

Esercitazione n.1 di Analisi Matematica

Nome Cognome

1 dicembre 2017

Mostriamo nel seguito alcune formule, ambienti e tabelle

1 FUNZIONI LIPSCHITZIANE

Iniziamo con una definizione.

Definizione 1. Una funzione $\mathfrak{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ si dice *Lipschitziana* su Ω se \exists una costante $K \geq 0$ tale che:

$$\frac{\|\mathfrak{F}(\mathbf{x}) - \mathfrak{F}(\mathbf{y})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \leq K \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega \quad (1.1)$$

La relazione 1.1 della definizione 1 descrive in termini analitici la seguente idea: una funzione Lipschitziana è una funzione di variabile reale che ha una crescita *limitata*, nel senso che il rapporto tra variazione di ordinata e variazione di ascissa non può mai superare un valore fissato, detto *costante di Lipschitz* [1].

Nell'esempio appena visto abbiamo introdotto l'ambiente `\begin{definition}` e quello `\begin{equation}` ciascuno con la propria etichetta `\label{nome_etichetta}` che può essere richiamata in ogni momento, e numerata correttamente in modo automatico. Vediamo ora altri esempi di composizione di formule più o meno complesse.

Con l'ambiente `\begin{align}` si allineano i simboli di uguaglianza $=$, usando il carattere $\&$:

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (x+y)^2(x+y) \\ &= (x^2 + 2xy + y^2)(x+y) \\ &= (x^3 + 2x^2y + xy^2) + (x^2y + 2xy^2 + y^3) \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\end{aligned}\tag{1.2}$$

Col doppio dollaro $\$$ si identifica un ambiente matematico centrato sulla pagina: 1.2

Siano f e g due funzioni continue a supporto compatto su \mathbb{R}^1 . Si può definire la loro distanza nel seguente modo

$$\Delta(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - g(t)| dt$$

Nella prossima formula si osservino i comandi `\left|` `\right|` che ampliano i simboli `|` e `||` fino all'altezza del segno di sommatoria:

L'insieme $S[a, b]$ delle possibili partizioni dell'intervallo $[a, b]$ costituisce uno spazio vettoriale normato, con norma data da:

$$\left\| \sum_{i=1}^n c_i \chi_i(x) \right\|_{\infty} = \sup_{x \in [a, b]} \left| \sum_{i=1}^n c_i \chi_i(x) \right| = \max_{i=1, 2, \dots, n} |c_i| \quad c_i \in \mathbb{R}$$

1.1 ESEMPI VARI

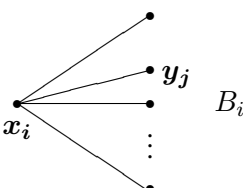
In questo caso si realizza una corrispondenza biunivoca tra ingresso e uscita. Se $|\mathcal{X}| = |\mathcal{Y}| = m$, a ciascun x_i corrisponde deterministicamente un y_i . La matrice Γ è identica, e per quanto attiene alle probabilità condizionate si ha

$$p(y_j/x_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

da cui si ottiene $p(y_j) = \sum_i p(x_i)p(y_j/x_i) = p(x_j)$ e anche

$$p(x_i/y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} = \frac{p(x_i)p(y_j/x_i)}{p(y_j)} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Un canale è senza perdite se l'ingresso X è completamente determinato dall'uscita Y . Più precisamente sia $|\mathcal{X}| = m$ e $|\mathcal{Y}| = s > m$; qualunque sia la distribuzione di probabilità d'ingresso, esiste una partizione B_1, B_2, \dots, B_m di \mathcal{Y} ($B_i \cap B_j = \emptyset$ se $i \neq j$) tale che

$$p(x_i/y_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } y_j \in B_i \\ 0 & \text{se } y_j \notin B_i \end{cases}$$


Esempio 1. Vediamo ora il canale simmetrico q -ario, dove $s = m = q$. La matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 - \epsilon & \frac{\epsilon}{q-1} & \frac{\epsilon}{q-1} & \cdots & \frac{\epsilon}{q-1} \\ \frac{\epsilon}{q-1} & 1 - \epsilon & \frac{\epsilon}{q-1} & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ \frac{\epsilon}{q-1} & \cdots & \cdots & \cdots & 1 - \epsilon \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

e la capacità risulta pari a

$$C = \log q + (1 - \epsilon) \log(1 - \epsilon) + \epsilon \log \frac{\epsilon}{q-1} \quad (1.4)$$

Esprimendo i logaritmi in base q possiamo scrivere

$$C = 1 - H_q(\epsilon) \quad (1.5)$$

dove

$$\begin{aligned} H_q(\epsilon) &= -\epsilon \log_q \epsilon - (1 - \epsilon) \log_q(1 - \epsilon) + \epsilon \log_q(q-1) \\ &= h_q(\epsilon) + \epsilon \log_q(q-1) \end{aligned} \quad (1.6)$$

è la cosiddetta *Entropia q -aria*. Nella figura 1.1 è rappresentato l'andamento della funzione che ha un minimo (zero) in corrispondenza dell'ascissa $\epsilon = \frac{q-1}{q}$. Solitamente si suppone che sia sempre $\epsilon \leq \frac{q-1}{q}$. Quando $q = 2$ ci si riduce al caso precedente e la curva diventa simmetrica rispetto a $\epsilon = 1/2$.

Ecco un esempio di come costruire un diagramma, ricorrendo all'ambiente `\begin{picture}`

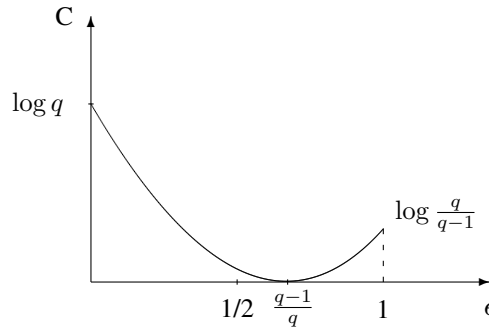


Figura 1.1: Diagramma della capacità di un canale simmetrico q -ario.

L'ultima disuguaglianza della catena precedente comporta la seguente verifica

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k h(P_{e/i}) \leq h(P_e) = h\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k P_{e/i}\right)$$

che può essere fatta agevolmente ricorrendo alla *disuguaglianza della somma logaritmica*; si ha infatti

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k h(P_{e/i}) &= -\frac{1}{k} \left[\sum_{i=1}^k P_{e/i} \log P_{e/i} + (1 - P_{e/i}) \log(1 - P_{e/i}) \right] \leq \\ &\leq -\left[\frac{\sum_{i=1}^k (P_{e/i})}{k} \log \frac{\sum_{i=1}^k (P_{e/i})}{k} + \frac{\sum_{i=1}^k (1 - P_{e/i})}{k} \log \frac{\sum_{i=1}^k (1 - P_{e/i})}{k} \right] = \\ &= -P_e \log P_e - (1 - P_e) \log(1 - P_e) = h(P_e) \end{aligned}$$

Riprendendo ora la (1.3) si ottiene

$$\begin{aligned} h(P_e) + P_e \log(q - 1) &\geq \frac{1}{k} H(\mathbf{U}^k / \mathbf{V}^k) = \frac{H(\mathbf{U}^k)}{k} - \frac{I(\mathbf{U}^k \wedge \mathbf{V}^k)}{k} \geq \\ &\geq H_k(U) - \frac{I(\mathbf{X}^n \wedge \mathbf{Y}^n)}{k} \geq H_k(U) - \frac{n}{k} C \geq H_\infty(U) - \frac{n}{k} C \end{aligned}$$

Questa è una semplice matrice 2 * 2:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Questa è una semplice tabella:

La tabella 1.1 mostra i primi valori delle due funzioni fino a $r = 10$.

r	$2^r - 1$	$\Psi(r)$	$\lambda(r)$
1	1	2	1
2	3	1	1
3	7	2	2
4	15	3	2
5	31	6	6
6	63	9	6
7	127	18	18
8	255	30	16
9	511	56	48
10	1023	99	60

Tabella 1.1: Numero di polinomi irriducibili e primitivi per $r \leq 10$.

Qua si usano gli ambienti `\begin{description}` e `\begin{enumerate}`

Algoritmo di Massey-Berlekamp. Sia $a_0 a_1 \dots a_{N-1}$ la sequenza finita di lunghezza N che si deve analizzare, n la posizione del bit corrente e L il valore corrente della complessità lineare. Poniamo inoltre $f(x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_L x^L$

1. $f(x) := 1$ $q(x) := 1$ $m := 1$ $L := 0$ $n := 0$

2. **if** $n = N$ **stop** **else** compute

$$\delta = a_n + \sum_{i=1}^L c_i a_{n-i}$$

3. **if** $\delta = 0$ **then** $m := m + 1$ and go to 6.

4. **if** $\delta \neq 0$ and $2L > n$ **then**

$$f(x) := f(x) + x^m q(x) \quad m := m + 1 \quad \text{and go to 6.}$$

5. **if** $\delta \neq 0$ and $2L \leq n$ **then**

$$t(x) := f(x)$$

$$f(x) := f(x) + x^m q(x)$$

$$L := n + 1 - L \quad q(x) := t(x) \quad m := 1$$

6. $n := n + 1$ and return to 2.

La tabella 1.2 mostra il risultato dell'applicazione dell'algoritmo alla sequenza 101001; nella colonna *RLSR* si vede la struttura corrente del registro mentre nella colonna *L* si può valutare il profilo della complessità lineare.

Questa è una tabella mista che contiene anche dei disegni, realizzati nell'ambiente `\begin{picture}`:








n	L	$f(x)$	$RLSR$	m	$q(x)$	a_n	δ
0	0	1		1	1	1	1
1	1	$1 + x$		1	1	0	1
2	1	1		2	1	1	1
3	2	$1 + x^2$		1	1	0	0
4	2	$1 + x^2$		2	1	0	1
5	3	1		1	$1 + x^2$	1	1
6	3	$1 + x + x^3$		2	$1 + x^2$		

Tabella 1.2: Esempio d'applicazione dell'algoritmo di Massey-Berlekamp.

Ecco come si può realizzare una parentesi graffa sinistra, che abbracci un intero blocco nell'ambiente matematico:

$$x = \begin{cases} 7 \cdot 261 + 5 \cdot 117 & \equiv 150 & \text{mod } 377 \\ 7 \cdot 261 + 25 \cdot 117 & \equiv 228 & \text{mod } 377 \\ 8 \cdot 261 + 5 \cdot 117 & \equiv 34 & \text{mod } 377 \\ 8 \cdot 261 + 25 \cdot 117 & \equiv 112 & \text{mod } 377 \end{cases},$$

oppure una parentesi graffa orizzontale:

$$\overbrace{**\dots*}^{n_1} | \overbrace{**\dots*}^{n_2} | \dots | \overbrace{**\dots*}^{n_K}$$

Questo è una costruzione con ambiente `\begin{tabular}` controllato dall'ambiente `\begin{picture}`

R_0	R_1	R_2	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	...
10	0	10	0	01	1	1	1	...
010	110		001			01	01	...
1			101					
1110			11					
$\mathcal{W}_1 \longrightarrow \text{non u.d.}$			$\mathcal{W}_2 \longrightarrow \text{u.d.}$					

R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
0	3	41	34	1	04	4	\emptyset
2	11	234			1234		
03							
011							
104							
341							
11234							
$\mathcal{W}_3 \longrightarrow \text{u.d.}$							

Nel seguito iniziamo una sottosottosezione:

1.1.1 TITOLO DI SOTTOSOTTOSEZIONE (SUBSUBSECTION)

C'è ancora il livello di paragrafo

TITOLO DI UN PARAGRAFO Vediamo ora alcuni esempi di liste:

2 MODI DI COSTRUIRE LISTE

2.1 ESEMPI DI LISTE

Ecco il primo esempio di costruzione di una lista, che fa uso di `\begin{itemize}`

- First item in a list
 - First item in a list
 - * First item in a list
 - * Second item in a list
 - Second item in a list
- Second item in a list

Questo invece fa uso dell'ambiente `\begin{enumerate}`

1. First item in a list
2. Second item in a list
3. Third item in a list

Esempio di disegno composto nell'ambiente `\begin{picture}`

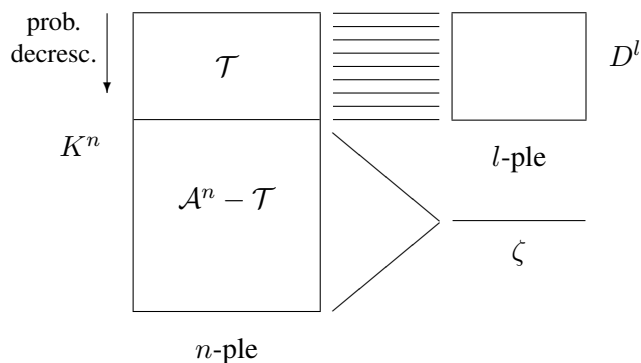
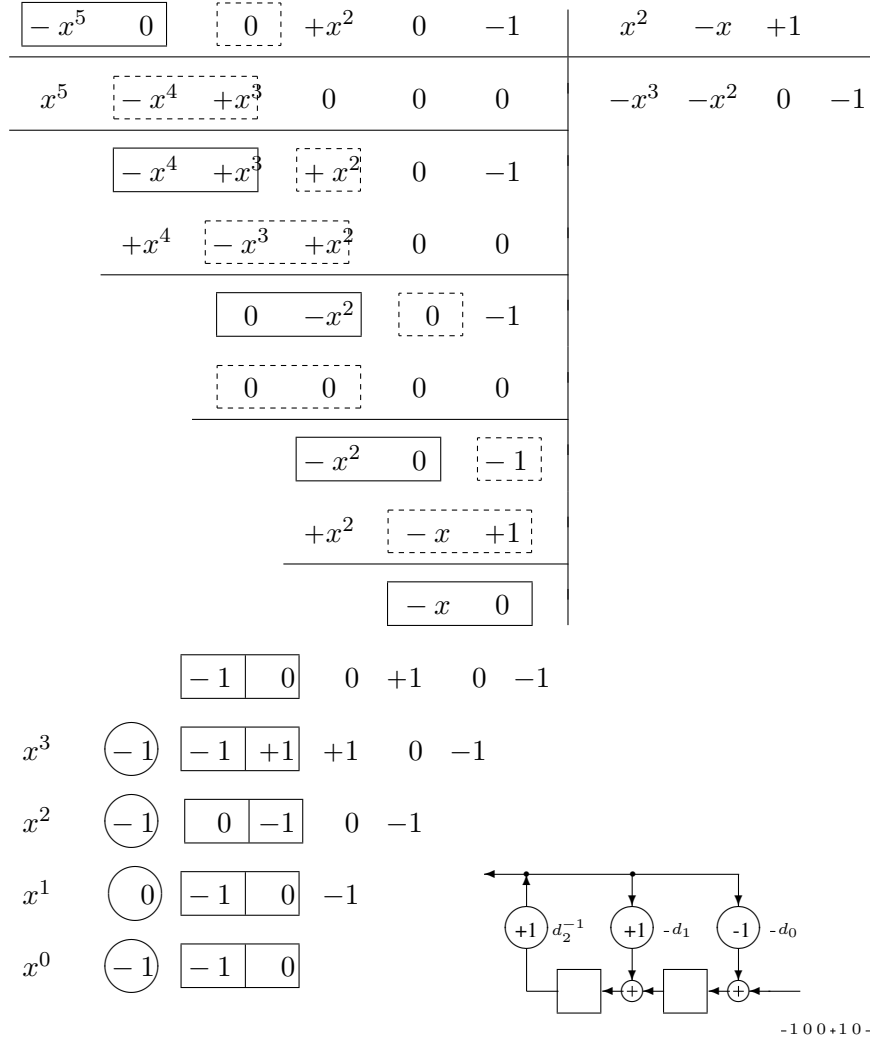


Figura 2.1: Insiemi implicati nella codifica B - B .

Ora riempiamo lo spazio rimasto prima della fine pagina con un po' di testo:

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Usando l'ambiente `\begin{array}` si possono realizzare strutture anche molto complesse di tipo misto; ecco una bella divisione tra polinomi:



Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Ecco nel seguito una tabella grande:

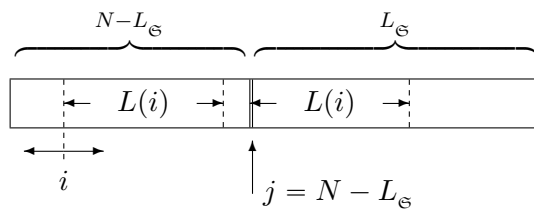
La struttura completa di $GF(16)$ è riportata in tabella 2.1. Quisque ullamcorper placerat ipsum.

Elementi di $GF(2^4)$				
Come potenza di α	ordine	Radice di	Come 4-pla su $GF(2)$	Come polinomio in α su $GF(2)$
0	—	x	0000	0
1	1	$x + 1$	0001	1
α	15	$x^4 + x + 1$	0010	α
α^2	15	$x^4 + x + 1$	0100	α^2
α^3	5	$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$	1000	α^3
α^4	15	$x^4 + x + 1$	0011	$\alpha + 1$
α^5	3	$x^2 + x + 1$	0110	$\alpha^2 + \alpha$
α^6	5	$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$	1100	$\alpha^3 + \alpha^2$
α^7	15	$x^4 + x^3 + x + 1$	1011	$\alpha^3 + \alpha + 1$
α^8	15	$x^4 + x + 1$	0101	$\alpha^2 + 1$
α^9	5	$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$	1010	$\alpha^3 + \alpha$
α^{10}	3	$x^2 + x + 1$	0111	$\alpha^2 + \alpha + 1$
α^{11}	15	$x^4 + x^3 + x + 1$	1110	$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha$
α^{12}	5	$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$	1111	$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$
α^{13}	15	$x^4 + x^3 + x + 1$	1101	$\alpha^3 + \alpha^2 + 1$
α^{14}	15	$x^4 + x^3 + x + 1$	1001	$\alpha^3 + 1$

Tabella 2.1: Struttura del campo $GF(2^4)$.

Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Esempio di disegno semplice con testo interno:



Esempio di disegno misto:

Esempio 2. Consideriamo la finestra di lunghezza 8 contenente la stringa $\Theta = 001|01011$ con $j = 3$.

$i = 1$	$L(1) = 1$	<div style="display: inline-block; text-align: center;">↓ 0</div>	0	1	<div style="display: inline-block; text-align: center;">0</div>	1	0	1	1
$i = 2$	$L(2) = 4$	0	<div style="display: inline-block; text-align: center;">↓ 0</div>	1	<div style="display: inline-block; text-align: center;">0</div>	1	0	1	1
$i = 3$	$L(3) = 0$	0	0	<div style="display: inline-block; text-align: center;">↓ 1</div>	<div style="display: inline-block; text-align: center;">0</div>	1	0	1	1

Per $i = 1$ si ha $L(1) = 1$, mentre per $i = 3$ la lunghezza massima è nulla (le due stringhe sono diverse fin dall'inizio). Il risultato migliore lo si ha per $i = 2$, dove si ricava $L(2) = 4$. $\mathfrak{S}(3+1, 3+4) = 0101$ è allora l'estensione riproducibile di $\mathfrak{S}(1, 3) = 001$ in \mathfrak{S} con $p = 2$ e $L(p) = L(2) = 4$. Posizionandoci allora su $j = 3+1 = 4$ possiamo ricavare le successive $L(2) = 4$ lettere conoscendo la posizione $p = 2$.

Esempio di disegno articolato:

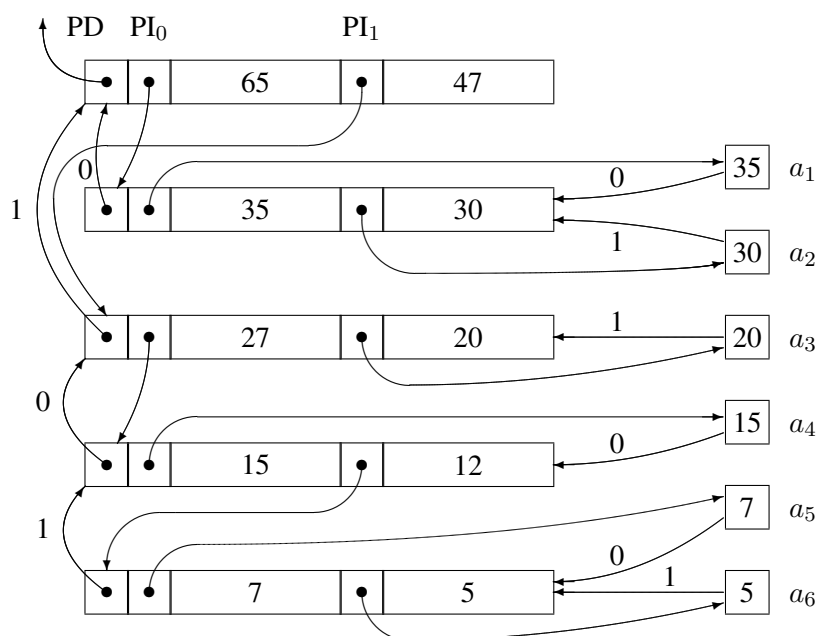


Figura 2.2: Struttura dati per l'aggiornamento adattativo dell'albero di codice.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] E. Giusti. Analisi matematica: 1, *Bollati Boringhieri*, Torino, 2003.