ORDINAMENTO
QUICKSORT

# ALGORITMI E STRUTTURE DATI

# QUICKSORT

# QUICKSORT

- Abbiamo visto due algoritmi di ordinamento per comparazione che sono ottimali in termini di tempo: $\Theta(n \log n)$

# QUICKSORT

- Abbiamo visto due algoritmi di ordinamento per comparazione che sono ottimali in termini di tempo: $\Theta(n \log n)$
- Ora vedremo un algoritmo che nel caso peggiore richiede tempo quadratico…
- …ma nel caso medio richiede tempo $O(n \log n)$

# QUICKSORT

- Abbiamo visto due algoritmi di ordinamento per comparazione che sono ottimali in termini di tempo: $\Theta(n \log n)$
- Ora vedremo un algoritmo che nel caso peggiore richiede tempo quadratico…
- …ma nel caso medio richiede tempo $O(n \log n)$
- Domanda: perché potrebbe avere senso studiare questo algoritmo?

# QUICKSORT: STORIA

# QUICKSORT: STORIA

- Ideato da Tony Hoare (vincitore del premio Turing nel 1980) nel 1959-60

# QUICKSORT: STORIA

- Ideato da Tony Hoare (vincitore del premio Turing nel 1980) nel 1959-60
- Quando ben implementato il Quicksort è, nella pratica, più veloce di mergesort e heapsort
- Questo nonostante abbia un caso peggiore quadratico…

# QUICKSORT: STORIA

- Ideato da Tony Hoare (vincitore del premio Turing nel 1980) nel 1959-60
- Quando ben implementato il Quicksort è, nella pratica, più veloce di mergesort e heapsort
- Questo nonostante abbia un caso peggiore quadratico…
- … perché il caso **medio** è $O(n \log n)$

# QUICKSORT: IDEA DI BASE

# QUICKSORT: IDEA DI BASE

- Il quick sort è un algoritmo “divide et impera”

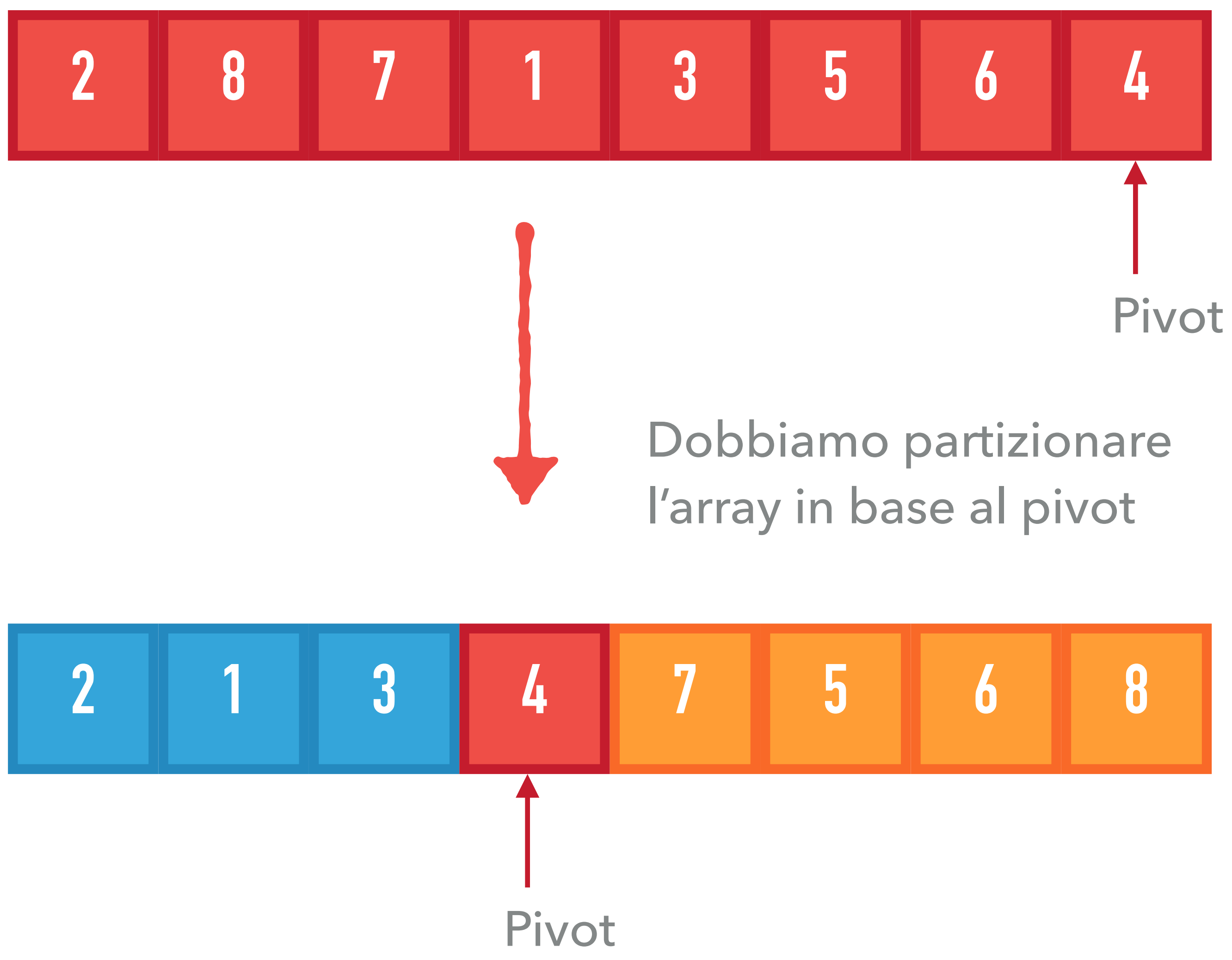
# QUICKSORT: IDEA DI BASE

- Il quick sort è un algoritmo "divide et impera"
- L'idea di base è quella di scegliere in un array di $n$ elementi un **pivot**, spostare gli elementi più piccoli prima del pivot e quelli più grandi dopo il pivot.

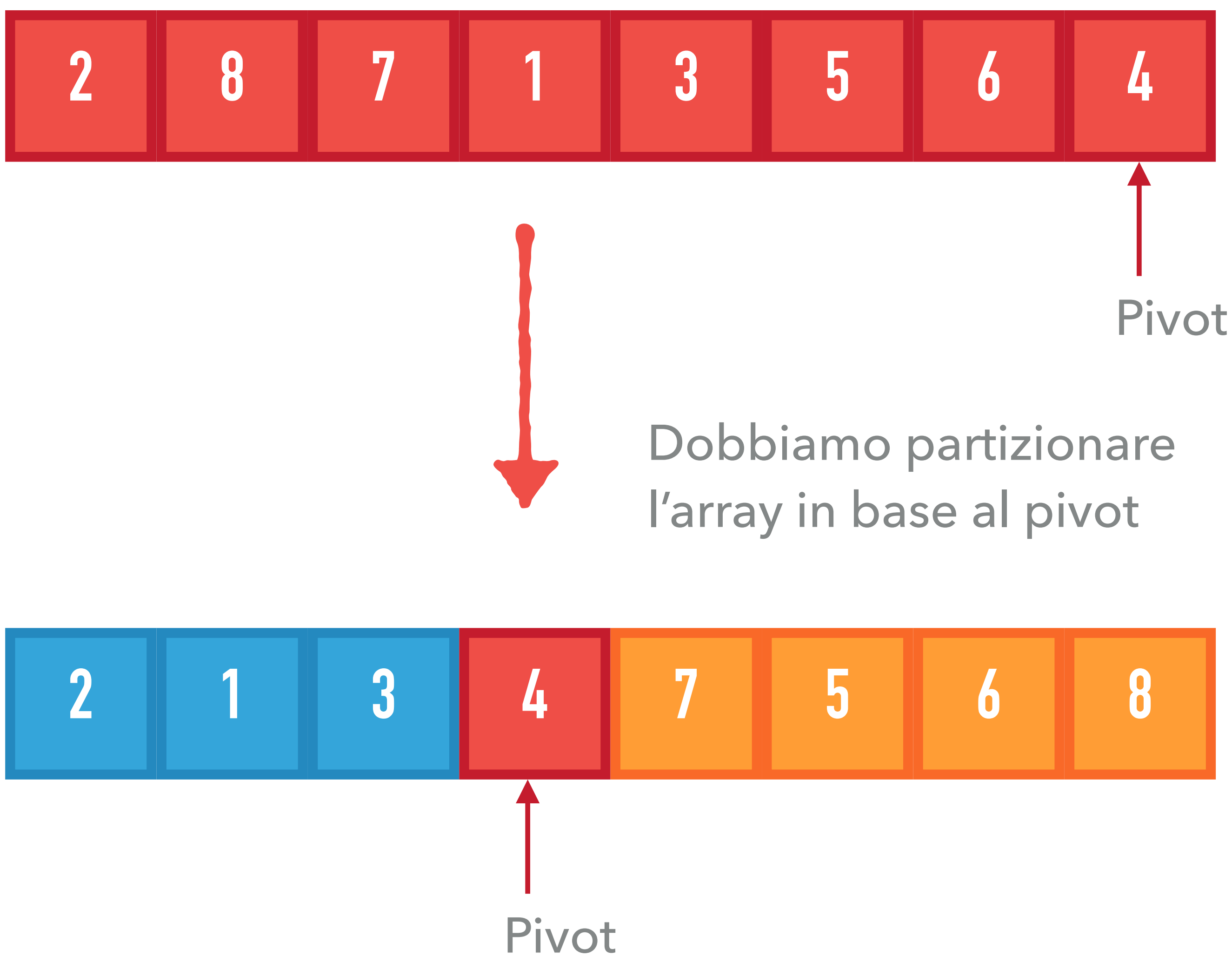
# QUICKSORT: IDEA DI BASE

- Il quick sort è un algoritmo "divide et impera"
- L'idea di base è quella di scegliere in un array di $n$ elementi un **pivot**, spostare gli elementi più piccoli prima del pivot e quelli più grandi dopo il pivot.
- Se applichiamo ricorsivamente lo stesso algoritmo ai due sotto-array risultanti (elementi minori e maggiori del pivot) otteniamo un array ordinato

# PROCEDURA DI PARTIZIONAMENTO



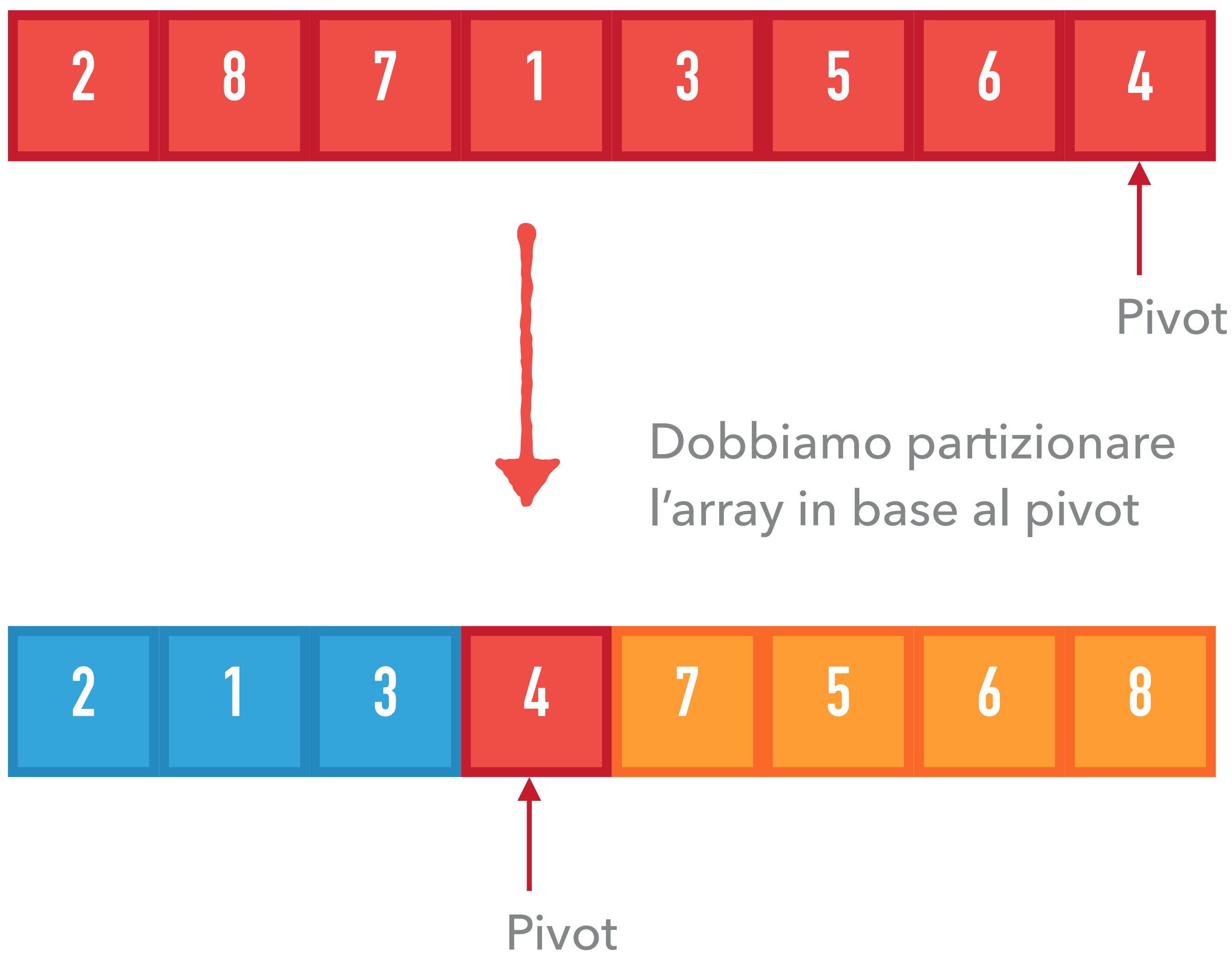
# PROCEDURA DI PARTIZIONAMENTO




Il Pivot adesso è già nella posizione corretta!

Tutti gli elementi minori lo precedono e quelli maggiori lo seguono

# PROCEDURA DI PARTIZIONAMENTO




## Il Pivot adesso è già nella posizione corretta!

Tutti gli elementi minori lo precedono e quelli maggiori lo seguono

Ora dobbiamo fare la stessa operazione sui due sottoarray

# PROCEDURA DI PARTIZIONAMENTO

# PROCEDURA DI PARTIZIONAMENTO

- Dobbiamo definire la procedura di partizionamento in modo efficiente
- Ne esistono diverse, noi vediamo lo schema di partizionamento di Hoare

# PROCEDURA DI PARTIZIONAMENTO

- Dobbiamo definire la procedura di partizionamento in modo efficiente
- Ne esistono diverse, noi vediamo lo schema di partizionamento di Hoare
- Idea di base: teniamo due indici:
  - $i$ indica l'ultimo degli elementi minori del pivot
  - $j$ viene utilizzato per scorrere l'array

# PROCEDURA DI PARTIZIONAMENTO

# PROCEDURA DI PARTIZIONAMENTO

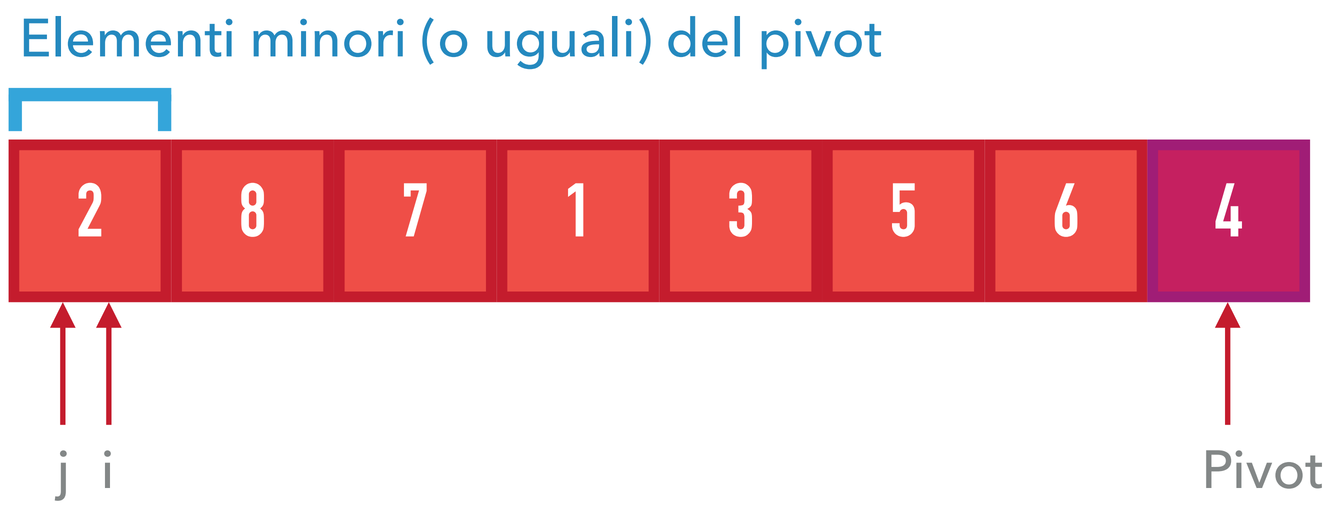

Se A[j] è minore del pivot
incrementiamo i e scambiamo A[i] e A[j]

# PROCEDURA DI PARTIZIONAMENTO


Se A[j] è minore del pivot
incrementiamo i e scambiamo A[i] e A[j]

In questo caso non cambia nulla (i è uguale a j)

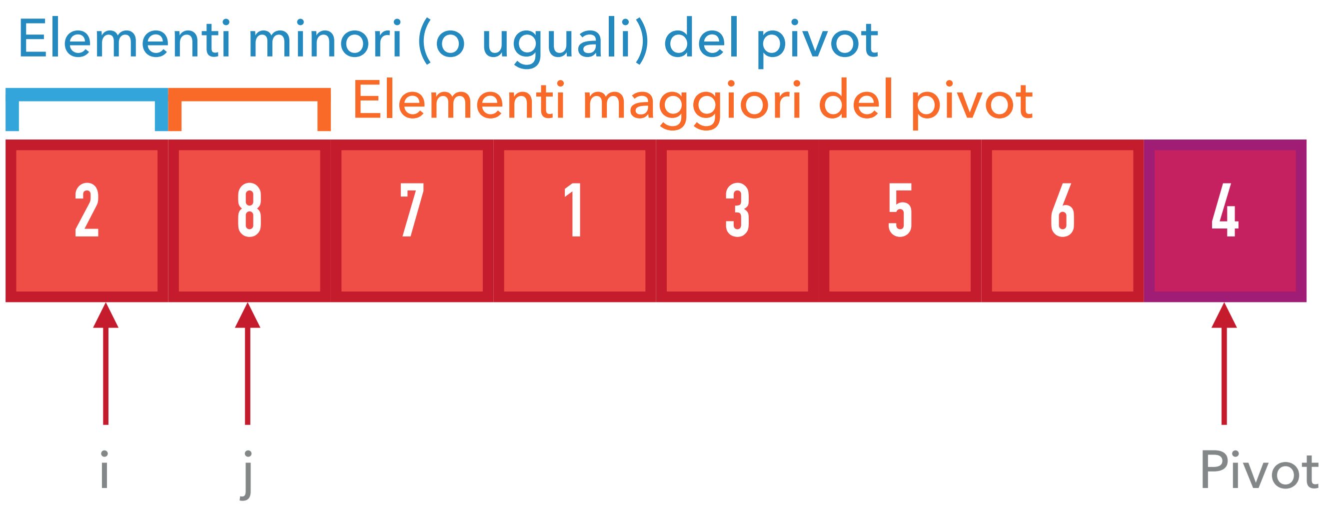
# PROCEDURA DI PARTIZIONAMENTO




Se A[j] è minore (o uguale) del pivot incrementiamo i e scambiamo A[i] e A[j]

In questo caso non cambia nulla (i è uguale a j)

# PROCEDURA DI PARTIZIONAMENTO

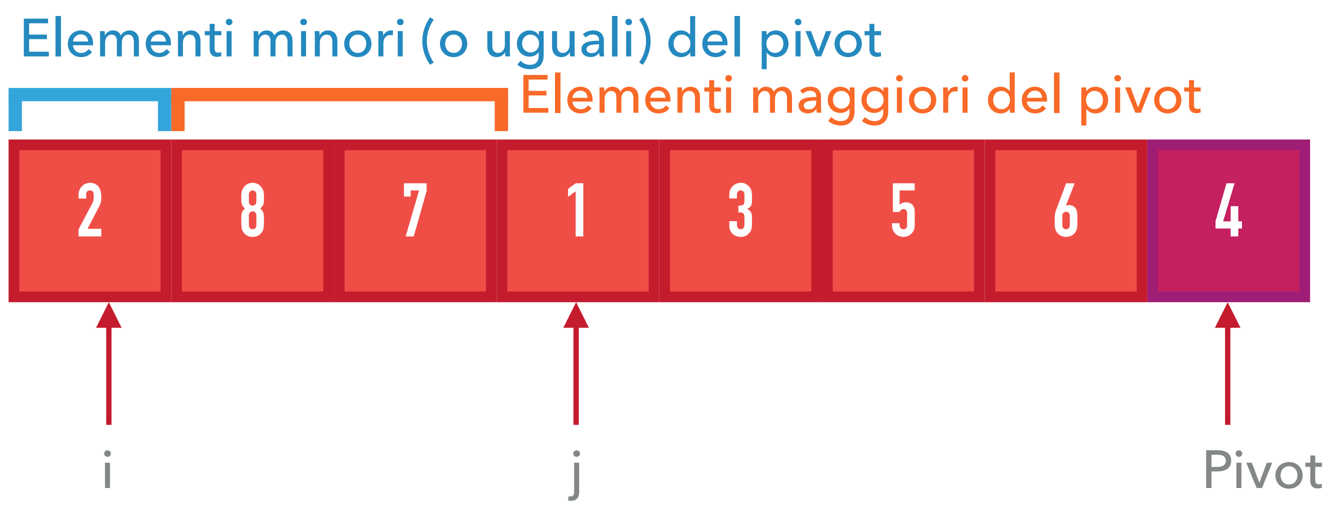



Se A[j] è maggiore del pivot
non facciamo nulla

# PROCEDURA DI PARTIZIONAMENTO

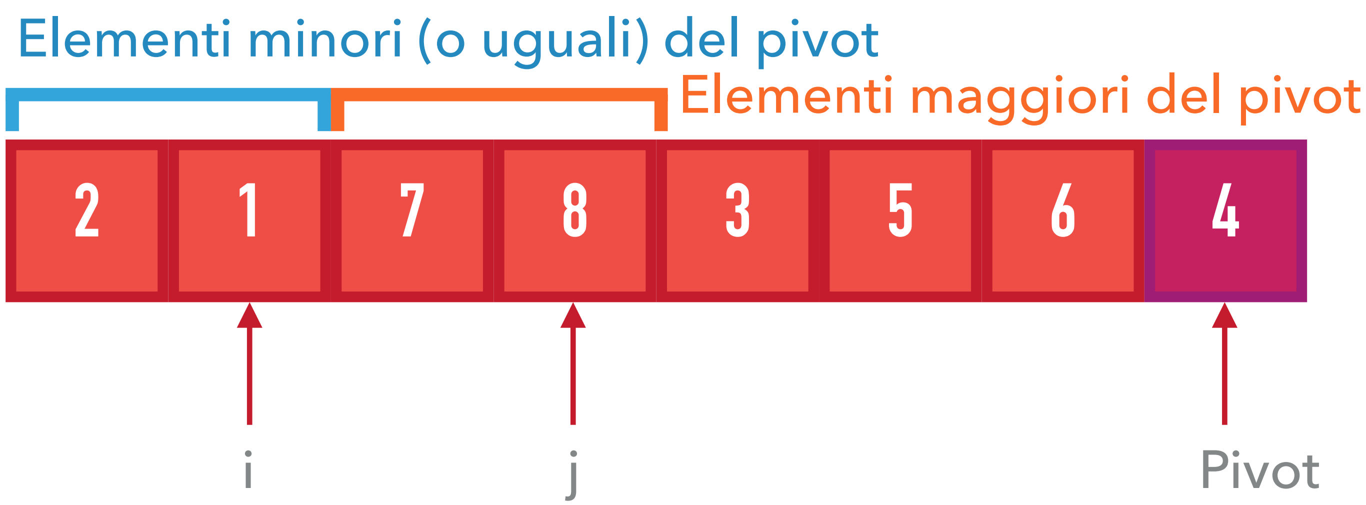

Se A[j] è maggiore del pivot
non facciamo nulla

# PROCEDURA DI PARTIZIONAMENTO



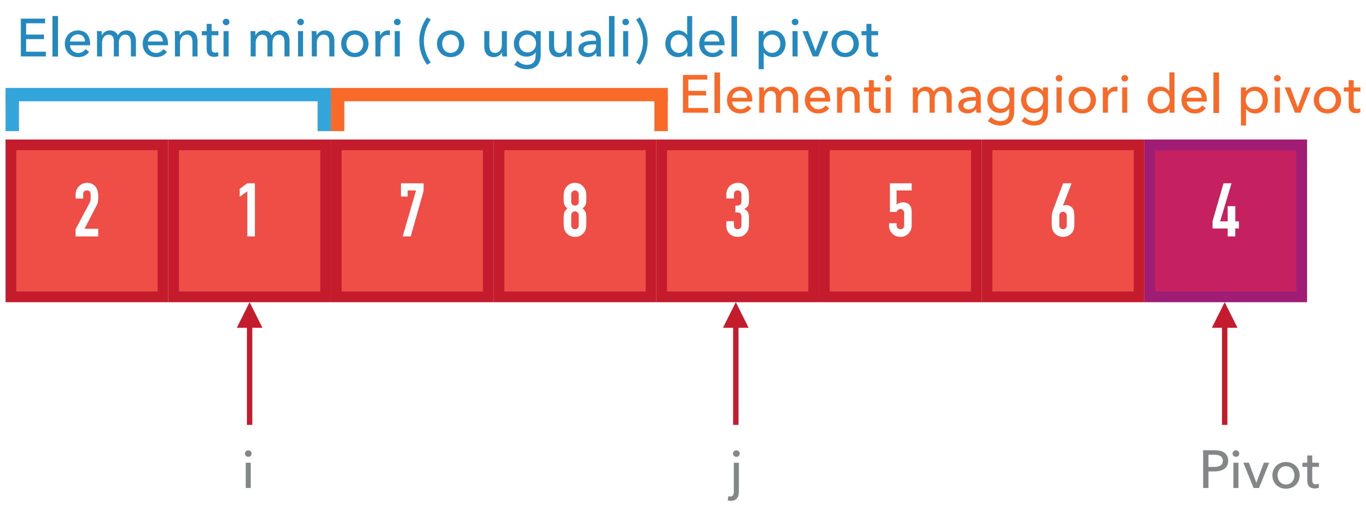

Se A[j] è minore del pivot
incrementiamo i e scambiamo A[i] e A[j]

# PROCEDURA DI PARTIZIONAMENTO



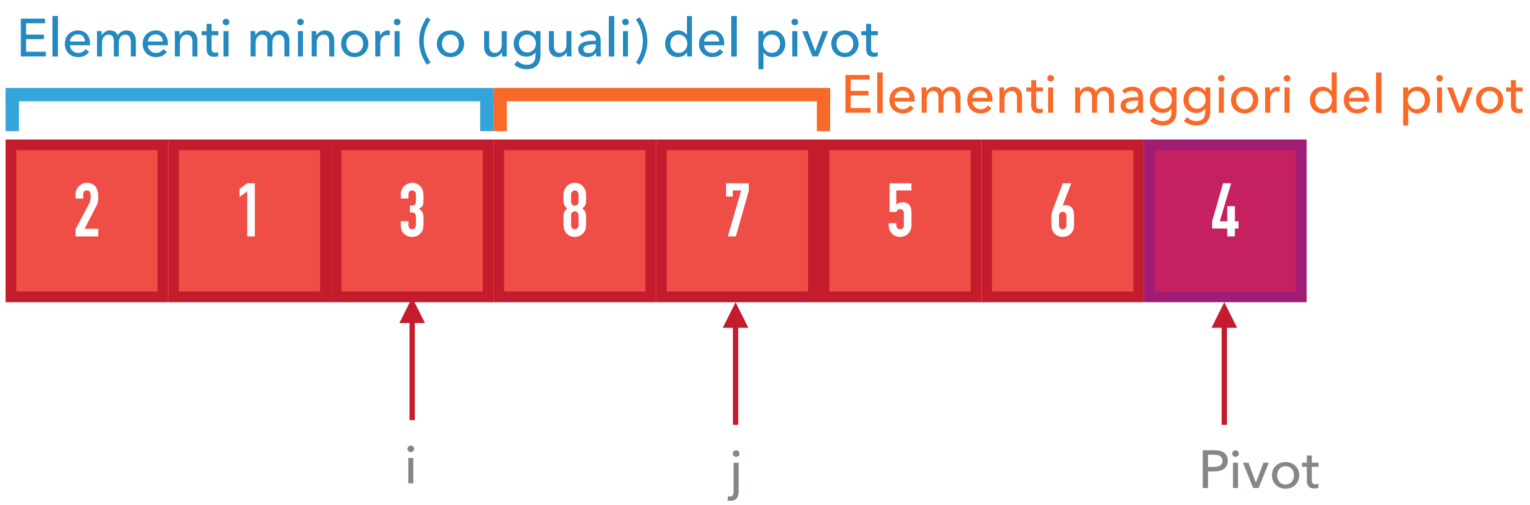

Se A[j] è minore del pivot
incrementiamo i e scambiamo A[i] e A[j]

# PROCEDURA DI PARTIZIONAMENTO



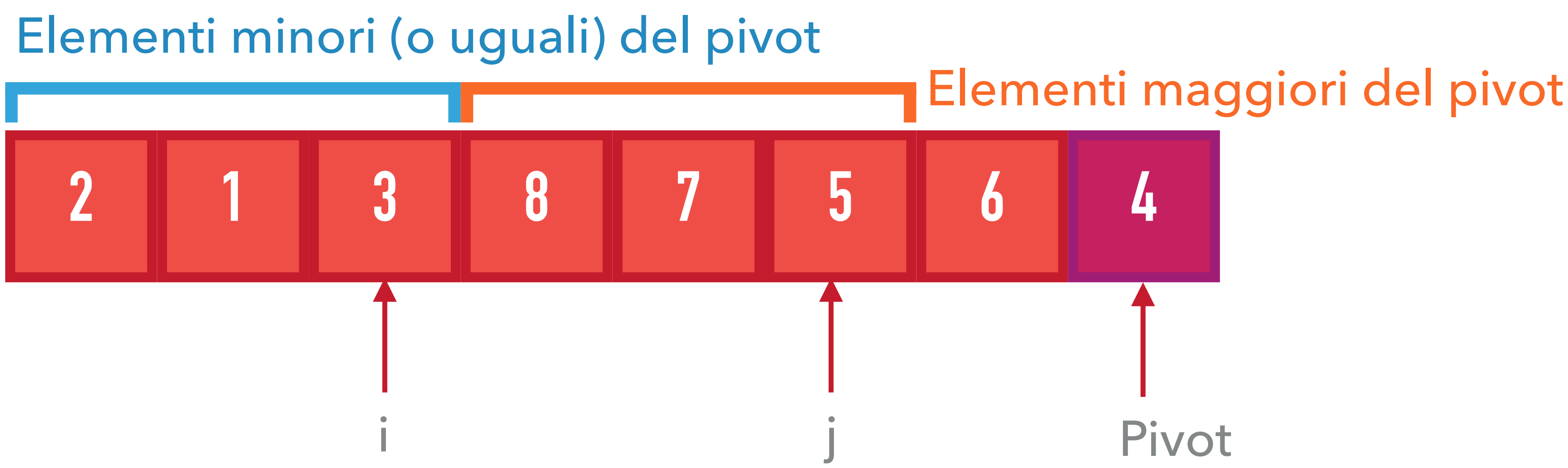

Se A[j] è minore del pivot
incrementiamo i e scambiamo A[i] e A[j]

# PROCEDURA DI PARTIZIONAMENTO



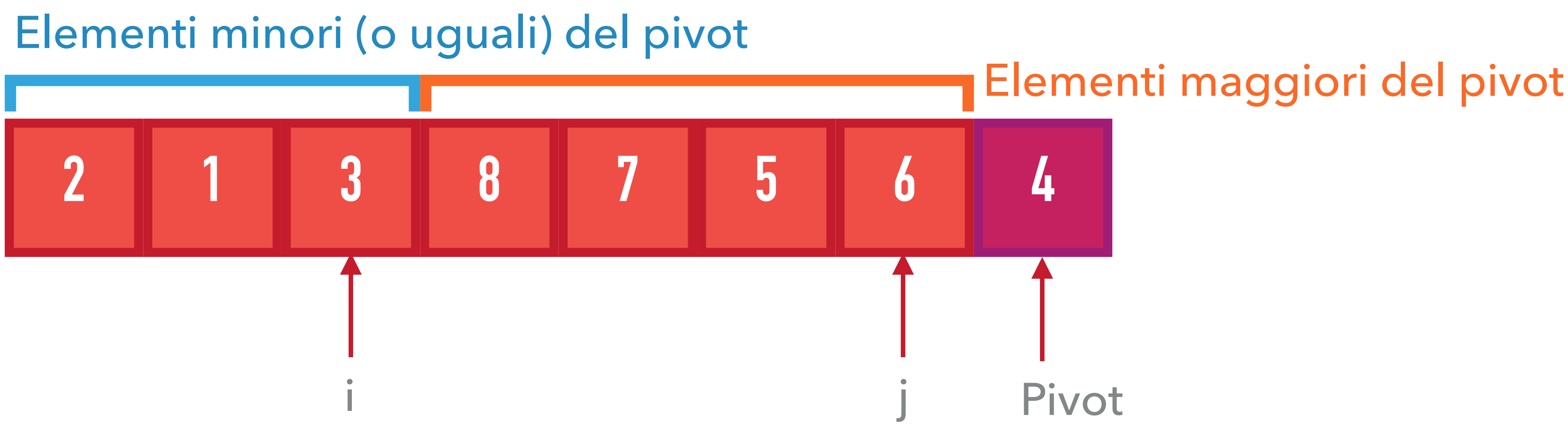

Se A[j] è minore del pivot
incrementiamo i e scambiamo A[i] e A[j]

# PROCEDURA DI PARTIZIONAMENTO



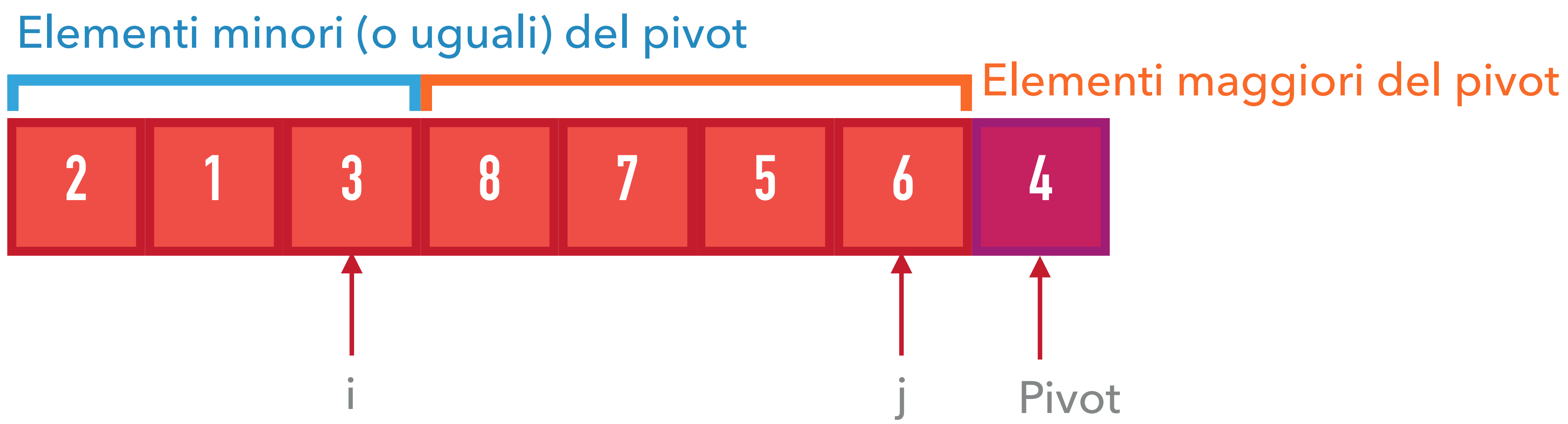

Se A[j] è maggiore del pivot
non facciamo nulla

# PROCEDURA DI PARTIZIONAMENTO



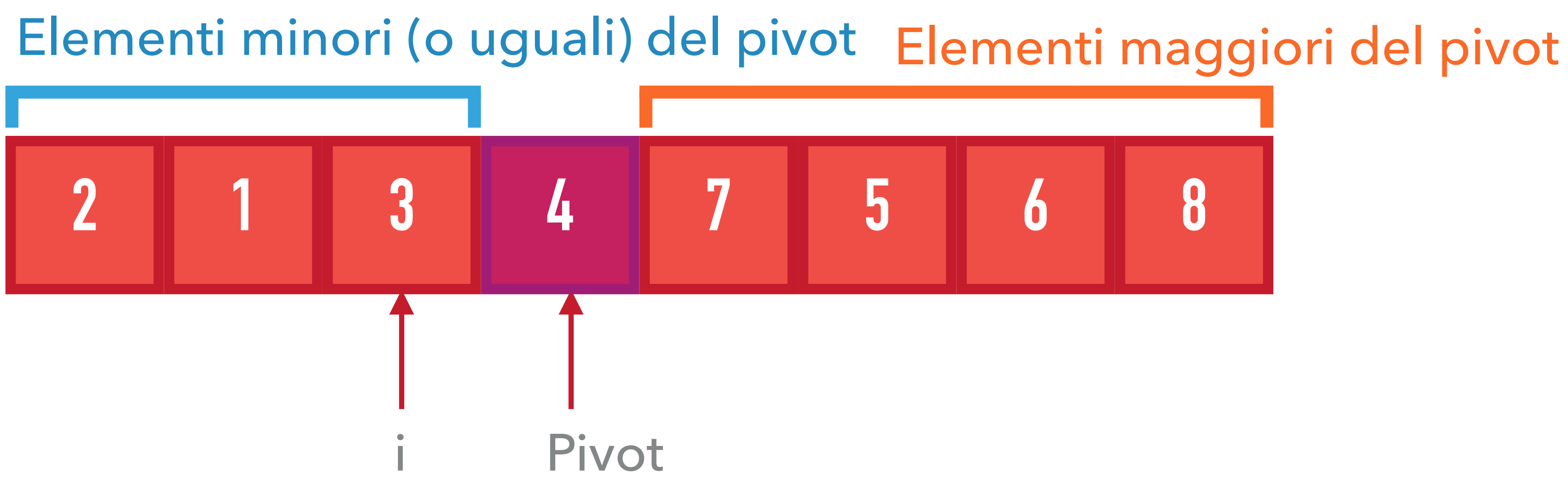

Se A[j] è maggiore del pivot
non facciamo nulla

# PROCEDURA DI PARTIZIONAMENTO




Abbiamo effettuato una scansione di tutto l'array
e abbiamo raccolto tutti gli elementi minori o uguali
del pivot negli indici $[0,i]$.
Dobbiamo solo posizionale il pivot tra le due partizioni

# PROCEDURA DI PARTIZIONAMENTO




Ci basta scambiare l'elemento in posizione $i + 1$
(che è necessariamente maggiore del pivot
o il pivot stesso) con il pivot

# PARTIZIONAMENTO: PSEUDOCODICE

# PARTIZIONAMENTO: PSEUDOCODICE

```
Parametri: A (un array)
```

# PARTIZIONAMENTO: PSEUDOCODICE

```
Parametri: A (un array)
x = A[n−1] # il pivot è l’ultimo elemento dell’array
```

# PARTIZIONAMENTO: PSEUDOCODICE

```
Parametri: A (un array)
x = A[n−1] # il pivot è l’ultimo elemento dell’array
i = −1 # posizione iniziale degli elementi minori del pivot
```

# PARTIZIONAMENTO: PSEUDOCODICE

```
Parametri: A (un array)
x = A[n-1] # il pivot è l'ultimo elemento dell'array
i = -1 # posizione iniziale degli elementi minori del pivot
for j in range(0, n-1) # per tutti gli elementi dell'array tranne l'ultimo
```

# PARTIZIONAMENTO: PSEUDOCODICE

```
Parametri: A (un array)
x = A[n−1] # il pivot è l’ultimo elemento dell’array
i = −1 # posizione iniziale degli elementi minori del pivot
for j in range(0, n−1) # per tutti gli elementi dell’array tranne l’ultimo
  if A[j] ≤ x # se troviamo un elemento minore del pivot…
```

# PARTIZIONAMENTO: PSEUDOCODICE

```
Parametri: A (un array)
x = A[n−1] # il pivot è l’ultimo elemento dell’array
i = −1 # posizione iniziale degli elementi minori del pivot
for j in range(0, n−1) # per tutti gli elementi dell’array tranne l’ultimo
  if A[j] ≤ x # se troviamo un elemento minore del pivot…
     i = i + 1
```

# PARTIZIONAMENTO: PSEUDOCODICE

```
Parametri: A (un array)
x = A[n-1] # il pivot è l’ultimo elemento dell’array
i = -1 # posizione iniziale degli elementi minori del pivot
for j in range(0, n-1) # per tutti gli elementi dell’array tranne l’ultimo
  if A[j] ≤ x # se troviamo un elemento minore del pivot…
     i = i + 1
     scambia A[i] e A[j] # …lo spostiamo nella prima parte dell’array
```

# PARTIZIONAMENTO: PSEUDOCODICE

```
Parametri: A (un array)
x = A[n-1] # il pivot è l'ultimo elemento dell'array
i = -1 # posizione iniziale degli elementi minori del pivot
for j in range(0, n-1) # per tutti gli elementi dell'array tranne l'ultimo
  if A[j] ≤ x # se troviamo un elemento minore del pivot…
     i = i + 1
     scambia A[i] e A[j] # …lo spostiamo nella prima parte dell'array
Scambia A[i+1] con A[n-1] # mettiamo il pivot nella sua posizione finale
return i+1
```

# PARTIZIONAMENTO: PSEUDOCODICE

```
Parametri: A (un array)
x = A[n−1] # il pivot è l’ultimo elemento dell’array
i = −1 # posizione iniziale degli elementi minori del pivot
for j in range(0, n−1) # per tutti gli elementi dell’array tranne l’ultimo
  if A[j] ≤ x # se troviamo un elemento minore del pivot…
     i = i + 1
     scambia A[i] e A[j] # …lo spostiamo nella prima parte dell’array
Scambia A[i+1] con A[n−1] # mettiamo il pivot nella sua posizione finale
return i+1
```

Ma a noi servirà partizionare segmenti arbitrari di un array, quindi possiamo usare un’altra versione della procedura di partizionamento che lo applica solo tra due indici

# PARTIZIONAMENTO: PSEUDOCODICE

Vediamo una procedura più generale che effettua il partizionamento tra gli indici p e r

# PARTIZIONAMENTO: PSEUDOCODICE

Vediamo una procedura più generale che effettua il partizionamento tra gli indici p e r

```
Parametri: A (un array), p, r (indice di inizio e fine)
```

# PARTIZIONAMENTO: PSEUDOCODICE

Vediamo una procedura più generale che effettua il partizionamento tra gli indici p e r

```
Parametri: A (un array), p, r (indice di inizio e fine)
x = A[r] # il pivot è l’ultimo elemento dell’array (tra gli indici p e r)
```

# PARTIZIONAMENTO: PSEUDOCODICE

Vediamo una procedura più generale che effettua il partizionamento tra gli indici p e r

```
Parametri: A (un array), p, r (indice di inizio e fine)
x = A[r] # il pivot è l'ultimo elemento dell'array (tra gli indici p e r)
i = p-1 # posizione iniziale degli elementi minori del pivot
```

# PARTIZIONAMENTO: PSEUDOCODICE

Vediamo una procedura più generale che effettua il partizionamento tra gli indici p e r

```
Parametri: A (un array), p, r (indice di inizio e fine)
x = A[r] # il pivot è l’ultimo elemento dell’array (tra gli indici p e r)
i = p-1 # posizione iniziale degli elementi minori del pivot
for j in range(p,r) # per tutti gli elementi dell’array tranne il pivot
```

# PARTIZIONAMENTO: PSEUDOCODICE

Vediamo una procedura più generale che effettua il partizionamento tra gli indici p e r

```
Parametri: A (un array), p, r (indice di inizio e fine)
x = A[r] # il pivot è l’ultimo elemento dell’array (tra gli indici p e r)
i = p-1 # posizione iniziale degli elementi minori del pivot
for j in range(p,r) # per tutti gli elementi dell’array tranne il pivot
if A[j] ≤ x # se troviamo un elemento minore del pivot…
```

# PARTIZIONAMENTO: PSEUDOCODICE

Vediamo una procedura più generale che effettua il partizionamento tra gli indici p e r

```
Parametri: A (un array), p, r (indice di inizio e fine)
x = A[r] # il pivot è l’ultimo elemento dell’array (tra gli indici p e r)
i = p-1 # posizione iniziale degli elementi minori del pivot
for j in range(p,r) # per tutti gli elementi dell’array tranne il pivot
if A[j] ≤ x # se troviamo un elemento minore del pivot…
    i = i + 1
```

# PARTIZIONAMENTO: PSEUDOCODICE

Vediamo una procedura più generale che effettua il partizionamento tra gli indici p e r

```
Parametri: A (un array), p, r (indice di inizio e fine)
x = A[r] # il pivot è l’ultimo elemento dell’array (tra gli indici p e r)
i = p-1 # posizione iniziale degli elementi minori del pivot
for j in range(p,r) # per tutti gli elementi dell’array tranne il pivot
if A[j] ≤ x # se troviamo un elemento minore del pivot…
    i = i + 1
    scambia A[i] e A[j] # …lo spostiamo nella prima parte dell’array
```

# PARTIZIONAMENTO: PSEUDOCODICE

Vediamo una procedura più generale che effettua il partizionamento tra gli indici p e r

```
Parametri: A (un array), p, r (indice di inizio e fine)
x = A[r] # il pivot è l’ultimo elemento dell’array (tra gli indici p e r)
i = p-1 # posizione iniziale degli elementi minori del pivot
for j in range(p,r) # per tutti gli elementi dell’array tranne il pivot
if A[j] ≤ x # se troviamo un elemento minore del pivot…
    i = i + 1
    scambia A[i] e A[j] # …lo spostiamo nella prima parte dell’array
Scambia A[i+1] con A[r] # mettiamo il pivot nella sua posizione finale
```

# PARTIZIONAMENTO: PSEUDOCODICE

Vediamo una procedura più generale che effettua il partizionamento tra gli indici p e r

```
Parametri: A (un array), p, r (indice di inizio e fine)
x = A[r] # il pivot è l’ultimo elemento dell’array (tra gli indici p e r)
i = p-1 # posizione iniziale degli elementi minori del pivot
for j in range(p,r) # per tutti gli elementi dell’array tranne il pivot
if A[j] ≤ x # se troviamo un elemento minore del pivot…
     i = i + 1
     scambia A[i] e A[j] # …lo spostiamo nella prima parte dell’array
Scambia A[i+1] con A[r] # mettiamo il pivot nella sua posizione finale
return i+1
```

# PARTIZIONAMENTO: PERCHÉ FUNZIONA?

# PARTIZIONAMENTO: PERCHÉ FUNZIONA?

- Invariante (condizione che rimane vera ad ogni ciclo):
  - Gli elementi tra l'inizio dell'array e $i$ sono tutti minori o uguali del pivot
  - Gli elementi tra $i + 1$ e $j$ sono tutti maggiori del pivot

# PARTIZIONAMENTO: PERCHÉ FUNZIONA?

- Invariante (condizione che rimane vera ad ogni ciclo):
  - Gli elementi tra l'inizio dell'array e $i$ sono tutti minori o uguali del pivot
  - Gli elementi tra $i + 1$ e $j$ sono tutti maggiori del pivot
- Ogni iterazione continua a far rispettare questa condizione:

# PARTIZIONAMENTO: PERCHÉ FUNZIONA?

- Invariante (condizione che rimane vera ad ogni ciclo):
  - Gli elementi tra l'inizio dell'array e $i$ sono tutti minori o uguali del pivot
  - Gli elementi tra $i + 1$ e $j$ sono tutti maggiori del pivot
- Ogni iterazione continua a far rispettare questa condizione:
  - Se il nuovo elemento è maggiore del pivot viene mantenuto nella sua posizione, rispettando quindi la condizione

# PARTIZIONAMENTO: PERCHÉ FUNZIONA?

- Invariante (condizione che rimane vera ad ogni ciclo):
  - Gli elementi tra l'inizio dell'array e $i$ sono tutti minori o uguali del pivot
  - Gli elementi tra $i + 1$ e $j$ sono tutti maggiori del pivot
- Ogni iterazione continua a far rispettare questa condizione:
  - Se il nuovo elemento è maggiore del pivot viene mantenuto nella sua posizione, rispettando quindi la condizione
  - Se il nuovo elemento è minore o uguale del pivot, $i$ viene incrementato l'elemento in posizione $j$ viene scambiato con quello in posizione $i$ (che, dato che $i$ è stato incrementato, è maggiore del pivot)

# PARTIZIONAMENTO: COMPLESSITÀ

- Il partizionamento viene fatto con una singola "passata" dell'array (il ciclo for esterno)
- Tutte le operazioni all'interno e all'esterno del ciclo for hanno un costo costante
- Ne segue che il partizionamento viene fatto in tempo $\Theta(n)$

# QUICKSORT: PSEUDOCODICE

# QUICKSORT: PSEUDOCODICE

```
Parametri: A (un array), p, r (indice di inizio e fine)
```

# QUICKSORT: PSEUDOCODICE

```
Parametri: A (un array), p, r (indice di inizio e fine)
if p ≥ r:
```

# QUICKSORT: PSEUDOCODICE

```
Parametri: A (un array), p, r (indice di inizio e fine)
if p ≥ r:
   return
```

# QUICKSORT: PSEUDOCODICE

```
Parametri: A (un array), p, r (indice di inizio e fine)
if p ≥ r:
   return
q = partiziona(A, p, r) # indice del pivot dopo il partizionamento
```

# QUICKSORT: PSEUDOCODICE

```
Parametri: A (un array), p, r (indice di inizio e fine)
if p ≥ r:
   return
q = partiziona(A, p, r) # indice del pivot dopo il partizionamento
quicksort(A, p, q−1) # chiamata ricorsiva sugli elementi minori o uguali
```

# QUICKSORT: PSEUDOCODICE

```
Parametri: A (un array), p, r (indice di inizio e fine)
if p ≥ r:
   return
q = partiziona(A, p, r) # indice del pivot dopo il partizionamento
quicksort(A, p, q−1) # chiamata ricorsiva sugli elementi minori o uguali
quicksort(A, q+1, r) # chiamata ricorsiva sugli elementi maggiori
```

# QUICKSORT: PERCHÉ FUNZIONA?

# QUICKSORT: PERCHÉ FUNZIONA?

- Per un array di dimensione 0 o 1 il quicksort funziona per motivi banali

# QUICKSORT: PERCHÉ FUNZIONA?

- Per un array di dimensione 0 o 1 il quicksort funziona per motivi banali
- Supponiamo di avere provato che il quicksort funziona per ogni dimensione minore di $n$, vediamo che funziona per la dimensione $n$

# QUICKSORT: PERCHÉ FUNZIONA?

- Per un array di dimensione 0 o 1 il quicksort funziona per motivi banali
- Supponiamo di avere provato che il quicksort funziona per ogni dimensione minore di $n$, vediamo che funziona per la dimensione $n$
- Dopo la procedura di partizionamento il pivot è nella posizione corretta e otteniamo due sotto-array uno che precedete il pivot con tutti gli elementi minori o uguali al pivot e uno con tutti gli elementi maggiori

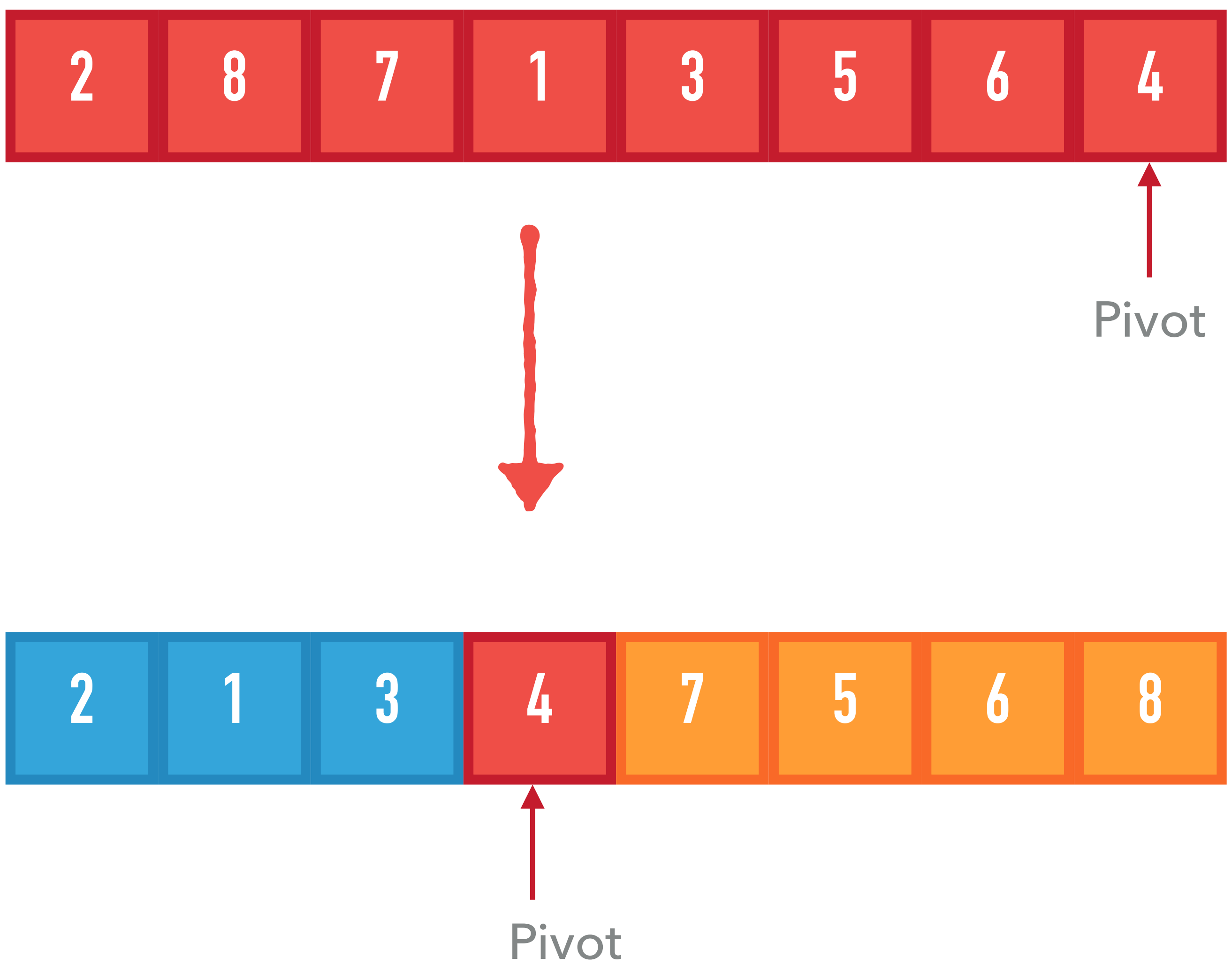
# QUICKSORT: PERCHÉ FUNZIONA?

- Per un array di dimensione 0 o 1 il quicksort funziona per motivi banali
- Supponiamo di avere provato che il quicksort funziona per ogni dimensione minore di $n$, vediamo che funziona per la dimensione $n$
- Dopo la procedura di partizionamento il pivot è nella posizione corretta e otteniamo due sotto-array uno che precedete il pivot con tutti gli elementi minori o uguali al pivot e uno con tutti gli elementi maggiori
- Richiamiamo quicksort sui due sotto-array di dimensione minore di $n$, che per ipotesi ci restituiranno gli array ordinati
- Otteniamo tutti gli elementi minori o uguali al pivot ordinati, seguiti dal pivot e da tutti gli elementi maggiori del pivot ordinati. Quindi l’array di $n$ elementi è ordinato.

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ

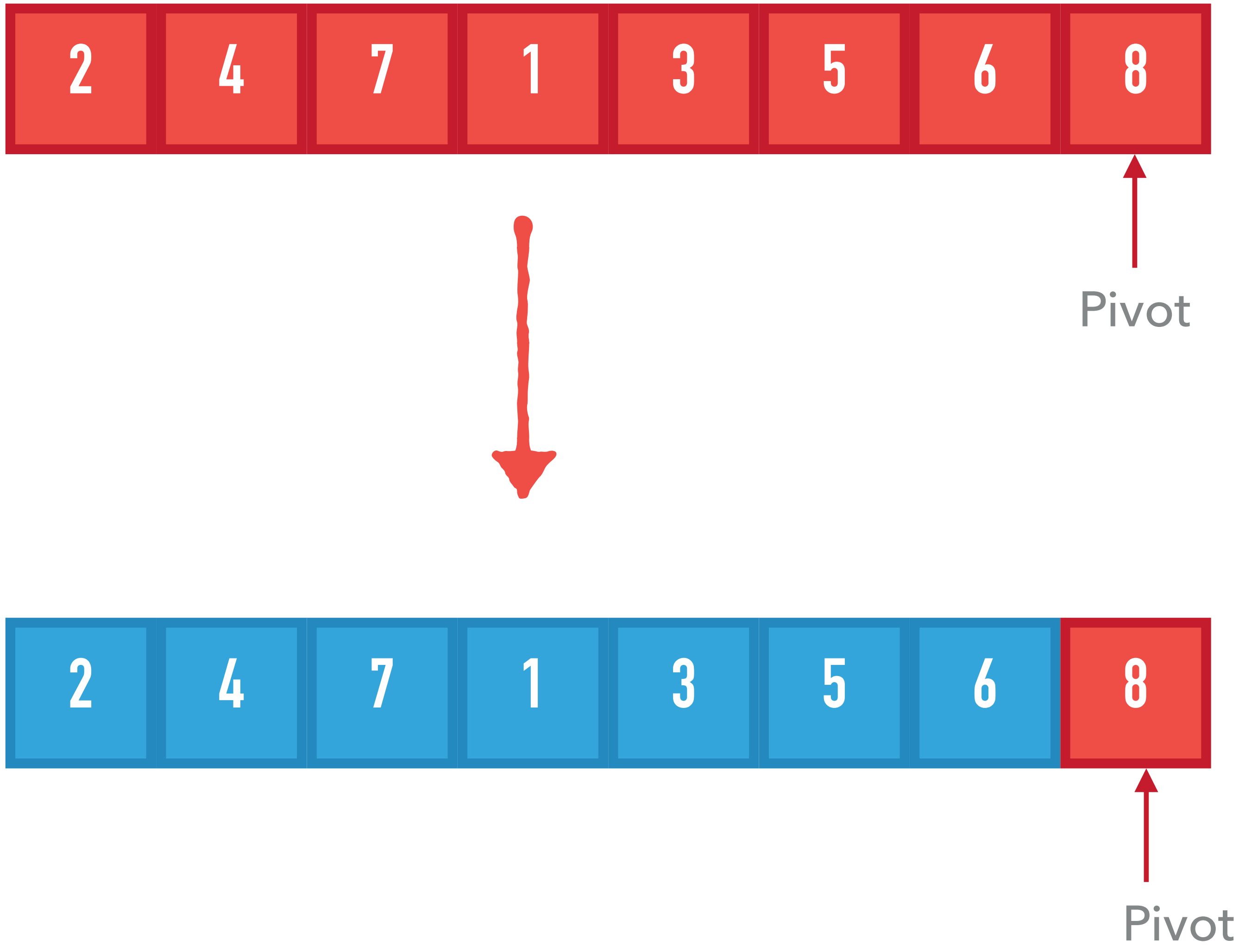
- L'analisi della complessità del quicksort è più delicata di mergesort e heapsort
- La dimensione degli array nelle chiamate ricorsive dipende dalla procedura di partizionamento
- La procedura di partizionamento dipende, a sua volta dai dati che abbiamo

# POSSIBILI PARTIZIONAMENTI




Un “buon” partizionamento:
i due sottoarray risultanti sono ognuno circa la metà dell’array di partenza

# POSSIBILI PARTIZIONAMENTI




Un "cattivo" partizionamento: uno dei sotto-array risultanti contiene tutti gli elementi tranne uno e l'altro è vuoto!

# QUIZ

In **quali** dei seguenti casi il partizionamento è maggiormente sbilanciato?

1) [1, 2, 3, 4, 5]

2) [2, 6, 5, 3, 4]

3) [1, 2, 5, 4, 3]

4) [5, 4, 3, 2, 1]

# QUIZ

In **quali** dei seguenti casi il partizionamento è maggiormente sbilanciato?

1) [1, 2, 3, 4, 5]

2) [2, 6, 5, 3, 4]

3) [1, 2, 5, 4, 3]

4) [5, 4, 3, 2, 1]

# QUIZ

In **quali** dei seguenti casi il partizionamento è maggiormente sbilanciato?

1) [1, 2, 3, 4, 5]

2) [2, 6, 5, 3, 4]

3) [1, 2, 5, 4, 3]

4) [5, 4, 3, 2, 1]

# “BUON PARTIZIONAMENTO”: ANALISI

# “BUON PARTIZIONAMENTO”: ANALISI

- Assumiamo che ogni partizionamento crei due sottoarray di dimensioni approssimativamente $n/2$
- L’equazione di ricorrenza diventa quindi:
$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$$

# "BUON PARTIZIONAMENTO": ANALISI

- Assumiamo che ogni partizionamento crei due sottoarray di dimensioni approssimativamente $n/2$
- L'equazione di ricorrenza diventa quindi:
  $$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$$
- Per il teorema dell'esperto il tempo di calcolo del quicksort è $\Theta(n \log n)$
- Ma questo risultato vale solo per un "buon" partizionamento

# “CATTIVO PARTIZIONAMENTO”: ANALISI

# "CATTIVO PARTIZIONAMENTO": ANALISI

- Assumiamo che ogni partizionamento crei un sottoarray vuoto ed uno di dimensione $n - 1$
- L'equazione di ricorrenza diventa quindi:
$T(n) = T(n-1) + T(0) + \Theta(n) = T(n-1) + \Theta(n)$

## "CATTIVO PARTIZIONAMENTO": ANALISI

- Assumiamo che ogni partizionamento crei un sottoarray vuoto ed uno di dimensione $n - 1$
- L'equazione di ricorrenza diventa quindi: $T(n) = T(n-1) + T(0) + \Theta(n) = T(n-1) + \Theta(n)$
- Se espandiamo $T(n)$ vediamo che abbiamo $n$ "passi ricorsivi", ognuno dei quali esegue un lavoro lineare rispetto alla dimensione dell'array da ordinare
- Come risultato otteniamo $\Theta(n^2)$

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ

- Nel caso peggiore quindi otteniamo $\Theta(n^2)$
- Ma quanto è frequente il caso peggiore?

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ

- Nel caso peggiore quindi otteniamo $\Theta(n^2)$
- Ma quanto è frequente il caso peggiore?
- Supponiamo che le nostre partizioni siano molto sbilanciate: la prima metà include $1/10$ dell'array e la seconda ne include $9/10$
- Lo stesso ragionamento vale anche per $1/100$ e $99/100$, etc.

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ

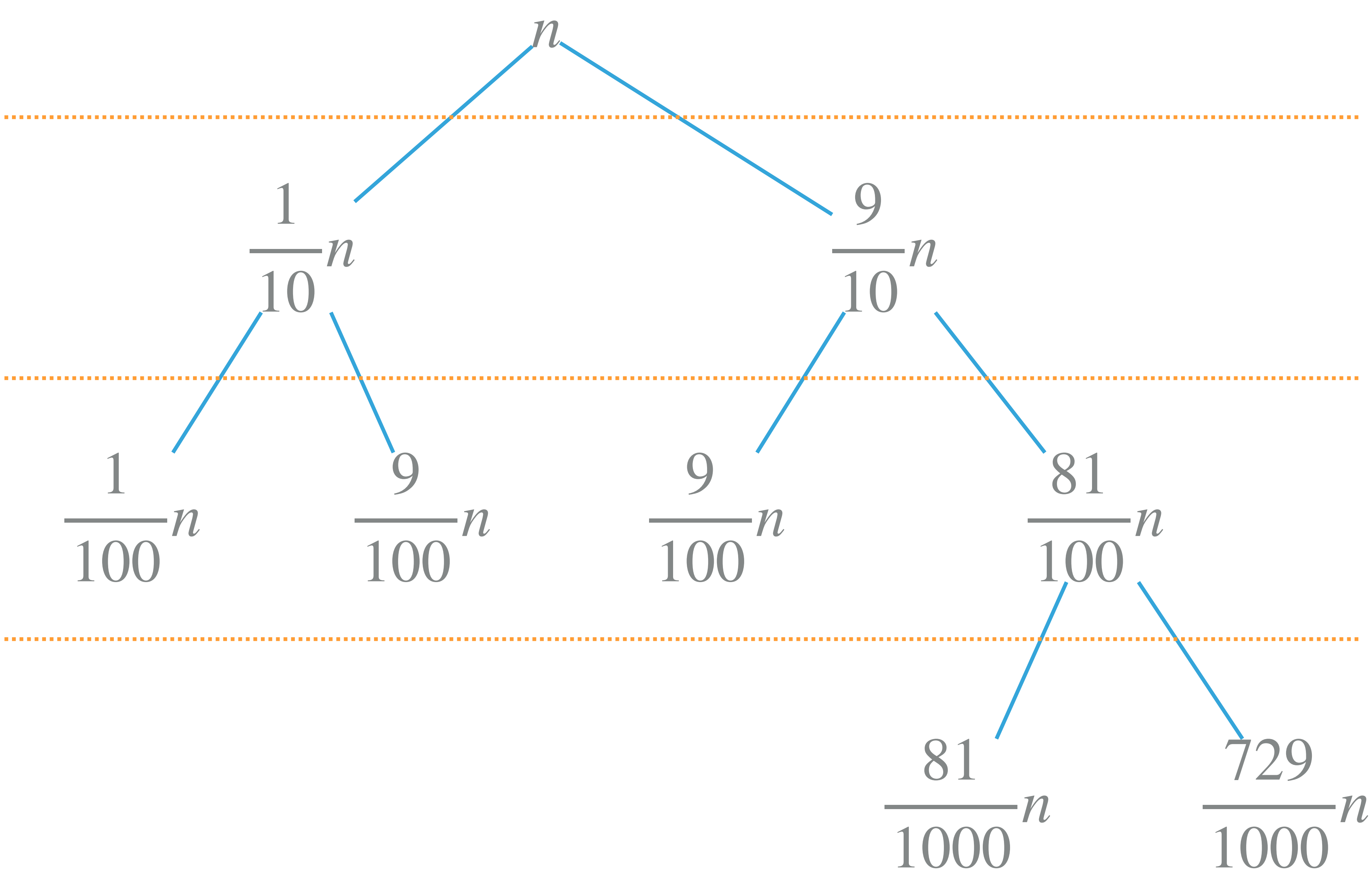
# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ

- $$T(n) = T\left(\frac{9}{10}n\right) + T\left(\frac{1}{10}n\right) + \Theta(n)$$

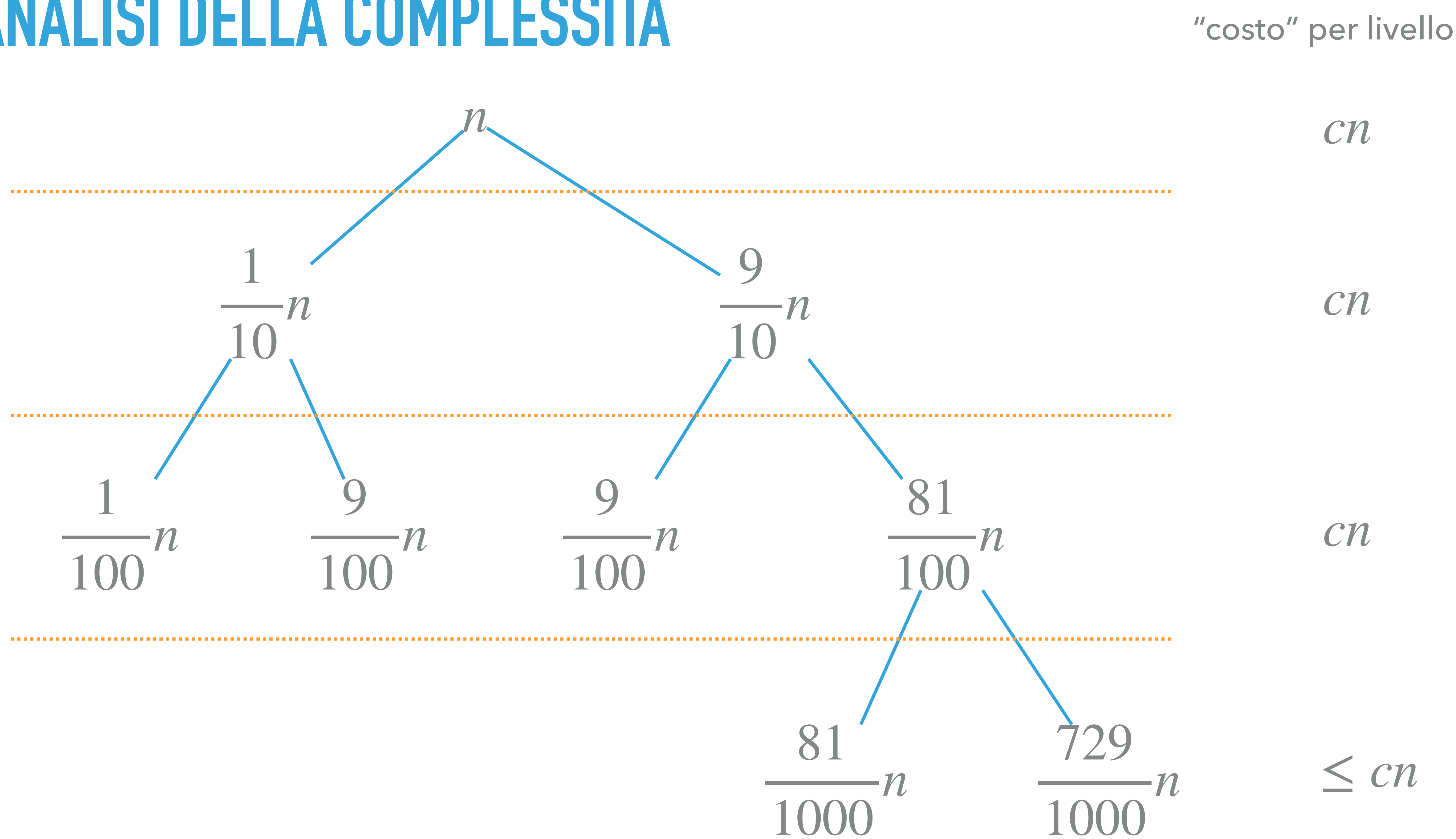
# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ

- $T(n) = T\left(\frac{9}{10}n\right) + T\left(\frac{1}{10}n\right) + \Theta(n)$
- Esplicitiamo la costante nascosta $c$ nell'$\Theta(n)$:
  $T(n) = T\left(\frac{9}{10}n\right) + T\left(\frac{1}{10}n\right) + cn$
- Costruiamo l'albero delle chiamate ricorsive

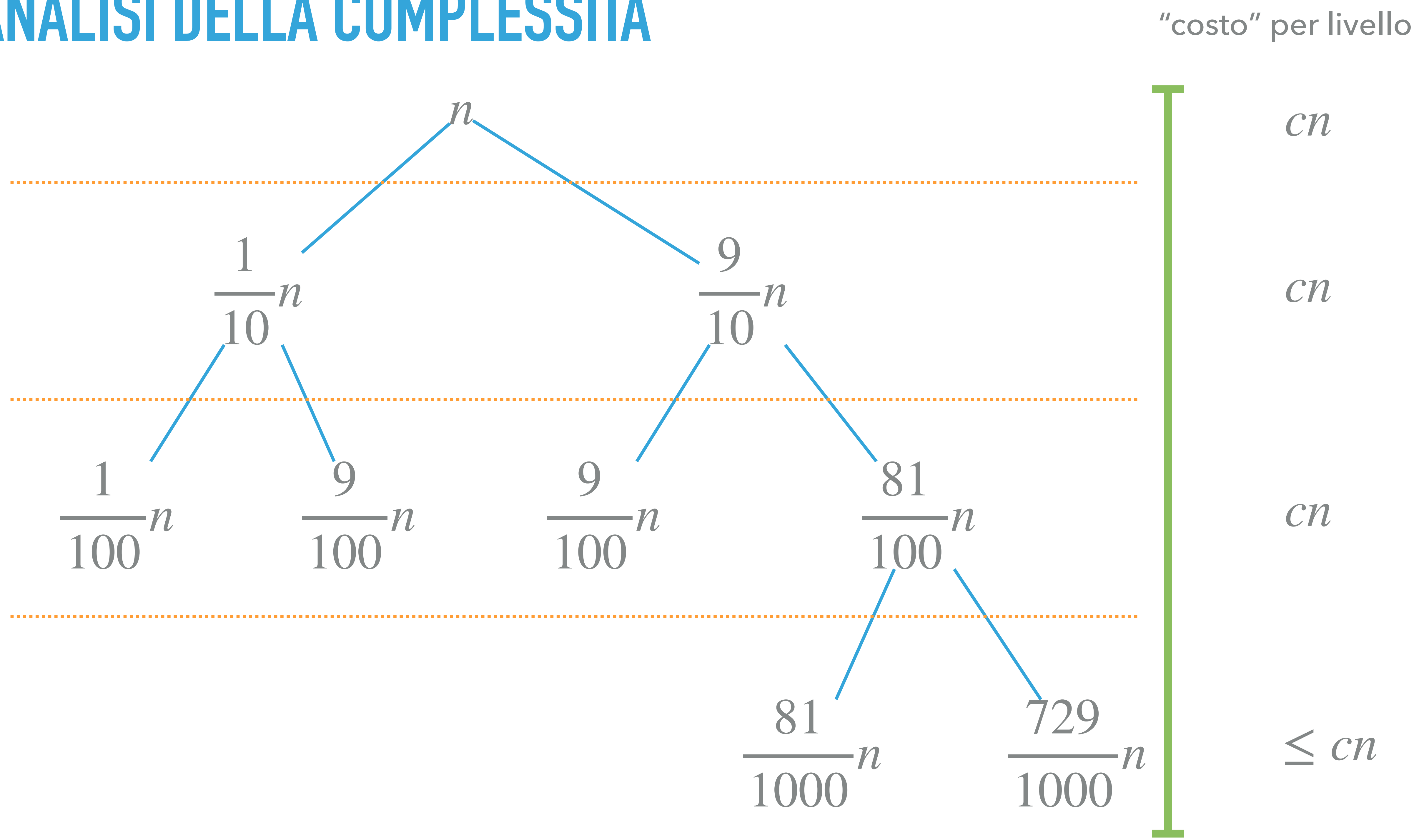
# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ



# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ

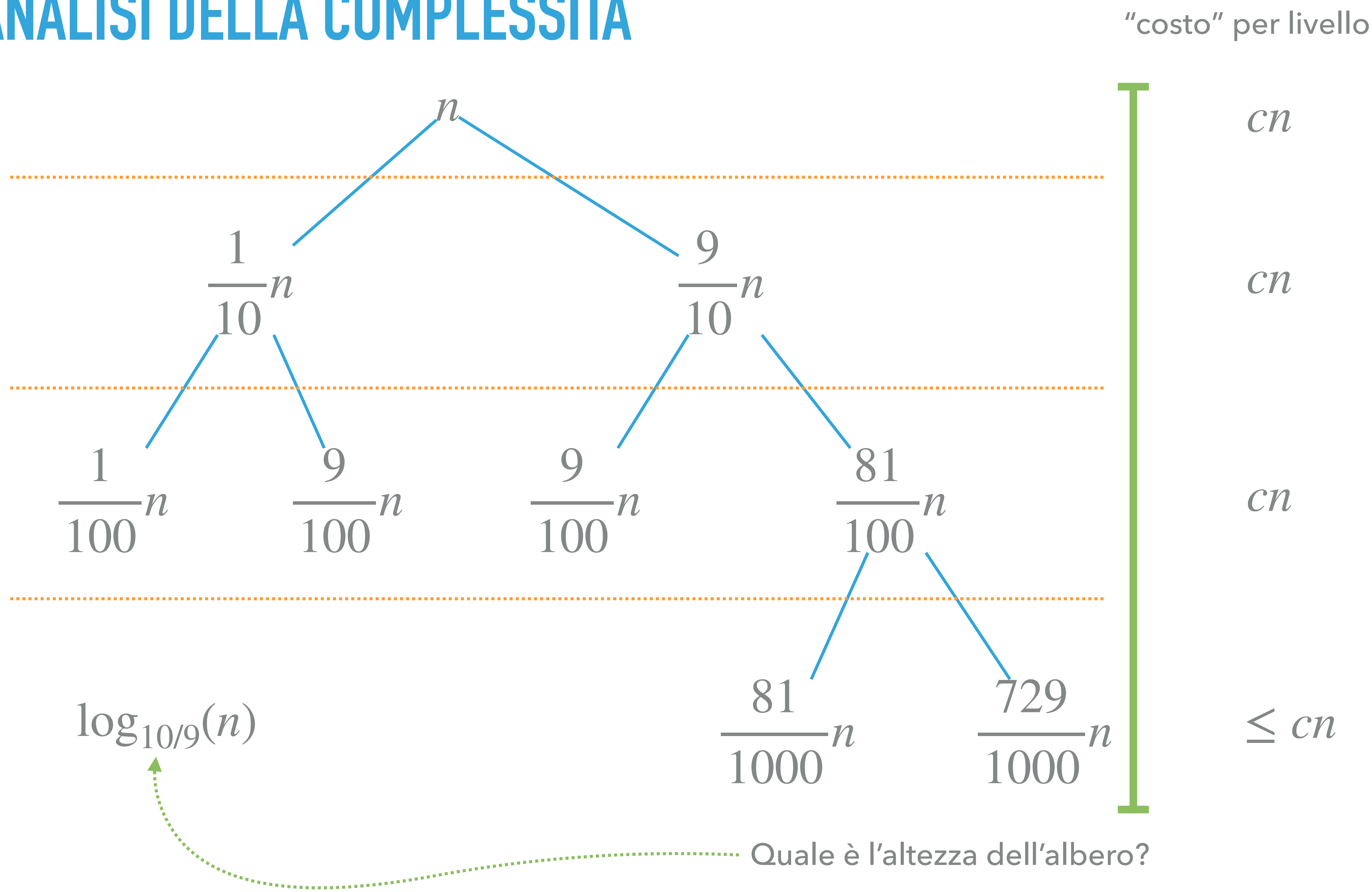


# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ

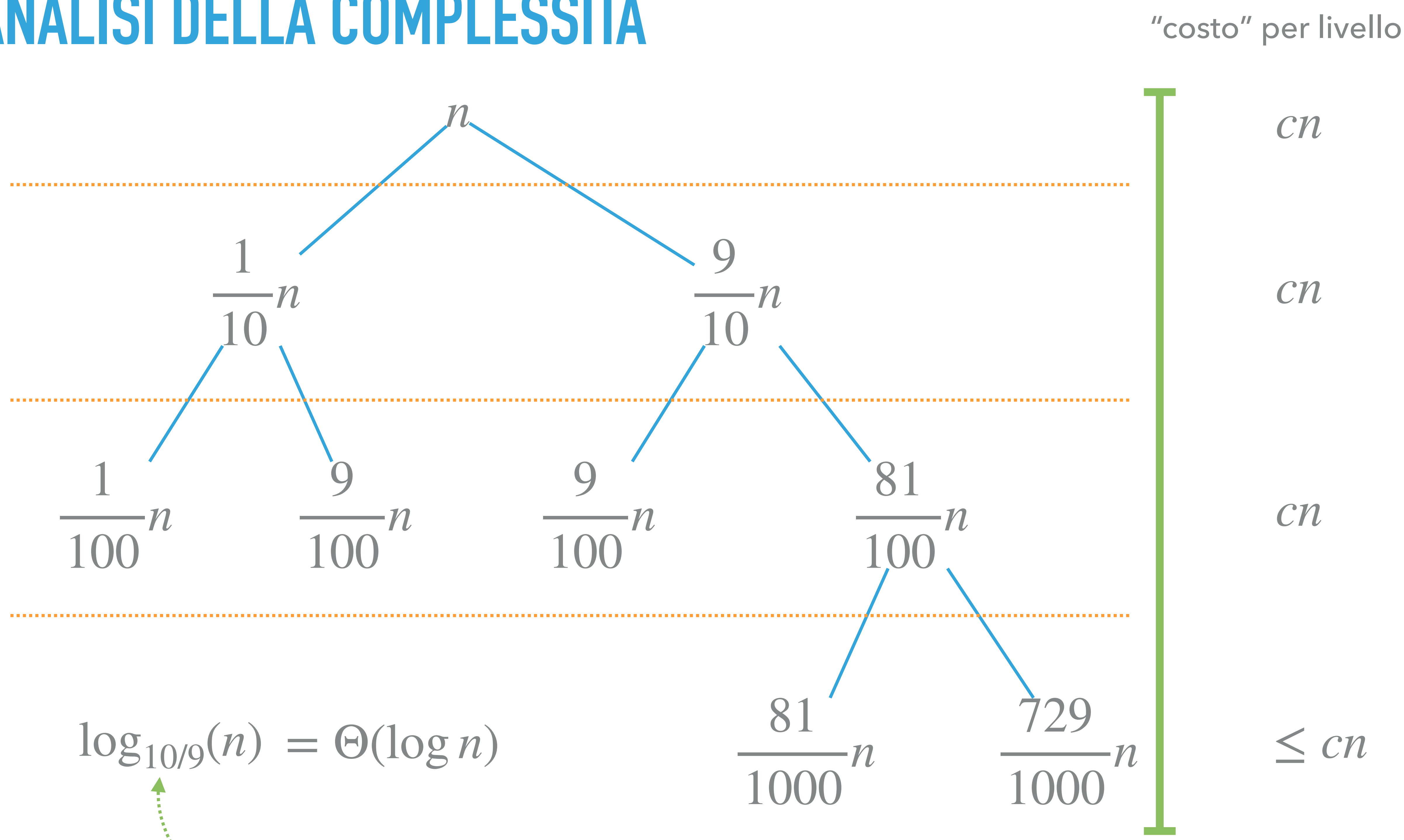



Quale è l'altezza dell'albero?

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ



# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ




$$\log_{10/9}(n) = \Theta(\log n)$$

Quale è l'altezza dell'albero?

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ

- Stiamo eseguendo al più $cn$ passi per ognuno degli $\Theta(\log n)$ livelli dell'albero
- Di conseguenza il tempo di esecuzione è ancora $\Theta(n \log n)$

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ

- Stiamo eseguendo al più $cn$ passi per ognuno degli $\Theta(\log n)$ livelli dell'albero
- Di conseguenza il tempo di esecuzione è ancora $\Theta(n \log n)$
- Cosa succede nel "caso medio"?
- È possibile provare che, se la scelta del pivot viene effettuata in modo casuale, il **tempo atteso** di esecuzione è $\Theta(n \log n)$

# QUICKSORT: POSSIBILI VARIANTI

# QUICKSORT: POSSIBILI VARIANTI

- Esistono molte varianti del quicksort per minimizzare il rischio di cadere nel caso peggiore

# QUICKSORT: POSSIBILI VARIANTI

- Esistono molte varianti del quicksort per minimizzare il rischio di cadere nel caso peggiore
- Invece di scegliere l'ultimo elemento come pivot, viene scelto un elemento a caso che viene spostato in ultima posizione (Randomized-Quicksort)

# QUICKSORT: POSSIBILI VARIANTI

- Esistono molte varianti del quicksort per minimizzare il rischio di cadere nel caso peggiore
- Invece di scegliere l'ultimo elemento come pivot, viene scelto un elemento a caso che viene spostato in ultima posizione (Randomized-Quicksort)
- Vengono presi tre elementi e la mediana dei tre viene usata come pivot

# QUICKSORT: POSSIBILI VARIANTI

- Esistono molte varianti del quicksort per minimizzare il rischio di cadere nel caso peggiore
- Invece di scegliere l'ultimo elemento come pivot, viene scelto un elemento a caso che viene spostato in ultima posizione (Randomized-Quicksort)
- Vengono presi tre elementi e la mediana dei tre viene usata come pivot
- I libri "algorithms in C", "algorithms in Java" di Robert Sedgewick trattano molti di questi miglioramenti

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ NEL CASO MEDIO

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ NEL CASO MEDIO

- Come sono distribuiti gli input? Consideriamo array $A$ di lunghezza $n$, con elementi diversi tra loro, e assumiamo ogni permutazione sia equiprobabile.
- L'analisi che faremo vale uguale anche per randomized quicksort.

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ NEL CASO MEDIO

- Come sono distribuiti gli input? Consideriamo array $A$ di lunghezza $n$, con elementi diversi tra loro, e assumiamo ogni permutazione sia equiprobabile.
- L'analisi che faremo vale uguale anche per randomized quicksort.
- Il **rango** di un elemento $a \in A$ è la sua posizione nell'array A ordinato.

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ NEL CASO MEDIO

- Come sono distribuiti gli input? Consideriamo array $A$ di lunghezza $n$, con elementi diversi tra loro, e assumiamo ogni permutazione sia equiprobabile.
- L'analisi che faremo vale uguale anche per randomized quicksort.
- Il **rango** di un elemento $a \in A$ è la sua posizione nell'array A ordinato.
- Indichiamo con $z_i$ l'elemento di A di rango $i$, quindi $Z = [z_1, \ldots, z_n]$ è l'array ordinato.

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ NEL CASO MEDIO

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ NEL CASO MEDIO

- Cosa domina il costo di quicksort?

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ NEL CASO MEDIO

- Cosa domina il costo di quicksort?
- Il costo è uguale al numero totale di confronti del tipo $A[j] \leq pivot$ in **tutte** le chiamate di partition. Chiamo $X$ la **variabile aleatoria** che conta il numero totale di confronti in partition.

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ NEL CASO MEDIO

- Cosa domina il costo di quicksort?
- Il costo è uguale al numero totale di confronti del tipo $A[j] \leq pivot$ in **tutte** le chiamate di partition. Chiamo $X$ la **variabile aleatoria** che conta il numero totale di confronti in partition.
- Ogni coppia $z_i, z_j$ di elementi verrà confrontata al più una volta. Perchè?

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ NEL CASO MEDIO

- Cosa domina il costo di quicksort?
- Il costo è uguale al numero totale di confronti del tipo $A[j] \leq pivot$ in **tutte** le chiamate di partition. Chiamo $X$ la **variabile aleatoria** che conta il numero totale di confronti in partition.
- Ogni coppia $z_i, z_j$ di elementi verrà confrontata al più una volta. Perchè?
- perchè confronto solo con il pivot, che a fine partition non viene più toccato.

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ NEL CASO MEDIO

- Cosa domina il costo di quicksort?
- Il costo è uguale al numero totale di confronti del tipo $A[j] \leq pivot$ in **tutte** le chiamate di partition. Chiamo $X$ la **variabile aleatoria** che conta il numero totale di confronti in partition.
- Ogni coppia $z_i, z_j$ di elementi verrà confrontata al più una volta. Perchè?
- perchè confronto solo con il pivot, che a fine partition non viene più toccato.
- Sia $X_{i,j}$ una v.a. che vale 1 se confronto $z_i$ con $z_j$ e 0 altrimenti.

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ NEL CASO MEDIO

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ NEL CASO MEDIO

- Possiamo scrivere:

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{i,j}$$

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ NEL CASO MEDIO

- Possiamo scrivere:

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{i,j}$$

- Ci interessa il numero atteso di confronti:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{i,j}\right] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{E}[X_{i,j}]$$

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ NEL CASO MEDIO

- Possiamo scrivere:

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{i,j}$$

- Ci interessa il numero atteso di confronti:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{i,j}\right] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{E}[X_{i,j}]$$

- Vale anche $\mathbb{E}[X_{i,j}] = Pr\{X_{i,j} = 1\}$

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ NEL CASO MEDIO

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ NEL CASO MEDIO

- Qual è la probabilità che $z_i$ sia confrontato con $z_j$?

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ NEL CASO MEDIO

- Qual è la probabilità che $z_i$ sia confrontato con $z_j$?
- Sia $Z_{i,j} = [z_i, z_{i+1}, \ldots, z_j]$, e sia $z_k$ il primo elemento di $Z_{i,j}$ ad essere scelto come pivot.

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ NEL CASO MEDIO

- Qual è la probabilità che $z_i$ sia confrontato con $z_j$?
- Sia $Z_{i,j} = [z_i, z_{i+1}, \ldots, z_j]$, e sia $z_k$ il primo elemento di $Z_{i,j}$ ad essere scelto come pivot.
- Se $z_k = z_i$ o $z_k = z_j$, allora $X_{i,j} = 1$ altrimenti $X_{i,j} = 0$. Why?

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ NEL CASO MEDIO

- Qual è la probabilità che $z_i$ sia confrontato con $z_j$?
- Sia $Z_{i,j} = [z_i, z_{i+1}, \ldots, z_j]$, e sia $z_k$ il primo elemento di $Z_{i,j}$ ad essere scelto come pivot.
- Se $z_k = z_i$ o $z_k = z_j$, allora $X_{i,j} = 1$ altrimenti $X_{i,j} = 0$. Why?
- Se scelgo un $z_k, k \neq i, j$, allora $z_i$ e $z_j$ finiscono in due call ricorsive diverse, e non possono più essere confrontati.

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ NEL CASO MEDIO

- Qual è la probabilità che $z_i$ sia confrontato con $z_j$?
- Sia $Z_{i,j} = [z_i, z_{i+1}, \ldots, z_j]$, e sia $z_k$ il primo elemento di $Z_{i,j}$ ad essere scelto come pivot.
- Se $z_k = z_i$ o $z_k = z_j$, allora $X_{i,j} = 1$ altrimenti $X_{i,j} = 0$. Why?
- Se scelgo un $z_k, k \neq i, j$, allora $z_i$ e $z_j$ finiscono in due call ricorsive diverse, e non possono più essere confrontati.
- Per ipotesi sulla distribuzione:

  $Pr\{z_k$ è il primo pivot in $Z_{i,j}\} = \dfrac{1}{j-i+1}$

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ NEL CASO MEDIO

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ NEL CASO MEDIO

- $Pr\{X_{i,j} = 1\} = \dfrac{2}{j - i + 1}$

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ NEL CASO MEDIO

- $$Pr\{X_{i,j} = 1\} = \frac{2}{j - i + 1}$$
- $$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j - i + 1} < \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{w=1}^{n} \frac{1}{w} \text{ e}$$

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ NEL CASO MEDIO

- $Pr\{X_{i,j} = 1\} = \dfrac{2}{j - i + 1}$
- $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j - i + 1} < \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{w=1}^{n} \frac{1}{w}$ e
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{w=1}^{n} \frac{1}{w} = \sum_{i=1}^{n-1} O(\log n) = O(n \log n)$

# ANALISI DELLA COMPLESSITÀ NEL CASO MEDIO

- $Pr\{X_{i,j} = 1\} = \dfrac{2}{j - i + 1}$
- $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \dfrac{2}{j - i + 1} < \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{w=1}^{n} \dfrac{1}{w}$ e
- $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{w=1}^{n} \dfrac{1}{w} = \sum_{i=1}^{n-1} O(\log n) = O(n \log n)$
- La complessità nel caso medio è $O(n \log n)$!