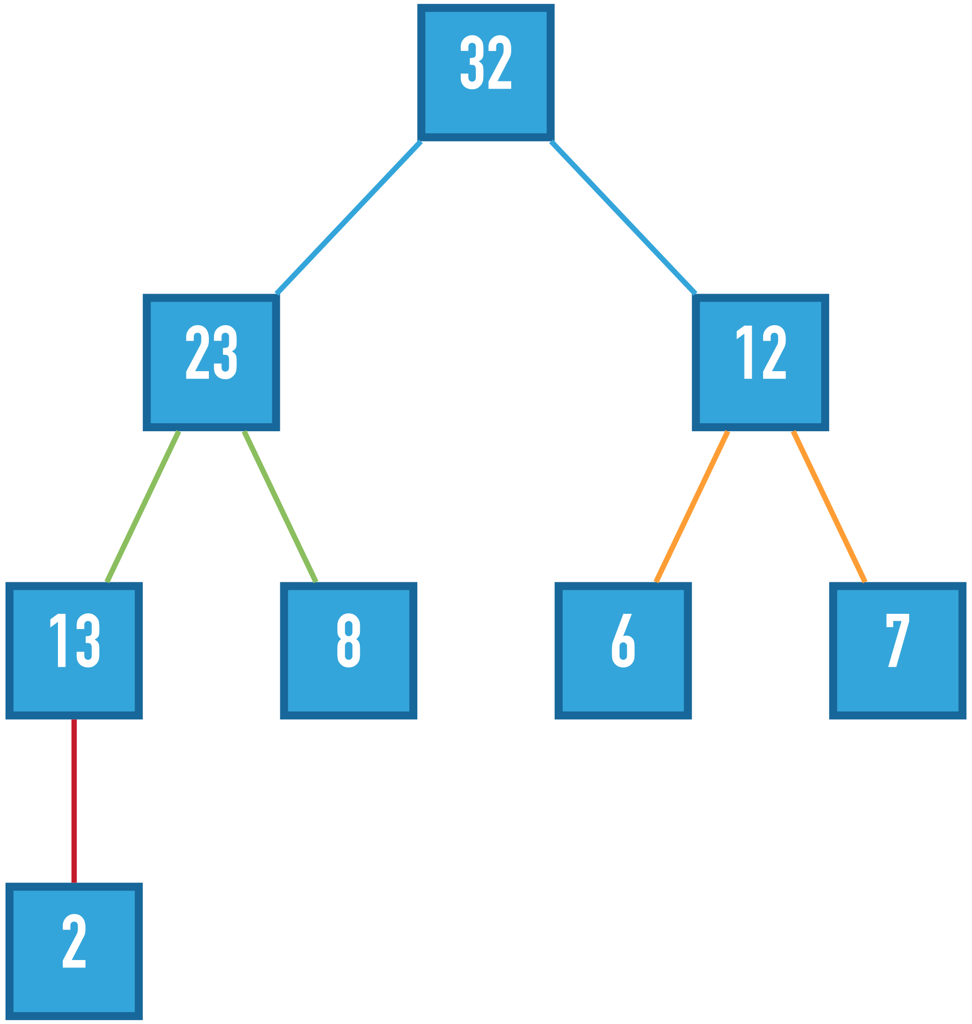
HEAPSORT: PSEUDOCODICE

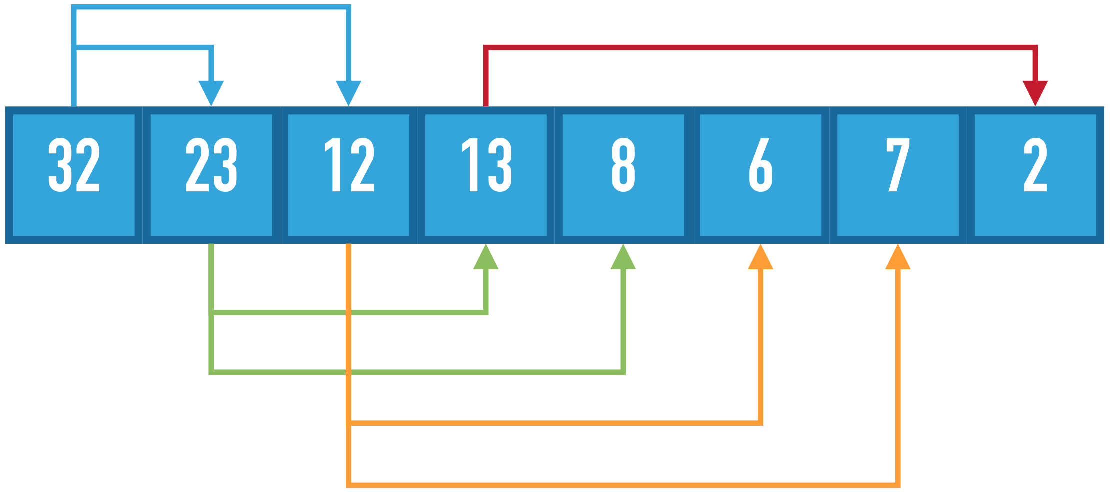
- `Parametri: A (array)`
- `build-max-heap(A)` ← $O(n)$
- `heap-size(A) =` n
- `for i from` $n-1$ `down to` 1
  - `swap A[i] and A[0]`
  - `decrement heap-size(A) by` 1
  - `max-heapify(A, 0)` ← $O(\log n)$

- Eseguiamo una operazione di costo $O(n)$ e un numero lineare di operazioni di costo $O(\log n)$

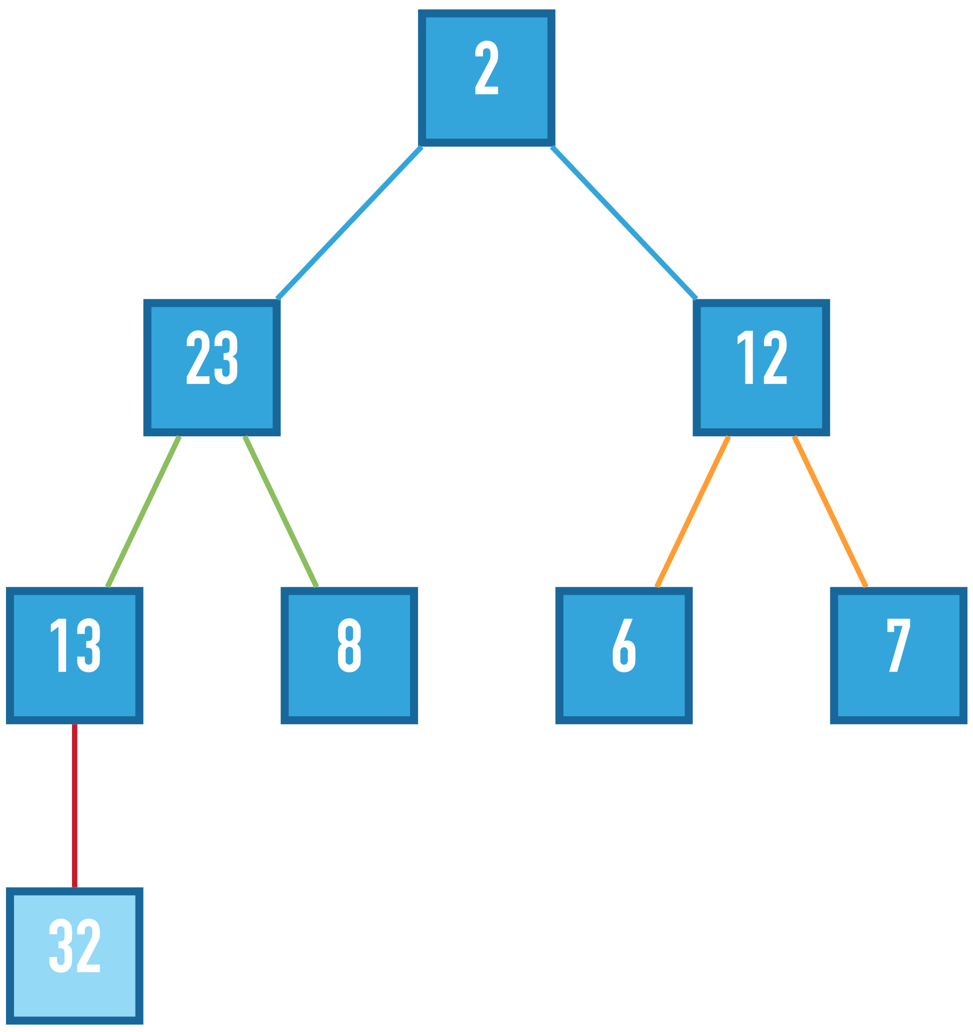
- L'algoritmo di heapsort ordina l'array in tempo $O(n \log n)$

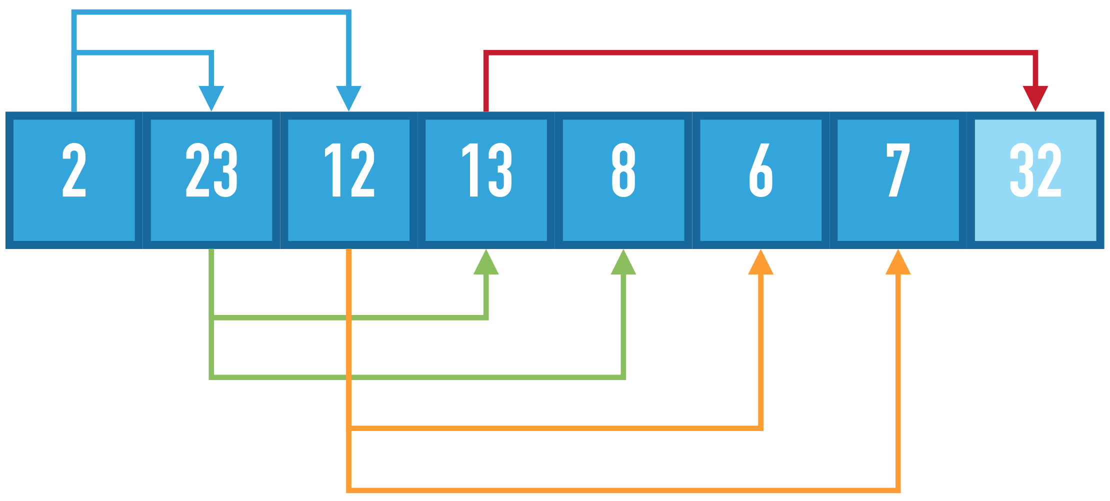
HEAPSORT: ESEMPIO



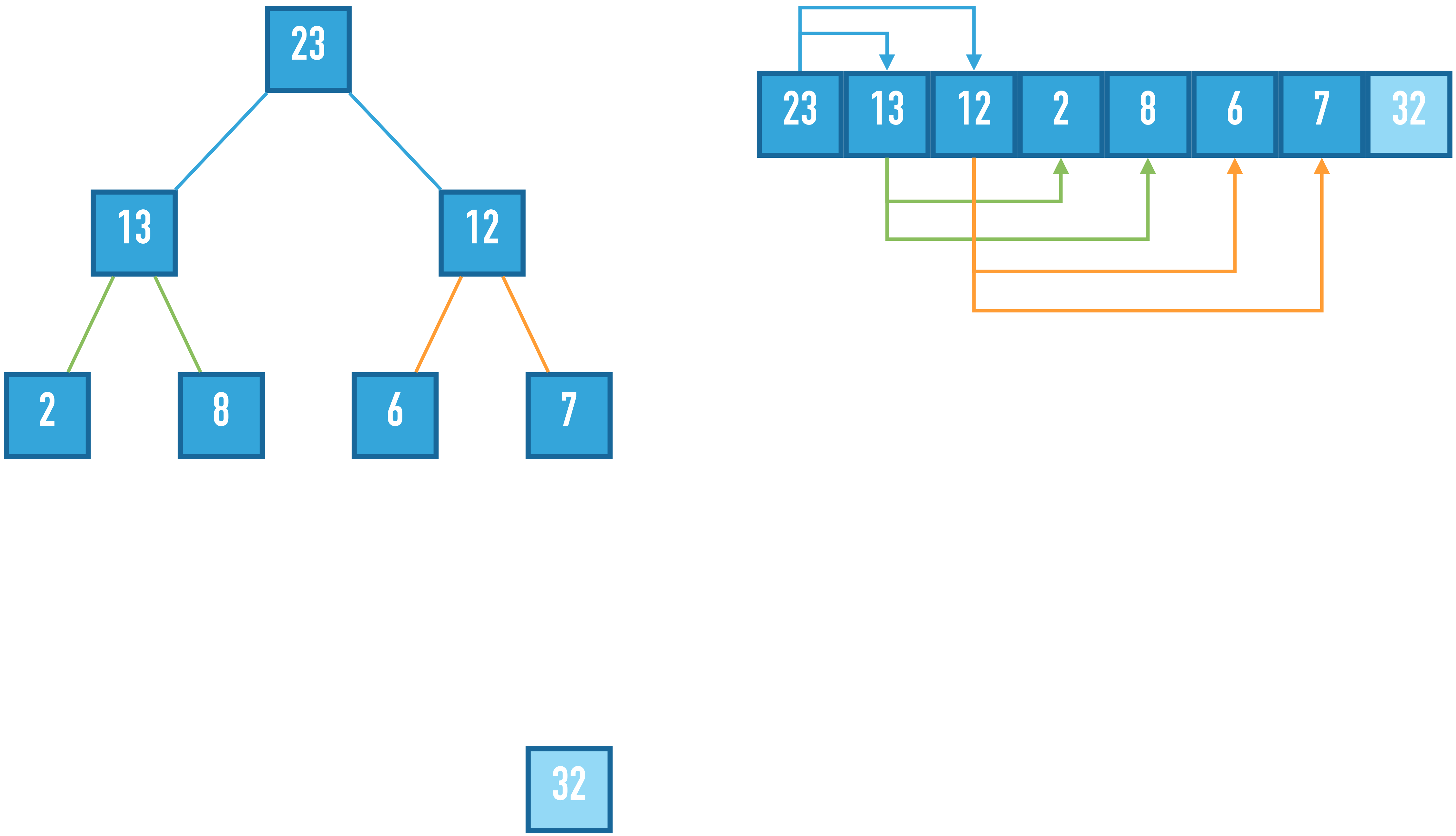


HEAPSORT: ESEMPIO

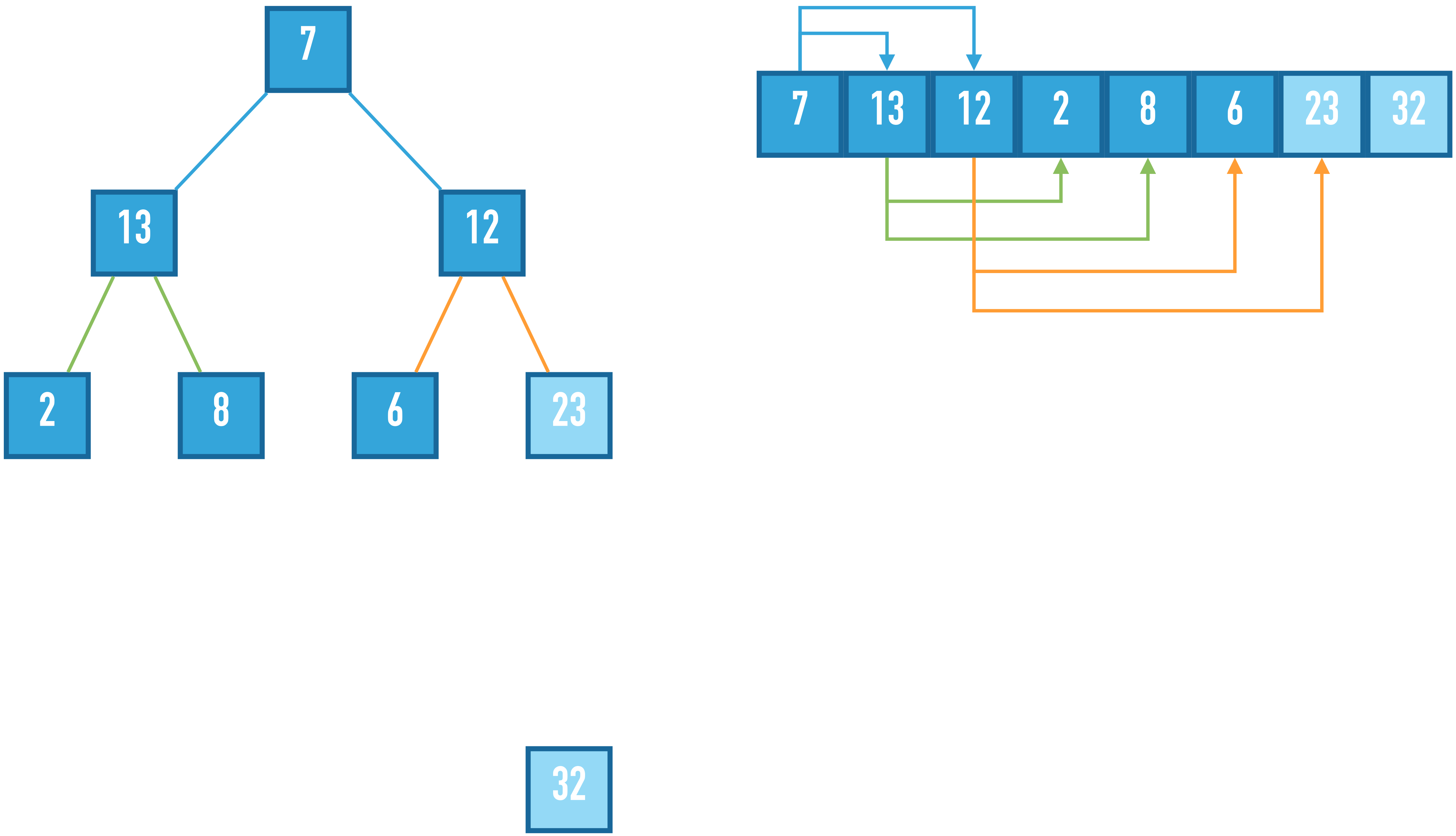




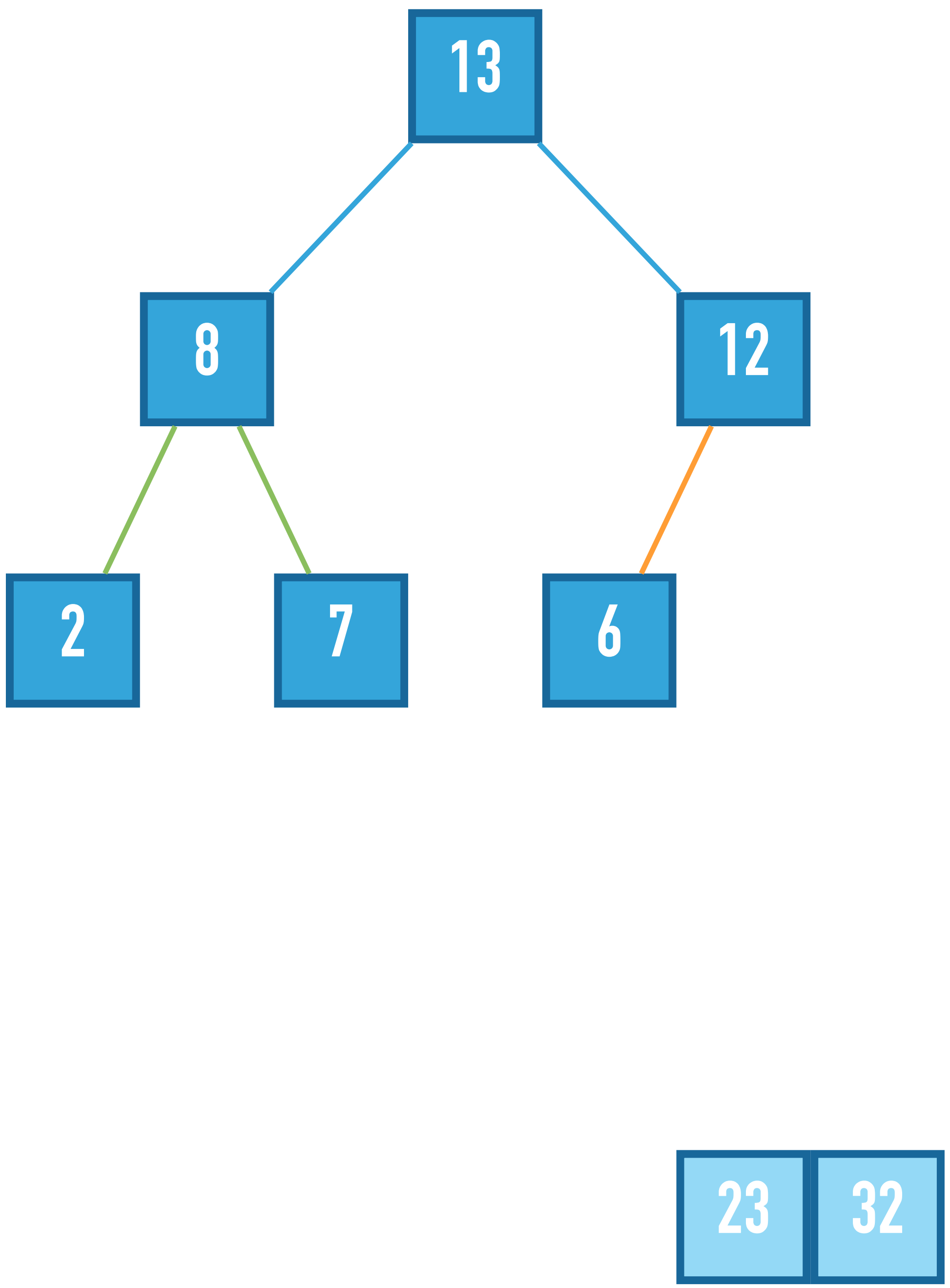
HEAPSORT: ESEMPIO

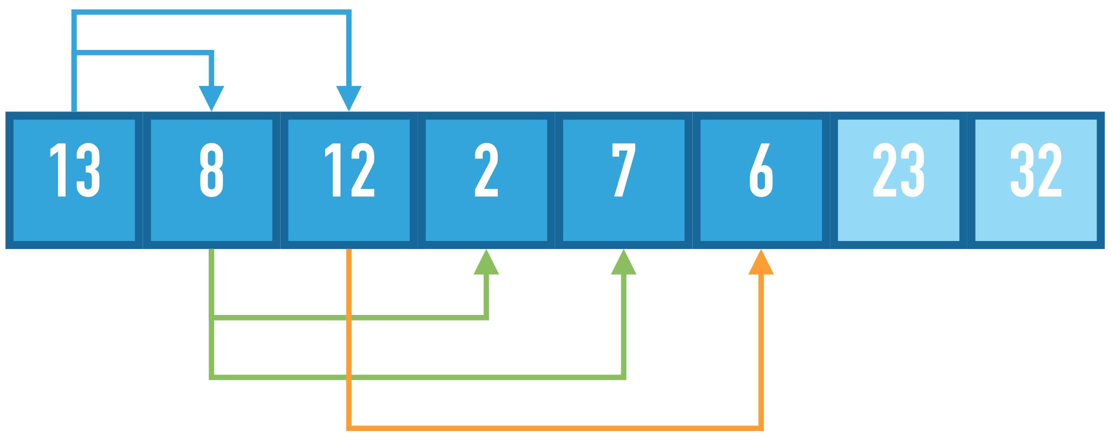


HEAPSORT: ESEMPIO

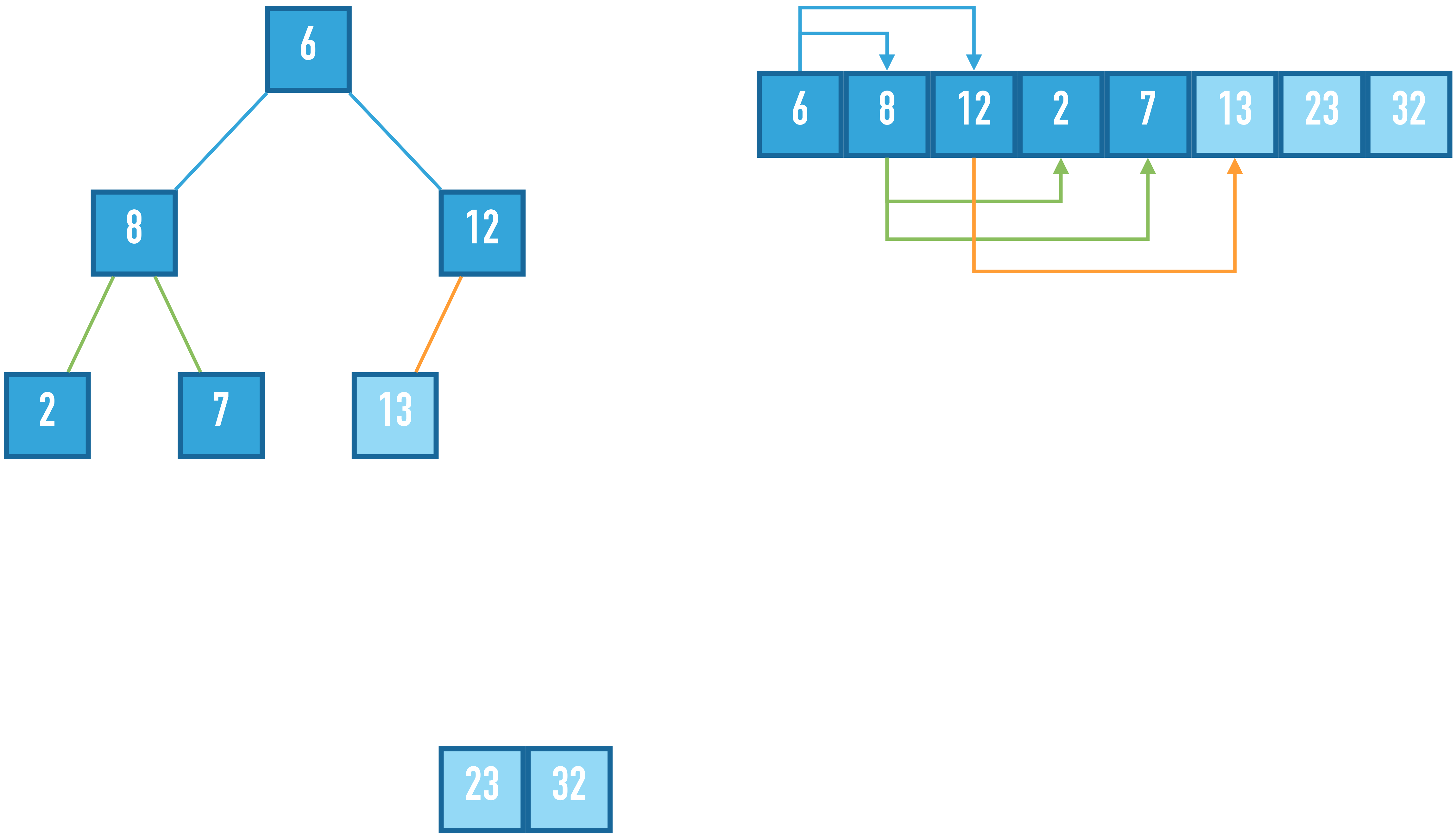


HEAPSORT: ESEMPIO

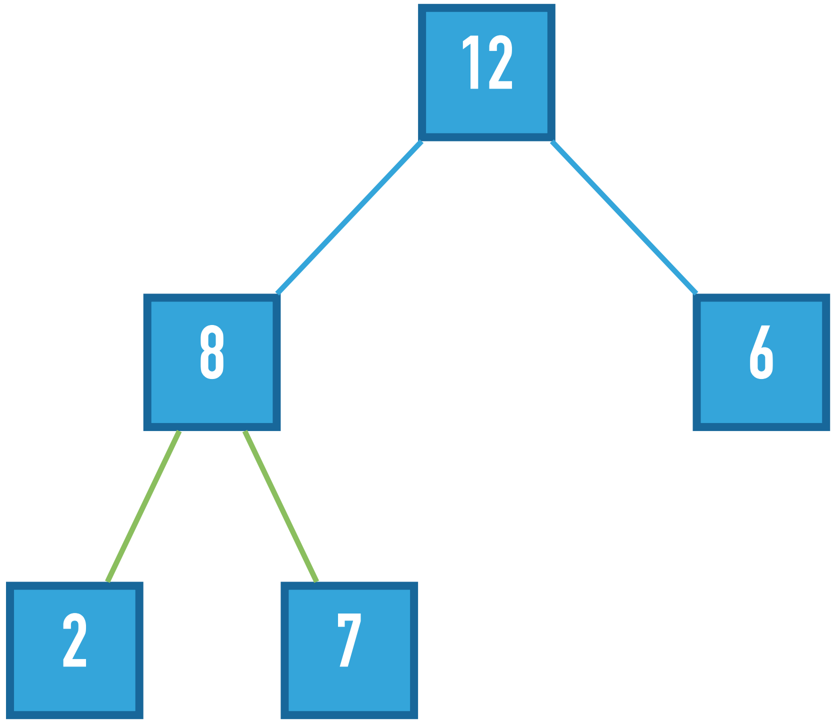


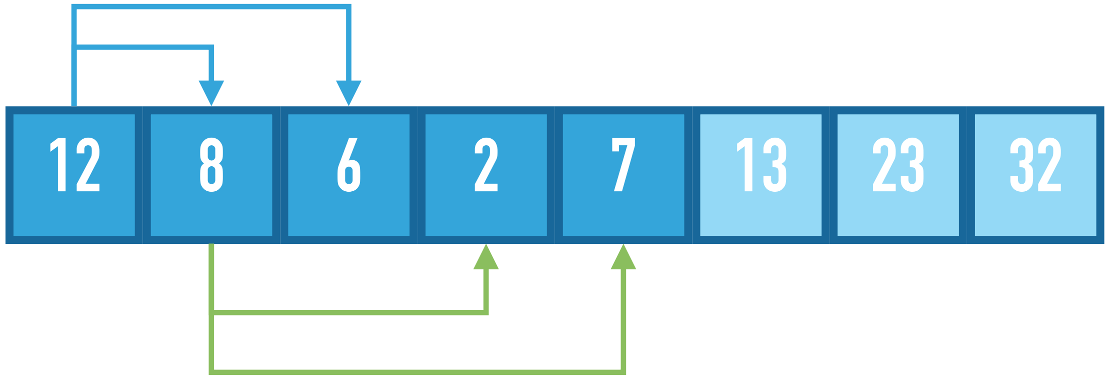


HEAPSORT: ESEMPIO

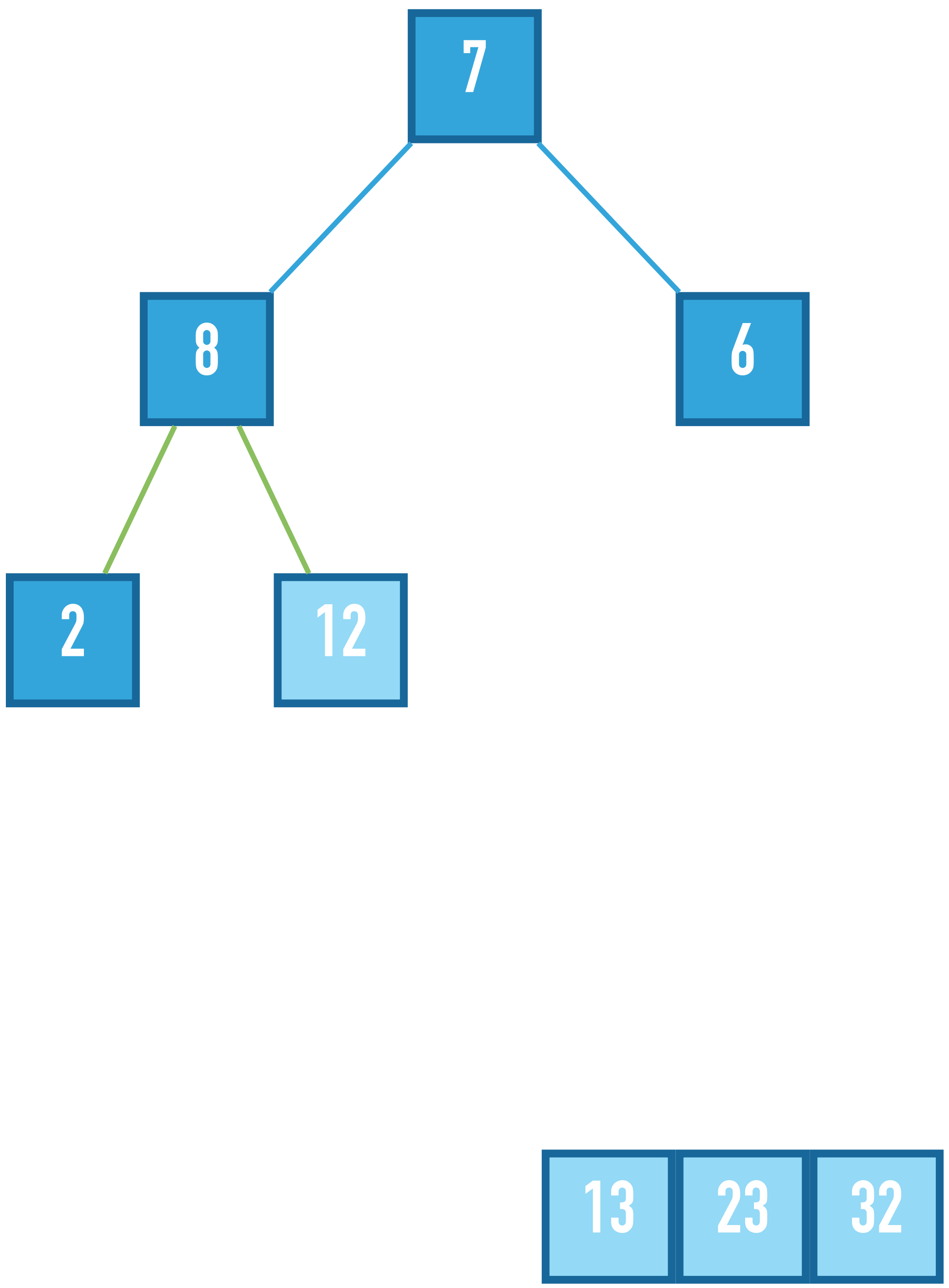


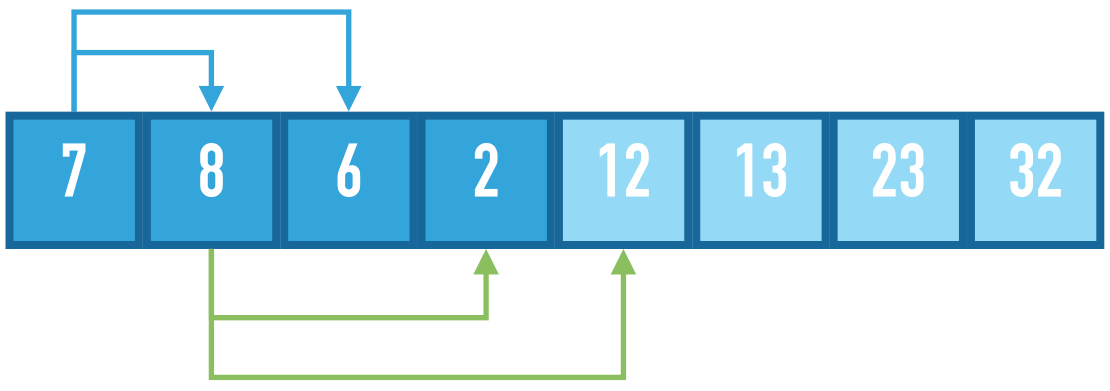
HEAPSORT: ESEMPIO



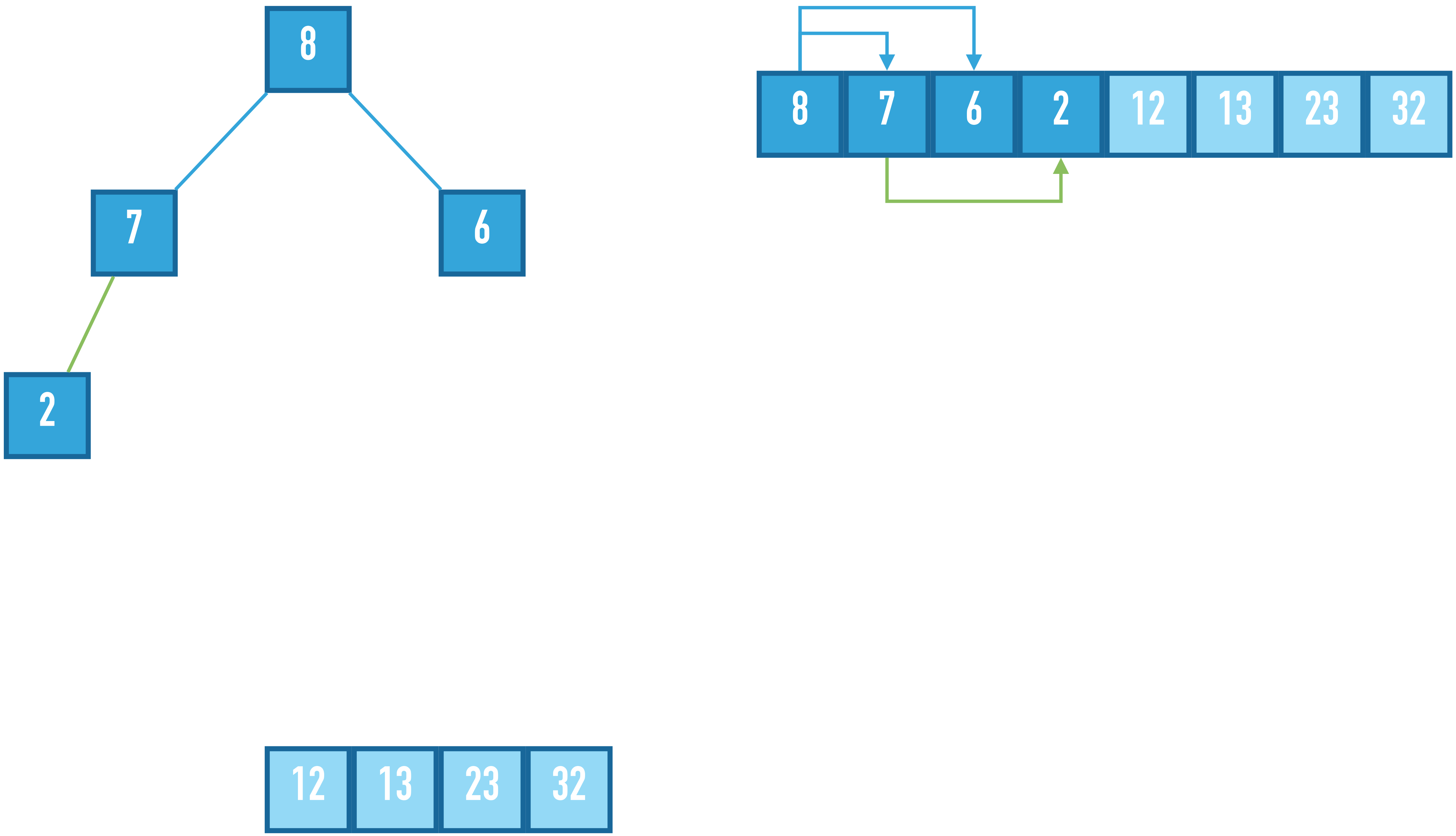


HEAPSORT: ESEMPIO

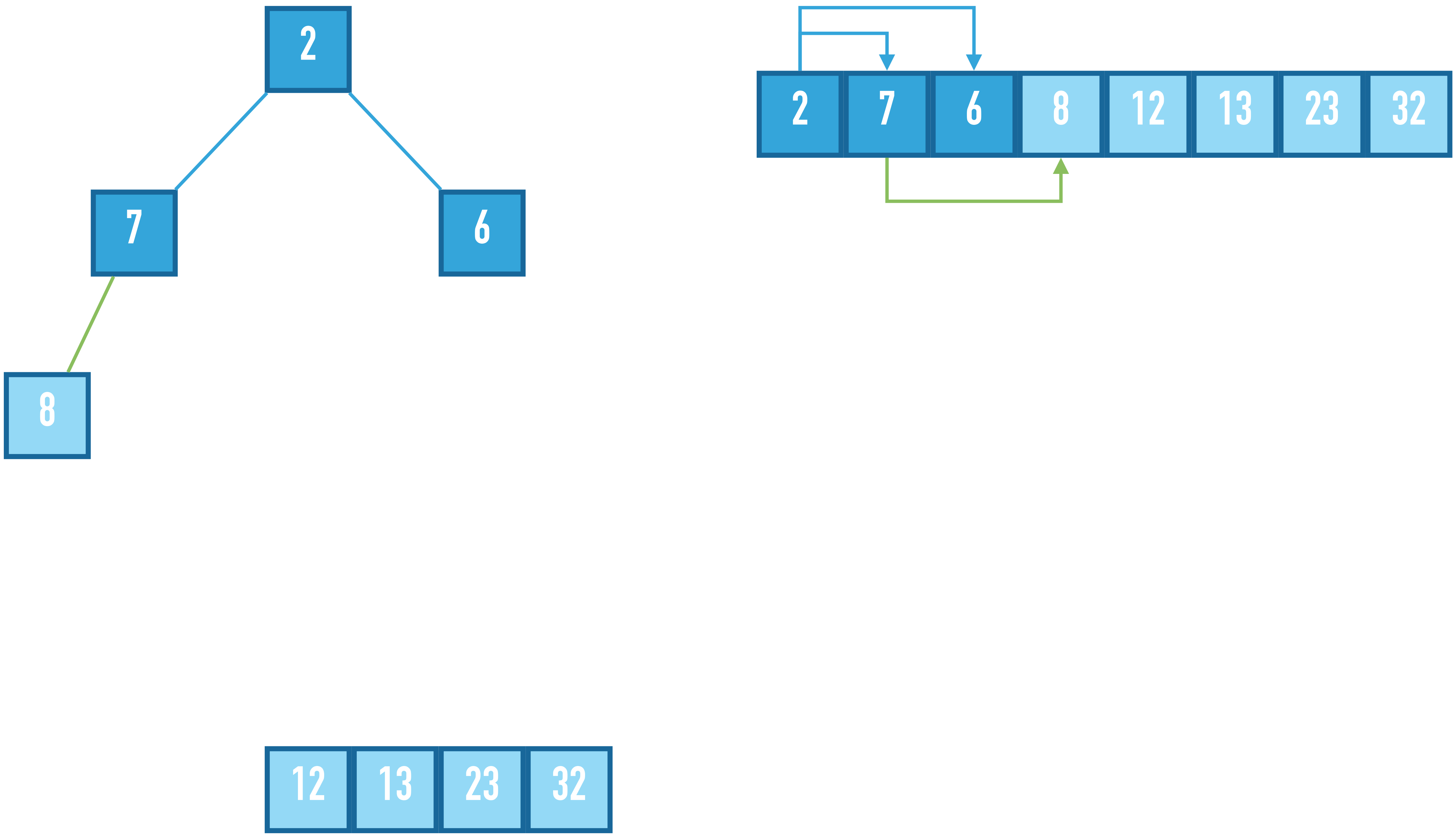




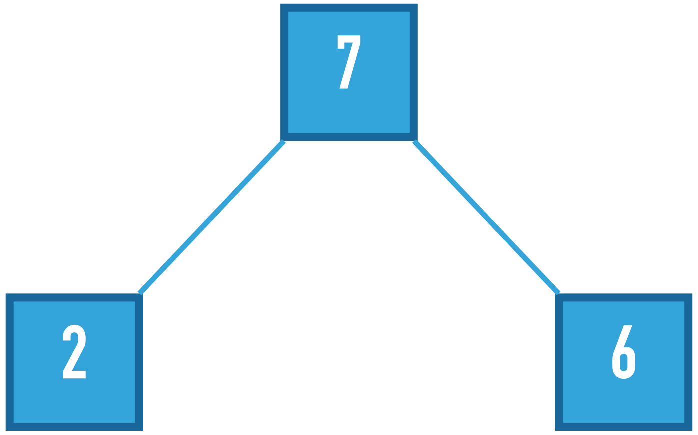
HEAPSORT: ESEMPIO

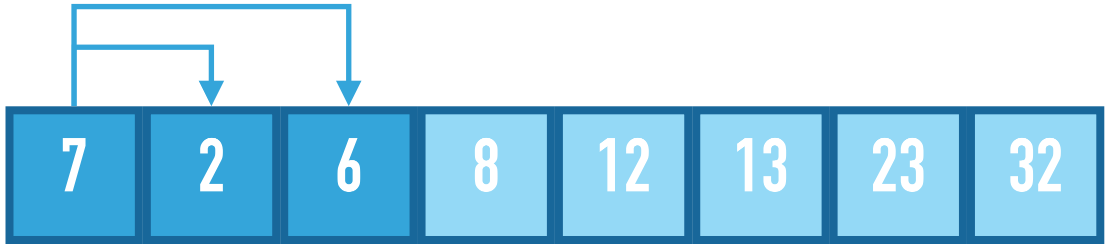


HEAPSORT: ESEMPIO

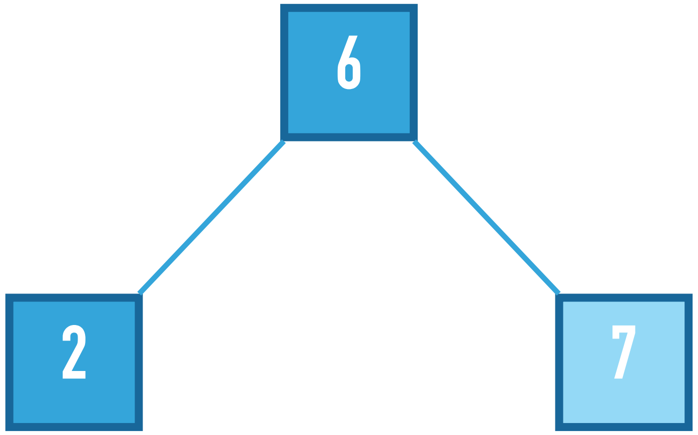


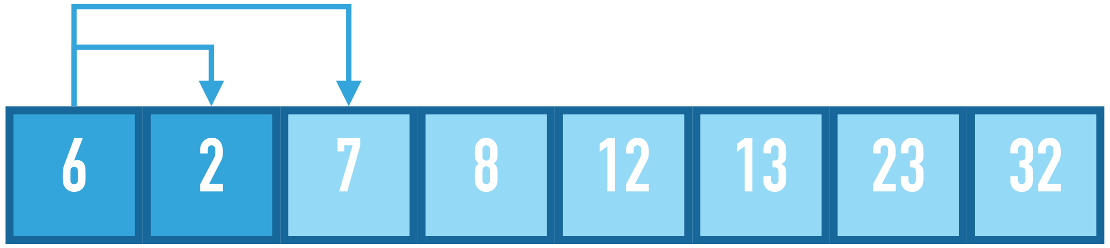
HEAPSORT: ESEMPIO



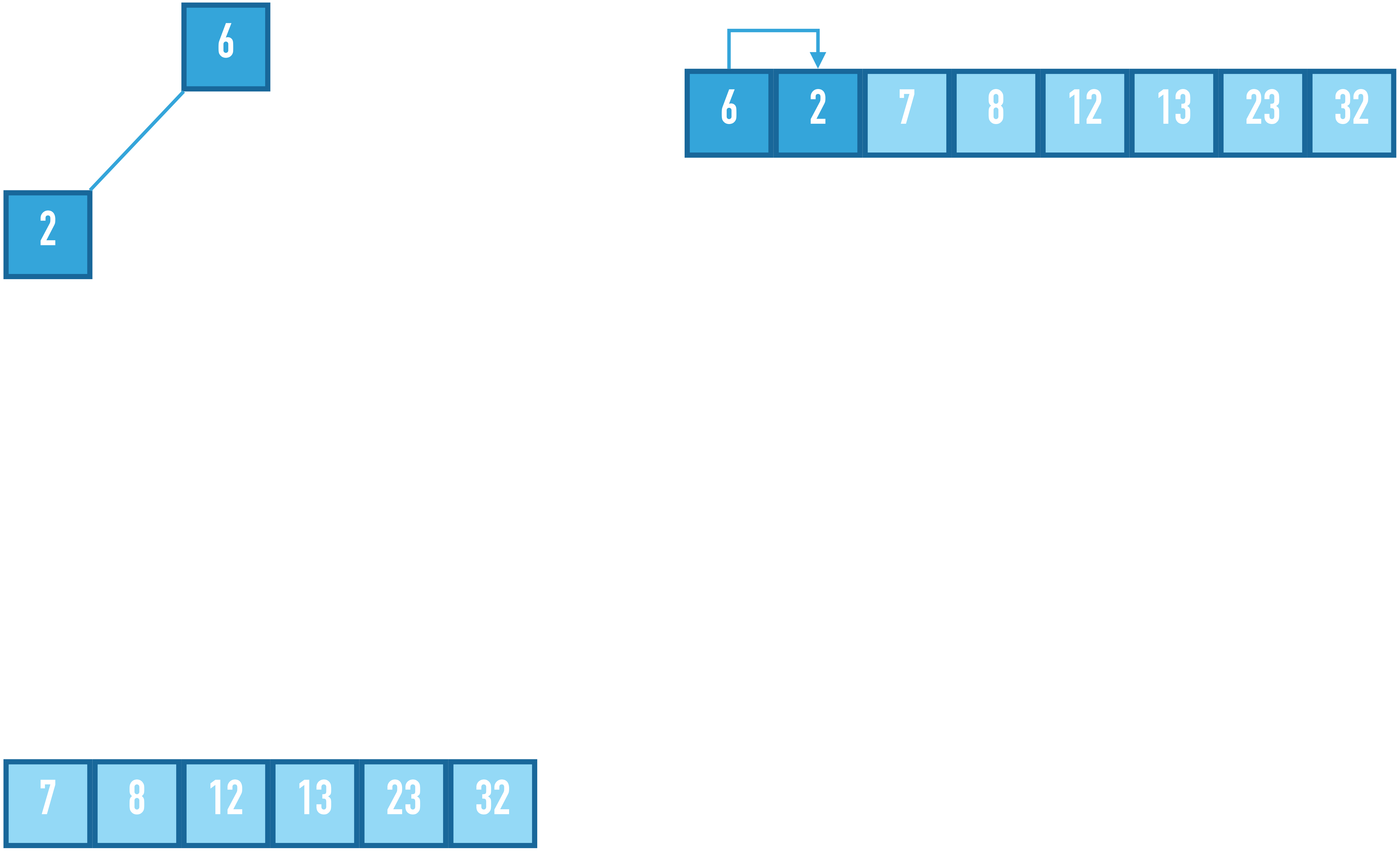


HEAPSORT: ESEMPIO

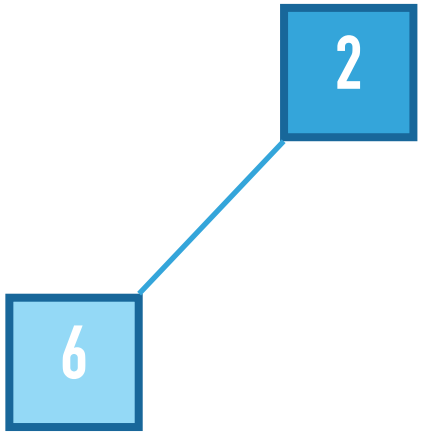


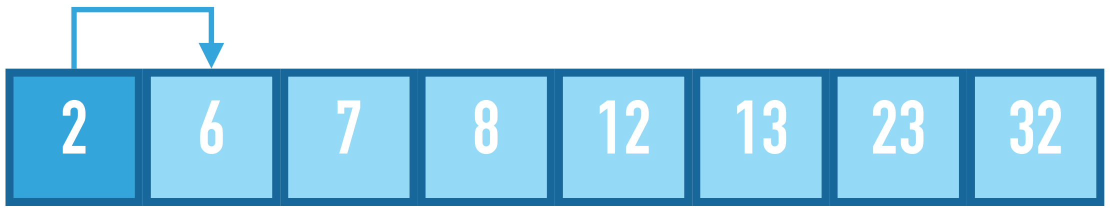


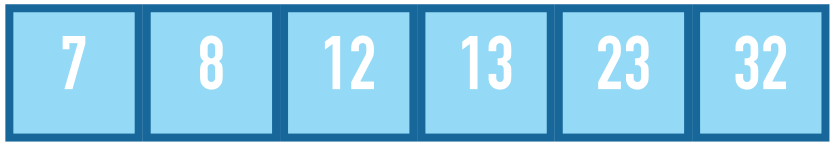
HEAPSORT: ESEMPIO



HEAPSORT: ESEMPIO







HEAPSORT: ESEMPIO

2

2	6	7	8	12	13	23	32

6	7	8	12	13	23	32

HEAPSORT: ESEMPIO

2	6	7	8	12	13	23	32

2	6	7	8	12	13	23	32