

Probabilità Condizionata e Indipendenza

Probabilità Condizionata

- Idea: come **aggiornare la valutazione** in base all'arrivo di nuove informazioni?
 - ▶ se si sa che l'evento B è V, come cambia la probabilità dell'evento A ?
 - ▶ **$P(A|B)$ probabilità di A condizionata a B** (A dato B / A condizionata al verificarsi di B / ...)
- Il condizionamento può riflettere
 - ▶ una ipotesi di lavoro
 - ▶ un effettivo aumento di informazione
- Interessa in particolare se $P(A|B) > P(A)$ (o $<$, o $=$)

Probabilità Condizionata

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità, $A, B \in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$; la probabilità di A condizionata a B è

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Intuizione:
 - ▶ se B si è verificato, il nuovo spazio degli stati è $B \subset \Omega$
 - ▶ A si verifica solo se si verifica $A \cap B$, con probabilità $P(A \cap B)$
 - ▶ si “normalizza” dividendo per $P(B)$
- Osservazione: se $B \subset A$ allora $P(A|B) = 1$; se $B \subset \bar{A}$ allora $P(A|B) = 0$

Probabilità Condizionata

- Esercizio. Lancio di due dadi
 - ▶ per $A = \text{"la somma dei dadi è 7"}$
 $B = \text{"il massimo dei dadi è 5"}$
 $C = \text{"la differenza tra i due dadi è 1"}$
 - ▶ riesce
 $P(A|B) > (\text{ o } < \text{ o } =) P(A)?$
 $P(C|B) > (\text{ o } < \text{ o } =) P(C)?$

Probabilità Condizionata

- Proprietà della probabilità condizionata; $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità

- ▶ [Teorema delle probabilità composte (I)] $A, B \in \mathcal{F}, P(B) > 0$

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

- ▶ [Teorema delle probabilità composte (II)] $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F},$
 $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \dots \cap A_n) &= \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \end{aligned}$$

Probabilità Condizionata

- Proprietà della probabilità condizionata; $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità

- ▶ [Disintegrabilità (I)] $A, B \in \mathcal{F}$, $0 < P(B) < 1$

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})$$

- ▶ [Disintegrabilità (II)] $(B_i)_i \subset \mathcal{F}$ partizione discreta di Ω , $A \in \mathcal{F}$

$$P(A) = \sum_{i: P(B_i) > 0} P(B_i)P(A|B_i)$$

prob. di A è media ponderata delle prob. condizionate ad **alternative esaustive**; inoltre,

$$\min_i P(A|B_i) \leq P(A) \leq \max_i P(A|B_i)$$

Probabilità Condizionata

- Proprietà della probabilità condizionata; $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità

- ▶ [Teorema di Bayes (I)] $A, B \in \mathcal{F}$, $P(A) > 0$, $P(B) > 0$,

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

- ▶ [Teorema di Bayes (II)] $(B_i)_i \subset \mathcal{F}$ partizione discreta di Ω con $P(B_i) > 0$ per ogni i , $A \in \mathcal{F}$, $P(A) > 0$,

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_h P(B_h)P(A|B_h)}$$

Probabilità Condizionata

- Teorema di Bayes; interpretazione
 - ▶ “ribaltare” la valutazione: $P(B|A)$ in termini di $P(A|B)$
 - ▶ B_i “ipotesi” (non si sa quale evento della partizione è V); A “osservazione, dati”
 $P(B_i)$ = valutazione iniziale (a **priori**) sull'ipotesi;
 $P(B_i|A)$ = valutazione finale (a **posteriori**) data l'osservazione
- Statistica Bayesiana:
 - ▶ $(P(B_i))_i$ distribuzione iniziale sul parametro della distribuzione di una variabile
 - ▶ A osservazione della variabile
 - ▶ $(P(B_i|A))_i$ distribuzione finale

Probabilità Condizionata

- Proprietà della probabilità condizionata; $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità

▶ $B \in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$; la funzione $P_B : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$

$$P_B(A) = P(A|B), \quad A \in \mathcal{F}$$

è una probabilità su $(\Omega, \mathcal{F})$

↪ la probabilità condizionata ha le **stesse proprietà** di quella non condizionata

▶ inoltre, se $C \in \mathcal{F}$ con $P(B \cap C) > 0$

$$(P_B)_C = P_{B \cap C}$$

↪ condizionare in successione a B e $C \equiv$ condizionare a $B \cap C$

Probabilità Condizionata

- Esercizio. Una portafoglio di rischi è classificato in *buoni* (20%), *normali* (45%), *mediocri* (35%); la prob. di sinistro è rispettivamente 0.02, 0.05, 0.15
 - ▶ per un nuovo rischio, qual è la probabilità di sinistro?
 - ▶ se un rischio produce un sinistro, con quale probabilità il rischio è buono, normale, mediocre?

Probabilità Condizionata

- Esercizio. “Monty Hall Problem”: gioco TV in cui un concorrente deve scegliere una porta su tre dietro una porta c'è un premio (e.g. un'auto), dietro le altre due non c'è niente
 - ▶ dopo che il concorrente ha scelto, il presentatore (che sa dove si trova il premio) apre una delle altre due porte che è vuota
 - ▶ il presentatore offre al concorrente la possibilità di cambiare la porta scelta con l'altra ancora chiusa; **conviene farlo?**
 - ▶ ipotesi: se il presentatore può scegliere che porta aprire, sceglierà a caso

Probabilità Condizionata

- Esercizio. In matematica attuariale vita, per un individuo neonato, si considera, per $x \geq 0$,

$$E_x = \text{"l'individuo sopravvive all'età } x\text{"}$$

- ▶ che relazione c'è tra gli eventi E_x ?
- ▶ esprimere i simboli attuariali

$${}_t p_y, {}_t q_y, {}_{t|h} q_y$$

tramite gli eventi E_x

- ▶ dimostrare la relazione

$${}_{t+s} p_x = {}_t p_x \cdot {}_s p_{x+t}$$

Correlazione tra Eventi

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità
 - ▶ $A, B \in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$; A è correlato positivamente / correlato negativamente / non correlato con B se

$$P(A|B) > P(A), \quad P(A|B) < P(A), \quad P(A|B) = P(A)$$

sapere che B si verifica fa incrementare la prob. di A

- ▶ se anche $P(A) > 0$, le relazioni sono simmetriche
- ▶ A correlato positivamente / negativamente / non correlato con B
 $\Rightarrow \bar{A}$ è correlato negativamente / positivamente / non correlato con B

Eventi Indipendenti

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità; **due eventi** $A, B \in \mathcal{F}$ sono **indipendenti** se vale la proprietà di **fattorizzazione**

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- ▶ segue che A' e B' sono indipendenti, per ogni scelta di $A' = A$ o $A' = \bar{A}$ e di $B' = B$ o $B' = \bar{B}$
- ▶ se A ha probabilità **estrema**, $P(A) \in \{0, 1\} \Rightarrow A$ è indipendente da ogni evento B
- ▶ se $P(B) > 0$, allora A, B sono indipendenti $\iff A$ non correlato con B

Eventi Indipendenti

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità
 - ▶ $(A_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \mathcal{F}$, famiglia di eventi qualunque, sono indipendenti se per ogni $n \geq 1$, per ogni $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$ (distinti),

$$P(A_{\alpha_1} \cap \dots \cap A_{\alpha_n}) = P(A_{\alpha_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{\alpha_n})$$

↪ fattorizzazione su ogni sotto-famiglia finita

- ▶ conoscere il valore di alcuni degli eventi non modifica la valutazione sugli altri eventi
 - ▶ per un famiglia finita $A_1, \dots, A_n$ ↪ $2^n - n - 1$ condizioni tutte necessarie
- Esercizio. Scrivere tutte le condizioni di fattorizzazione per $n = 2, 3, 4$ eventi

Eventi Indipendenti

- Esercizio. 3 eventi non indipendenti ma **indipendenti a coppie**
 - ▶ $\Omega = \{abc, acb, cab, cba, bca, bac, aaa, bbb, ccc\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$,
 $P(\{\omega\}) = 1/9$ per ogni $\omega \in \Omega$
 - ▶ $A_k = \text{"la } k\text{-esima lettera è } a"$, $k = 1, 2, 3$
- Esercizio. Si estrae una carta da un mazzo di 52; il rango è indipendente dal seme
- Esercizio. Lancio di due dadi, $A = \text{"la somma dei dadi è 7"}$ è indipendente dal risultato del primo (o del secondo dado)

Eventi Indipendenti

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità
 - ▶ gli **insiemi di eventi** $(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in I}$, con $\mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{F}$ per ogni $\alpha \in I$, sono **indipendenti** se per ogni $n \geq 1$, per ogni $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$ (distinti), per ogni $A_1 \in \mathcal{A}_{\alpha_1}, \dots, A_n \in \mathcal{A}_{\alpha_n}$

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

- ▶ conoscere il valore degli eventi di alcuni dei sottoinsiemi non modifica la valutazione sugli eventi degli altri sottoinsiemi
- ▶ gli eventi all'interno di ogni insieme $\mathcal{A}_\alpha$ potrebbero essere dipendenti
- ▶ $\mathcal{A}_\alpha = \{A_\alpha\}$ per ogni $\alpha \rightsquigarrow$ si torna alla definizione precedente

Eventi Indipendenti

- Esempio. Lancio di n dadi, $D_{i,j}$ = “il risultato del j -esimo dado è i ”, $i = 1, \dots, 6$, $j = 1, \dots, n$; le partizioni

$$\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n$$

con $\mathbb{P}_j = \{D_{1,j}, \dots, D_{6,j}\}$, sono indipendenti

- Esempio. Ripetuti lanci di due dadi; al lancio n -esimo, A_n = “la somma dei dadi è 7”, B_n = “il massimo dei dadi è 5”

$$\mathcal{A}_n = \{A_n, B_n\}, n \geq 1$$

sono indipendenti

Eventi Indipendenti

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità; $(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in I}$, con $\mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{F}$ per ogni $\alpha \in I$ ($\mathcal{A}_\alpha$ sono insiemi di eventi), **indipendenti**
 - ▶ [**“Estensione”**] se ogni $\mathcal{A}_\alpha$ è chiuso rispetto a intersezioni finite, allora $(\sigma(\mathcal{A}_\alpha))_{\alpha \in I}$ sono indipendenti
 - ▶ [**“Impacchettamento”**] se $(I_\beta)_{\beta \in J}$ è una partizione di I , allora le σ -algebre

$$\mathcal{F}_\beta = \sigma\left(\bigcup_{\alpha \in I_\beta} \mathcal{A}_\alpha\right), \beta \in J$$

sono indipendenti

- ▶ si può estendere l'indipendenza agli eventi in σ -algebre generate e impacchettare insiemi indipendenti per ottenere nuovi insiemi indipendenti

Eventi Indipendenti

- Esercizio. Infiniti lanci di una moneta:

$$\Omega = \{(L_1 L_2 \dots L_n \dots) \mid L_i = T \text{ o } L_i = C\}$$

E_n = “esce T al lancio n ”, $\mathcal{F} = \sigma(\{E_1, \dots, E_n, \dots\})$, $(E_n)_n$ indipendenti, $P(E_n) = 1/2$ per ogni n (moneta equa);
calcolare

- ▶ $P(E'_1 \cap \dots \cap E'_n)$ per ogni scelta di $E'_i = E_i$ o $E'_i = \bar{E}_i$
- ▶ $P(\{\omega\})$ per ogni $\omega \in \Omega$
- ▶ $P(\text{“T appare prima o poi”})$
- ▶ $P(\text{“una data sequenza di T e C di fissata lunghezza } k \text{ appare prima o poi”})$