Progetto Fondamenti d'Informatica

Giacomo Visintin [IN0501262]

Anno Accademico 2022-2023

Indice

1 Identificazione della funzione Booleana

Per trovare la funzione Booleana associata al numero di matricola IN0501262 estraggo dallo stesso la parte numerica, cioè 0501262, ed effettuo la divisione di questo numero per $2^{2^4} = 65536$. Il resto di tale divisione, codificato in binario, rappresenta la stringa di 16 bit che verrà usata per generare la funzione Booleana.

$$0501262 = 7 * 65536 + 42510$$

Resto = **42510**

1.1 Codifica binaria del resto

Effettuo ora la conversione in base 2. Costruisco la seguente tabella, nella quale compio successive divisioni per 2 e riporto a destra il resto di tali divisioni:

42510	**0**
21255	**1**
10627	**1**
5313	**1**
2656	**0**
1328	**0**
664	**0**
332	**0**
166	**0**
83	**1**
41	**1**
20	**0**
10	**0**
5	**1**
2	**0**
1	**1**
0	-

Leggendo i resti dal basso verso l'alto si ottiene la seguente stringa:

1 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 1 1 0

che corrisponde alla rappresentato in base 2 del numero 42510

1.2 Funzione associata al resto

Dalla stringa binaria associata al resto ricavo la seguente funzione booleana a 4 variabili(x, y, z, w)

x	y	z	w	$\boldsymbol{f(x,y,z,w)}$
0	0	0	0	**1**
0	0	0	1	**0**
0	0	1	0	**1**
0	0	1	1	**0**
0	1	0	0	**0**
0	1	0	1	**1**
0	1	1	0	**1**
0	1	1	1	**0**
1	0	0	0	**0**
1	0	0	1	**0**
1	0	1	0	**0**
1	0	1	1	**0**
1	1	0	0	**1**
1	1	0	1	**1**
1	1	1	0	**1**
1	1	1	1	**0**

1.3 Codifica *minterm*

Nella seguente tabella si osservano evidenziati i termini minimi della funzione booleana:

		x	y	z	w	$\boldsymbol{f(x,y,z,w)}$
$\boldsymbol{m_0}$	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w}$	0	0	0	0	**1**
m_1	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,w$	0	0	0	1	0
$\boldsymbol{m_2}$	$\overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{w}$	0	0	1	0	**1**
m_3	$\overline{x}\,\overline{y}\,z\,w$	0	0	1	1	0
m_4	$\overline{x}\,y\,\overline{z}\,\overline{w}$	0	1	0	0	0
$\boldsymbol{m_5}$	$\overline{x}\,y\,\overline{z}\,w$	0	1	0	1	**1**
$\boldsymbol{m_6}$	$\overline{x}\,y\,z\,\overline{w}$	0	1	1	0	**1**
m_7	$\overline{x}\,y\,z\,w$	0	1	1	1	0
m_8	$x\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w}$	1	0	0	0	0
m_9	$x\,\overline{y}\,\overline{z}\,w$	1	0	0	1	0
m_{10}	$x\,\overline{y}\,z\,\overline{w}$	1	0	1	0	0
m_{11}	$x\,\overline{y}\,z\,w$	1	0	1	1	0
$\boldsymbol{m_{12}}$	$x\,y\,\overline{z}\,\overline{w}$	1	1	0	0	**1**
$\boldsymbol{m_{13}}$	$x\,y\,\overline{z}\,w$	1	1	0	1	**1**
$\boldsymbol{m_{14}}$	$x\,y\,z\,\overline{w}$	1	1	1	0	**1**
m_{15}	$x\,y\,z\,w$	1	1	1	1	0

Prendendo ora le combinazioni di (x, y, z, w) ove la funzione assume valore **1** posso esprimere la funzione come somma di prodotti, ovvero:

$$\boldsymbol{f(x,y,z,w)} = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} + \overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{w} + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,w + \overline{x}\,y\,z\,\overline{w} + x\,y\,\overline{z}\,\overline{w} + x\,y\,\overline{z}\,w + x\,y\,z\,\overline{w}$$

1.4 Codifica *maxterm*

Nella seguente tabella si osservano evidenziati i termini massimi della funzione booleana:

		x	y	z	w	$\boldsymbol{f(x,y,z,w)}$
M_0	$x+y+z+w$	0	0	0	0	1
$\boldsymbol{M_1}$	$x+y+z+\overline{w}$	0	0	0	1	**0**
M_2	$x+y+\overline{z}+w$	0	0	1	0	1
$\boldsymbol{M_3}$	$x+y+\overline{z}+\overline{w}$	0	0	1	1	**0**
$\boldsymbol{M_4}$	$x+\overline{y}+z+w$	0	1	0	0	**0**
M_5	$x+\overline{y}+z+\overline{w}$	0	1	0	1	1
M_6	$x+\overline{y}+\overline{z}+w$	0	1	1	0	1
$\boldsymbol{M_7}$	$x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}$	0	1	1	1	**0**
$\boldsymbol{M_8}$	$\overline{x}+y+z+w$	1	0	0	0	**0**
$\boldsymbol{M_9}$	$\overline{x}+y+z+\overline{w}$	1	0	0	1	**0**
$\boldsymbol{M_{10}}$	$\overline{x}+y+\overline{z}+w$	1	0	1	0	**0**
$\boldsymbol{M_{11}}$	$\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{w}$	1	0	1	1	**0**
M_{12}	$\overline{x}+\overline{y}+z+w$	1	1	0	0	1
M_{13}	$\overline{x}+\overline{y}+z+\overline{w}$	1	1	0	1	1
M_{14}	$\overline{x}+\overline{z}+\overline{w}+w$	1	1	1	0	1
$\boldsymbol{M_{15}}$	$\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}$	1	1	1	1	**0**

Prendendo ora le combinazioni di (x, y, z, w) ove la funzione assume valore **0** posso esprimere la funzione come il prodotto di somme del tipo:

$$\boldsymbol{f(x,y,z,w)} = (x+y+z+\overline{w})\cdot(x+y+\overline{z}+\overline{w})\cdot(x+\overline{y}+z+w)\cdot(x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w})\cdot (\overline{x}+y+z+w)\cdot(\overline{x}+y+z+\overline{w})\cdot(\overline{x}+y+\overline{z}+w)\cdot(\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{w})\cdot(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w})$$

2 Semplificazione algebrica della funzione

2.1 Semplificazione algebrica minterm

Eseguo ora la semplificazione della forma canonica della funzione espressa dai minterm. I termini racchiusi in un $\boxed{\text{box azzurro}}$ saranno coloro ai quali verrà applicato il Teorema o l'Assioma evidenziato in rosso nella riga successiva(sopra il simbolo d'uguale). Il risultato di tale applicazione è evidenziato in **azzurro**.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f(x,y,z,w)} &= \boxed{\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w}} + \boxed{\overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{w}} + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,w + \overline{x}\,y\,z\,\overline{w} + x\,y\,\overline{z}\,\overline{w} + x\,y\,\overline{z}\,w + x\,y\,z\,\overline{w} = \\
&\overset{A6}{=} \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w}\,\boxed{(\overline{z}+z)} + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,w + \overline{x}\,y\,z\,\overline{w} + x\,y\,\overline{z}\,\overline{w} + x\,y\,\overline{z}\,w + x\,y\,z\,\overline{w} = \\
&\overset{A7}{=} \boxed{\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w}\cdot 1} + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,w + \overline{x}\,y\,z\,\overline{w} + x\,y\,\overline{z}\,\overline{w} + x\,y\,\overline{z}\,w + x\,y\,z\,\overline{w} = \\
&\overset{A3}{=} \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + \boxed{\overline{x}\,y\,\overline{z}\,w} + \overline{x}\,y\,z\,\overline{w} + x\,y\,\overline{z}\,\overline{w} + \boxed{x\,y\,\overline{z}\,w} + x\,y\,z\,\overline{w} = \\
&\overset{A6}{=} \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w\,\boxed{(\overline{x}+x)} + \overline{x}\,y\,z\,\overline{w} + x\,y\,\overline{z}\,\overline{w} + x\,y\,z\,\overline{w} = \\
&\overset{A7}{=} \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + \boxed{y\,\overline{z}\,w\cdot 1} + \overline{x}\,y\,z\,\overline{w} + x\,y\,\overline{z}\,\overline{w} + x\,y\,z\,\overline{w} = \\
&\overset{A3}{=} \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + \boxed{\overline{x}\,y\,z\,\overline{w}} + x\,y\,\overline{z}\,\overline{w} + \boxed{x\,y\,z\,\overline{w}} = \\
&\overset{A6}{=} \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + y\,z\,\overline{w}\,\boxed{(\overline{x}+x)} + x\,y\,\overline{z}\,\overline{w} = \\
&\overset{A7}{=} \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + \boxed{y\,z\,\overline{w}\cdot 1} + x\,y\,\overline{z}\,\overline{w} = \\
&\overset{A3}{=} \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + \boxed{y\,z\,\overline{w}} + \boxed{x\,y\,\overline{z}\,\overline{w}} = \\
&\overset{A6}{=} \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + y\,\overline{w}\,\boxed{(z+\overline{z}\,x)} = \\
&\overset{T5}{=} \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + \boxed{y\,\overline{w}\,(z+x)} = \\
&\overset{A6}{=} \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + y\,z\,\overline{w} + x\,y\,\overline{w}
\end{aligned}
$$

Ottengo infine la funzione semplificata:

$\boldsymbol{f(x,y,z,w)} = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + y\,z\,\overline{w} + x\,y\,\overline{w}$

2.2 Semplificazione algebrica maxterm

Eseguo ora la semplificazione della funzione partendo dall'espressione dei maxterm. I termini racchiusi in un $\boxed{\text{box arancione}}$ saranno coloro ai quali verrà applicato il Teorema o l'Assioma evidenziato in rosso nella riga successiva(sopra il simbolo d'uguale). Il risultato di tale applicazione è evidenziato in **arancione**.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f(x,y,z,w)} = {} & \boxed{(x+y+z+\overline{w})} \cdot \boxed{(x+y+\overline{z}+\overline{w})} \cdot (x+\overline{y}+z+w) \cdot (x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (\overline{x}+y+z+w) \\ & \cdot (\overline{x}+y+z+\overline{w}) \cdot (\overline{x}+y+\overline{z}+w) \cdot (\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{A6}{=} {} & [(x+y+\overline{w})+\boxed{(z \cdot \overline{z})}\,] \cdot (x+\overline{y}+z+w) \cdot (x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (\overline{x}+y+z+w) \cdot (\overline{x}+y+z+\overline{w}) \cdot \\ & (\overline{x}+y+\overline{z}+w) \cdot (\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{A7}{=} {} & \boxed{[(x+y+\overline{w})+0]} \cdot (x+\overline{y}+z+w) \cdot (x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (\overline{x}+y+z+w) \cdot (\overline{x}+y+z+\overline{w}) \cdot \\ & (\overline{x}+y+\overline{z}+w) \cdot (\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{A3}{=} {} & (x+y+\overline{w}) \cdot (x+\overline{y}+z+w) \cdot (x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) \cdot \boxed{(\overline{x}+y+z+w)} \cdot \boxed{(\overline{x}+y+z+\overline{w})} \cdot \\ & (\overline{x}+y+\overline{z}+w) \cdot (\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{A6}{=} {} & (x+y+\overline{w}) \cdot (x+\overline{y}+z+w) \cdot (x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) \cdot [(\overline{x}+y+z)+\boxed{(w \cdot \overline{w})}\,] \cdot (\overline{x}+y+\overline{z}+w) \cdot \\ & (\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{A7}{=} {} & (x+y+\overline{w}) \cdot (x+\overline{y}+z+w) \cdot (x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) \cdot \boxed{[(\overline{x}+y+z)+0]} \cdot (\overline{x}+y+\overline{z}+w) \cdot \\ & (\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{A3}{=} {} & (x+y+\overline{w}) \cdot (x+\overline{y}+z+w) \cdot \boxed{(x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w})} \cdot (\overline{x}+y+z) \cdot (\overline{x}+y+\overline{z}+w) \cdot \\ & (\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{w}) \cdot \boxed{(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w})} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{A6}{=} {} & (x+y+\overline{w}) \cdot (x+\overline{y}+z+w) \cdot [(\overline{y}+\overline{z}+\overline{w})+\boxed{(x \cdot \overline{x})}\,] \cdot (\overline{x}+y+z) \cdot (\overline{x}+y+\overline{z}+w) \cdot \\ & (\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{w}) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{A7}{=} {} & (x+y+\overline{w}) \cdot (x+\overline{y}+z+w) \cdot \boxed{[(\overline{y}+\overline{z}+\overline{w})+0]} \cdot (\overline{x}+y+z) \cdot (\overline{x}+y+\overline{z}+w) \cdot \\ & (\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{w}) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{A3}{=} {} & (x+y+\overline{w}) \cdot (x+\overline{y}+z+w) \cdot (\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (\overline{x}+y+z) \cdot \boxed{(\overline{x}+y+\overline{z}+w)} \cdot \\ & \boxed{(\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{w})} =\end{aligned}$$

$$\overset{A6}{=} (x+y+\overline{w}) \cdot (x+\overline{y}+z+w) \cdot (\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (\overline{x}+y+z) \cdot [(\overline{x}+y+\overline{z})+\boxed{(w \cdot \overline{w})}\,] =$$

$$\overset{A7}{=} (x+y+\overline{w}) \cdot (x+\overline{y}+z+w) \cdot (\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (\overline{x}+y+z) \cdot \boxed{[(\overline{x}+y+\overline{z})+\mathbf{0}]} =$$

$$\overset{A3}{=} (x+y+\overline{w}) \cdot (x+\overline{y}+z+w) \cdot (\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) \cdot \boxed{(\overline{x}+y+z)} \cdot \boxed{(\overline{x}+y+\overline{z})} =$$

$$\overset{A6}{=} (x+y+\overline{w}) \cdot (x+\overline{y}+z+w) \cdot (\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) \cdot [(\overline{x}+y)+\boxed{(z \cdot \overline{z})}] =$$

$$\overset{A7}{=} (x+y+\overline{w}) \cdot (x+\overline{y}+z+w) \cdot (\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) \cdot \boxed{[(\overline{x}+y)+\mathbf{0}]} =$$

$$\overset{A3}{=} \boxed{(x+y+\overline{w})} \cdot (x+\overline{y}+z+w) \cdot (\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) \cdot \boxed{(\overline{x}+y)} =$$

$$\overset{A6}{=} \{y+\boxed{[\overline{x} \cdot (x+\overline{w})]}\} \cdot (x+\overline{y}+z+w) \cdot (\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) =$$

$$\overset{T5}{=} \boxed{[y+(\overline{x} \cdot \overline{w})]} \cdot (x+\overline{y}+z+w) \cdot (\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) =$$

$$\overset{A6}{=} (\overline{x}+y) \cdot \boxed{(y+\overline{w})} \cdot (x+\overline{y}+z+w) \cdot \boxed{(\overline{y}+\overline{z}+\overline{w})} =$$

$$\overset{A6}{=} (\overline{x}+y) \cdot \{\overline{w}+\boxed{[y \cdot (\overline{y}+\overline{z})]}\} \cdot (x+\overline{y}+z+w) =$$

$$\overset{T5}{=} (\overline{x}+y) \cdot \boxed{[\overline{w}+(y \cdot \overline{z})]} \cdot (x+\overline{y}+z+w) =$$

$$\overset{A6}{=} (\overline{x}+y) \cdot (y+\overline{w}) \cdot (\overline{z}+\overline{w}) \cdot (x+\overline{y}+z+w) =$$

Ottengo infine la funzione semplificata:

$\boldsymbol{f(x,y,z,w)} = (\overline{x}+y) \cdot (y+\overline{w}) \cdot (\overline{z}+\overline{w}) \cdot (x+\overline{y}+z+w)$

2.3 Verifica dell'uguaglianza delle due espressioni semplificate

Verifico, con l'utilizzo di assiomi e teoremi, che partendo dall'espressione semplificata dei maxterm posso giungere all'espressione semplificata dei minterm. I termini racchiusi in un $\boxed{\text{box verde}}$ saranno coloro ai quali verrà applicato il Teorema o l'Assioma evidenziato in rosso nella riga successiva(sopra il simbolo d'uguale). Il risultato di tale applicazione è evidenziato in **verde**.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f(x,y,z,w)} &= \boxed{(\overline{x}+y)} \cdot \boxed{(y+\overline{w})} \cdot (\overline{z}+\overline{w}) \cdot (x+\overline{y}+z+w) = \\
&\overset{A6}{=} (y\,\overline{w} + \overline{x}\,\overline{w} + \boxed{y\,y} + \overline{x}\,y) \cdot (\overline{z}+\overline{w}) \cdot (x+\overline{y}+z+w) = \\
&\overset{T1}{=} \boxed{(y\,\overline{w} + \overline{x}\,\overline{w} + y + \overline{x}\,y)} \cdot \boxed{(\overline{z}+\overline{w})} \cdot (x+\overline{y}+z+w) = \\
&\overset{A6}{=} (\boxed{y\,\overline{w}\,\overline{w}} + \boxed{\overline{x}\,\overline{w}\,\overline{w}} + y\,\overline{w} + \overline{x}\,y\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,\overline{w} + \overline{x}\,\overline{z}\,\overline{w} + y\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,\overline{z}) \cdot (x+\overline{y}+z+w) = \\
&\overset{T1}{=} (\boxed{y\,\overline{w}} + \overline{x}\,\overline{w} + \boxed{y\,\overline{w}} + \overline{x}\,y\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,\overline{w} + \overline{x}\,\overline{z}\,\overline{w} + y\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,\overline{z}) \cdot (x+\overline{y}+z+w) = \\
&\overset{T1}{=} \boxed{(y\,\overline{w} + \overline{x}\,\overline{w} + \overline{x}\,y\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,\overline{w} + \overline{x}\,\overline{z}\,\overline{w} + y\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,\overline{z})} \cdot \boxed{(x+\overline{y}+z+w)} = \\
&\overset{A6}{=} (x\,y\,\overline{w} + \boxed{\overline{x}\,x\,\overline{w}} + \boxed{\overline{x}\,x\,y\,\overline{w}} + x\,y\,\overline{z}\,\overline{w} + \boxed{\overline{x}\,x\,\overline{z}\,\overline{w}} + x\,y\,\overline{z} + \boxed{\overline{x}\,x\,y\,\overline{z}}) + \\
&\qquad (\boxed{y\,\overline{y}\,\overline{w}} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + \boxed{\overline{x}\,y\,\overline{y}\,\overline{w}} + \boxed{y\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w}} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} + \boxed{y\,\overline{y}\,\overline{z}} + \boxed{\overline{x}\,y\,\overline{y}\,\overline{z}}) + \\
&\qquad\quad (y\,z\,\overline{w} + \overline{x}\,z\,\overline{w} + \overline{x}\,y\,z\,\overline{w} + \boxed{y\,z\,\overline{z}\,\overline{w}} + \boxed{\overline{x}\,z\,\overline{z}\,\overline{w}} + \boxed{y\,z\,\overline{z}} + \boxed{\overline{x}\,y\,z\,\overline{z}}) + \\
&\qquad\qquad (\boxed{y\,w\,\overline{w}} + \boxed{\overline{x}\,w\,\overline{w}} + \boxed{\overline{x}\,y\,w\,\overline{w}} + \boxed{y\,\overline{z}\,w\,\overline{w}} + \boxed{\overline{x}\,\overline{z}\,w\,\overline{w}} + y\,\overline{z}\,w + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,w) = \\
&\overset{A7}{=} (\boxed{x\,y\,\overline{w} + 0 + 0 + x\,y\,\overline{z}\,\overline{w} + 0 + x\,y\,\overline{z} + 0}) + (\boxed{0 + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + 0 + 0 + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} + 0 + 0}) + \\
&\qquad (\boxed{y\,z\,\overline{w} + \overline{x}\,z\,\overline{w} + \overline{x}\,y\,z\,\overline{w} + 0 + 0 + 0 + 0}) + (\boxed{0 + 0 + 0 + 0 + 0 + y\,\overline{z}\,w + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,w}) = \\
&\overset{A3}{=} (\boxed{x\,y\,\overline{w}} + \boxed{x\,y\,\overline{z}\,\overline{w}} + x\,y\,\overline{z}) + (\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w}) + (y\,z\,\overline{w} + \overline{x}\,z\,\overline{w} + \overline{x}\,y\,z\,\overline{w}) \\
&\qquad (y\,\overline{z}\,w + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,w) = \\
&\overset{T4}{=} (x\,y\,\overline{w} + x\,y\,\overline{z}) + (\boxed{\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w}} + \boxed{\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w}}) + (y\,z\,\overline{w} + \overline{x}\,z\,\overline{w} + \overline{x}\,y\,z\,\overline{w}) + (y\,\overline{z}\,w + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,w) = \\
&\overset{T4}{=} (x\,y\,\overline{w} + x\,y\,\overline{z}) + (\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w}) + (y\,z\,\overline{w} + \boxed{\overline{x}\,z\,\overline{w}} + \boxed{\overline{x}\,y\,z\,\overline{w}}) + (y\,\overline{z}\,w + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,w) = \\
&\overset{T4}{=} (x\,y\,\overline{w} + x\,y\,\overline{z}) + (\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w}) + (y\,z\,\overline{w} + \overline{x}\,z\,\overline{w}) + (\boxed{y\,\overline{z}\,w} + \boxed{\overline{x}\,y\,\overline{z}\,w}) = \\
&\overset{T4}{=} \boxed{(x\,y\,\overline{w} + x\,y\,\overline{z}) + (\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w}) + (y\,z\,\overline{w} + \overline{x}\,z\,\overline{w}) + (y\,\overline{z}\,w)} = \\
&\overset{A5}{=} \boxed{x\,y\,\overline{w}} + \boxed{x\,y\,\overline{z}} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,z\,\overline{w} + \overline{x}\,z\,\overline{w} + \boxed{y\,\overline{z}\,w} =
\end{aligned}
$$

$$\overset{A6}{=} \boldsymbol{y}\,(\boxed{\boldsymbol{x\,\overline{w} + x\,\overline{z} + \overline{z}\,w}}) + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,z\,\overline{w} + \overline{x}\,z\,\overline{w} =$$

$$\overset{T6}{=} \boxed{y\,(\boldsymbol{x\,\overline{w} + \overline{z}\,w})} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,z\,\overline{w} + \overline{x}\,z\,\overline{w} =$$

$$\overset{A6}{=} \boldsymbol{x\,y\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w} + \boxed{\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w}} + \boxed{y\,z\,\overline{w}} + \boxed{\overline{x}\,z\,\overline{w}} =$$

$$\overset{A6}{=} x\,y\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + \boldsymbol{\overline{w}}\,(\boxed{\boldsymbol{\overline{x}\,\overline{y} + y\,z + \overline{x}\,z}}) =$$

$$\overset{T6}{=} x\,y\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + \overline{w}\,(\boldsymbol{\overline{x}\,\overline{y} + y\,z}) =$$

$$\overset{A6}{=} \boxed{x\,y\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + \boldsymbol{\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,z\,\overline{w}}} =$$

$$\overset{A5}{=} \boldsymbol{\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + y\,z\,\overline{w} + x\,y\,\overline{w}}$$

Ho dimostarto quindi che le espressione trovate precedentemente(minterm e maxterm) sono equivalenti:

$$\boldsymbol{f(x,y,z,w)} = (\overline{x}+y)\cdot(y+\overline{w})\cdot(\overline{z}+\overline{w})\cdot(x+\overline{y}+z+w) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w}+y\,\overline{z}\,w+y\,z\,\overline{w}+x\,y\,\overline{w}$$

3 Semplificazione con Mappa di Karnaugh

Procedo alla semplificazione della funzione attraverso la Mappa di Karnaugh. Per prima cosa evidenzio nella mappa tutte i sottocubi di dimensione massimale associati a ciascun 1. Verificherò successivamente quali tra essi sono indispensabili, nel senso che almeno uno degli 1 non ha altre possibili coperture.
Per costruire la mappa parto dall'espressione con i minterm della funzione:
$\boldsymbol{f(x,y,z,w)} = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} + \overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{w} + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,w + \overline{x}\,y\,z\,\overline{w} + x\,y\,\overline{z}\,\overline{w} + x\,y\,\overline{z}\,w + x\,y\,z\,\overline{w}$

xy \ zw	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	0	1
11	1	1	0	1
10	0	0	0	0

Osservando la mappa si può notare che sono presenti due implicanti indispensabili. Vediamo in dettaglio:

xy \ zw	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	0	1
11	1	1	0	1
10	0	0	0	0

I due implicanti evidenziati in **rosso** e **verde** sono gli unici che possono racchiudere i termini minimi $\mathbf{0}(\boldsymbol{\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w}})$ e $\mathbf{5}(\boldsymbol{\overline{x}\,y\,\overline{z}\,w})$, pertanto saranno presenti in ogni possibile semplificazione.

In particolare i due implicanti possono essere semplificati:

-Implicante rosso $\longrightarrow \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w}$ poiché sulla tabella rimangono costanti x, y, w, che vanno presi negati in quanto ci sono degli 0.

-Implicante verde $\longrightarrow y\,\overline{z}\,w$ ...

3.1 Possibili semplificazioni minime

- Semplificazione 1:

$xy \backslash zw$	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	0	1
11	1	1	0	1
10	0	0	0	0

Lasciando da parte i due implicanti indispensabili visti precedentemente, studio gli altri due:

-Implicante giallo $\longrightarrow x\,y\,\overline{w}$

-Implicante **azzurro** $\longrightarrow y\,z\,\overline{w}$

Pertanto ottengo la funzione semplificata:
$\boldsymbol{f(x,y,z,w)} = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + x\,y\,\overline{w} + y\,z\,\overline{w}$

Notare che questa espressione è uguale a quella trovata precedentemente nella semplificazione algebrica dei minterm.

- Semplificazione 2:

$xy \backslash zw$	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	0	1
11	1	1	0	1
10	0	0	0	0

Lasciando da parte i due implicanti indispensabili visti precedentemente, studio gli altri due:

-Implicante giallo (studiato nella semplificazione 1) $\longrightarrow x\, y\, \overline{w}$

-Implicante **azzurro** $\longrightarrow \overline{x}\, z\, \overline{w}$

Pertanto ottengo la funzione semplificata:
$\boldsymbol{f(x, y, z, w)} = \overline{x}\, \overline{y}\, \overline{w} + y\, \overline{z}\, w + x\, y\, \overline{w} + \overline{x}\, z\, \overline{w}$

- Semplificazione 3:

xy \ zw	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	0	1
11	1	1	0	1
10	0	0	0	0

Lasciando da parte i due implicanti indispensabili visti precedentemente, studio gli altri due:

-Implicante giallo $\longrightarrow x\, y\, \overline{z}$

-Implicante **azzurro** (studiato nella semplificazione 1) $\longrightarrow y\, z\, \overline{w}$

Pertanto ottengo la funzione semplificata:
$\boldsymbol{f(x, y, z, w)} = \overline{x}\, \overline{y}\, \overline{w} + y\, \overline{z}\, w + x\, y\, \overline{z} + y\, z\, \overline{w}$

4 Semplificazione mediante il metodo tabellare di Quine - McCluskey

Eseguo ora la semplificazione della funzione utilizzando il metodo di Quine - McCluskey. Parto riprendendo la tavola di verità espressa tramite minterm:

		x	y	z	w	f
0	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w}$	0	0	0	0	1
1	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,w$	0	0	0	1	0
2	$\overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{w}$	0	0	1	0	1
3	$\overline{x}\,\overline{y}\,z\,w$	0	0	1	1	0
4	$\overline{x}\,y\,\overline{z}\,\overline{w}$	0	1	0	0	0
5	$\overline{x}\,y\,\overline{z}\,w$	0	1	0	1	1
6	$\overline{x}\,y\,z\,\overline{w}$	0	1	1	0	1
7	$\overline{x}\,y\,z\,w$	0	1	1	1	0
8	$x\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w}$	1	0	0	0	0
9	$x\,\overline{y}\,\overline{z}\,w$	1	0	0	1	0
10	$x\,\overline{y}\,z\,\overline{w}$	1	0	1	0	0
11	$x\,\overline{y}\,z\,w$	1	0	1	1	0
12	$x\,y\,\overline{z}\,\overline{w}$	1	1	0	0	1
13	$x\,y\,\overline{z}\,w$	1	1	0	1	1
14	$x\,y\,z\,\overline{w}$	1	1	1	0	1
15	$x\,y\,z\,w$	1	1	1	1	0

Estraggo ora le n-ple corrispondenti ai *minterm* e le dispongo su vari livelli a seconda del loro peso, cioè del loro numero di 1. Per esempio sul Livello 2 si troveranno tutte quelle n-ple che hanno un numero di **1** pari a due; analogamente per tutti gli altri livelli.

Livello			x	y	z	w	f
0	0	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w}$	0	0	0	0	1
1	2	$\overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{w}$	0	0	1	0	1
2	5	$\overline{x}\,y\,\overline{z}\,w$	0	1	0	1	1
	6	$\overline{x}\,y\,z\,\overline{w}$	0	1	1	0	1
	12	$x\,y\,\overline{z}\,\overline{w}$	1	1	0	0	1
3	13	$x\,y\,\overline{z}\,w$	1	1	0	1	1
	14	$x\,y\,z\,\overline{w}$	1	1	1	0	1

Eliminiamo ora la descrizione delle variabili, che non serve per le semplificazioni:

Livello	Numero	n-pla corrispondente
0	0	0 0 0 0
1	2	0 0 1 0
2	5	0 1 0 1
	6	0 1 1 0
	12	1 1 0 0
3	13	1 1 0 1
	14	1 1 1 0

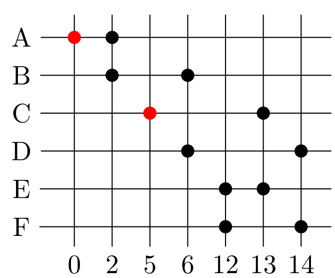
Passo ora alla semplificazione. Confronto le coppie di termini minimi su livelli diversi e adiacenti e raggruppo i termini che differiscono per un solo bit, contrassegnando quest'ultimo con (-). In questo caso tutti i termini minimi portano ad almeno una semplificazione, vediamo:

$0, 2$	0 0 - 0
$2, 6$	0 - 1 0
$5, 13$	- 1 0 1
$6, 14$	- 1 1 0
$12, 13$	1 1 0 -
$12, 14$	1 1 - 0

Si nota che non sono possibili ulteriori semplificazioni pertanto possiamo denominare le varie coppie e costruire il seguente reticolo:

A	$0, 2$	0 0 - 0
B	$2, 6$	0 - 1 0
C	$5, 13$	- 1 0 1
D	$6, 14$	- 1 1 0
E	$12, 13$	1 1 0 -
F	$12, 14$	1 1 - 0

$\longrightarrow$



Analizzando il reticolo si nota che i termini minimi 0 e 5 (*punti evidenziati in rosso*) sono coperti solamente da **A** e **C**, pertanto quest'ultimi saranno presenti in ogni possibile semplificazione. In particolare gli implicanti **A** e **C** ricoprono i termini minimi 0, 2, 5, 13, bisogna quindi trovare le minime combinazioni di **B**, **D**, **E**, **F** che racchiudano i termini minimi restanti ossia: 6, 12, 14. Ci sono varie possibilità:

- Possibilità 1: $\boldsymbol{f(x, y, z, w)} = A + C + D + F = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + y\,z\,\overline{w} + x\,y\,\overline{w}$

Questa stessa espressione è stata ottenuta anche mediante la *Semplificazione algebrica dei minterm* e nella *Semplificazione 1* tramite mappa di Karnaugh.

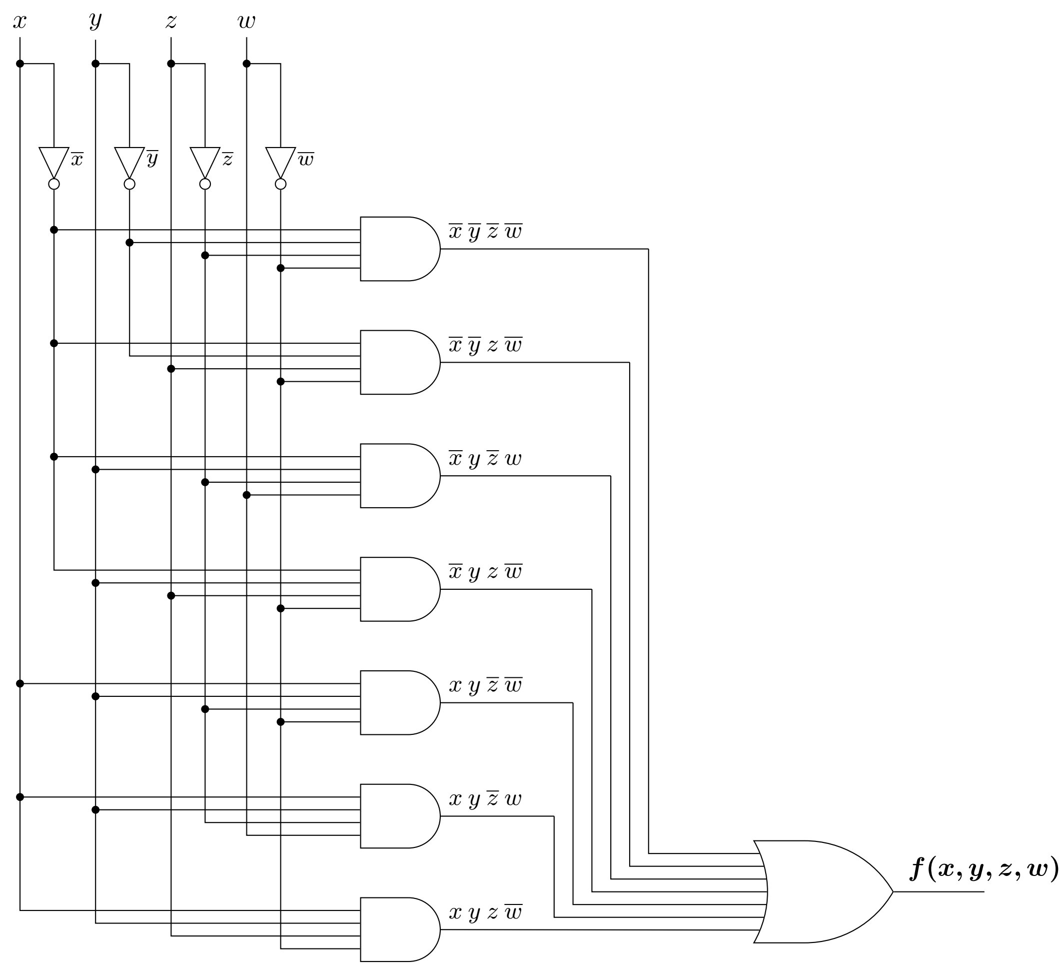
• Possibilità 2: $\boldsymbol{f(x,y,z,w)} = A + C + B + F = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + \overline{x}\,z\,\overline{w} + x\,y\,\overline{w}$
Questa espressione corrisponde a quella ottenuta con la *Semplificazione 2* della mappa di Karnaugh.

• Possibilità 3: $\boldsymbol{f(x,y,z,w)} = A + C + D + E = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + y\,z\,\overline{w} + x\,y\,\overline{z}$
Questa espressione corrisponde a quella ottenuta con la *Semplificazione 3* della mappa di Karnaugh.

5 Rappresentazione grafica

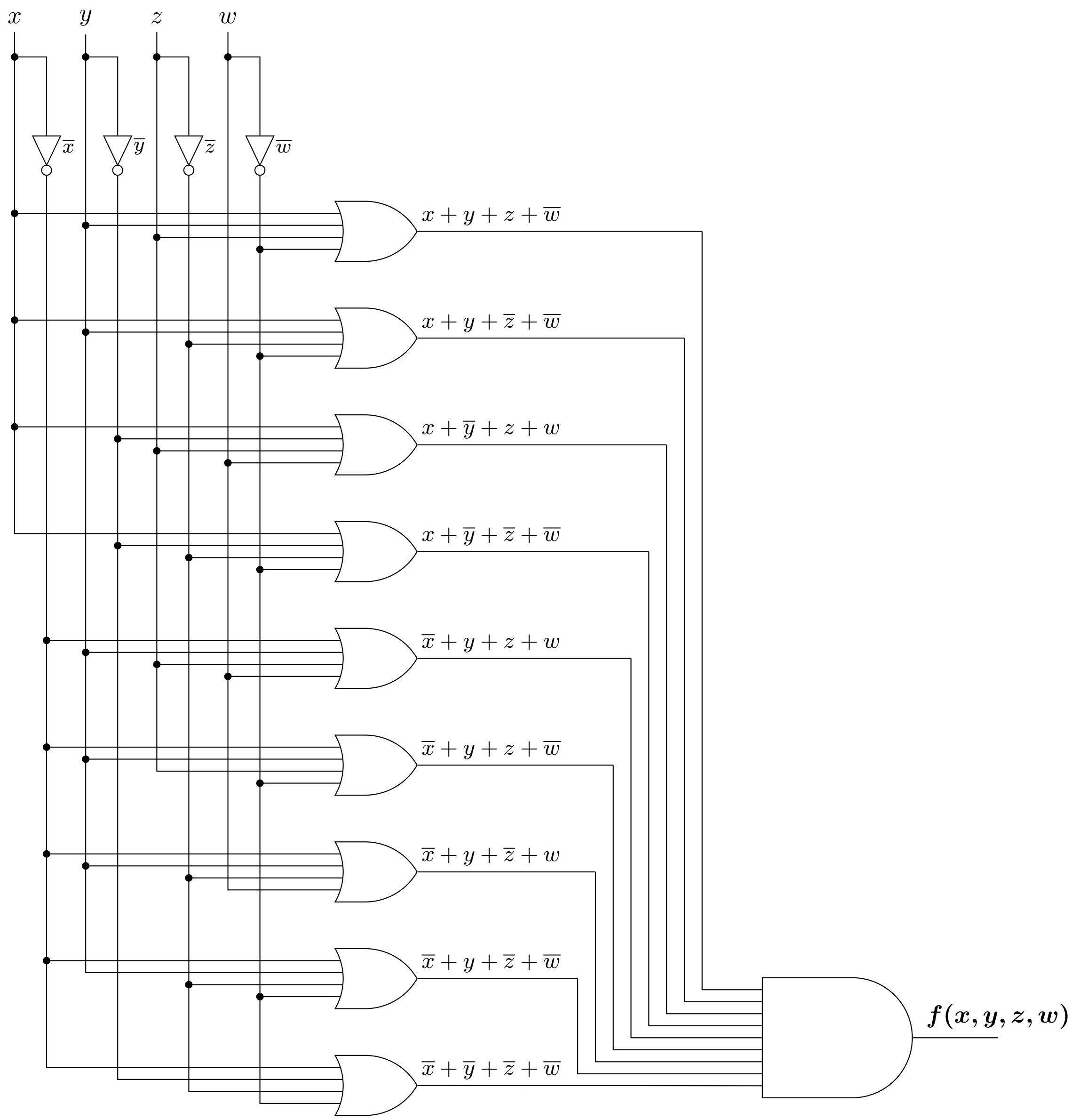
5.1 Minterm

Rappresento graficamente la funzione booleana espressa tramite minterm.
$\boldsymbol{f(x,y,z,w)} = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} + \overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{w} + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,w + \overline{x}\,y\,z\,\overline{w} + x\,y\,\overline{z}\,\overline{w} + x\,y\,\overline{z}\,w + x\,y\,z\,\overline{w}$



5.2 Maxterm

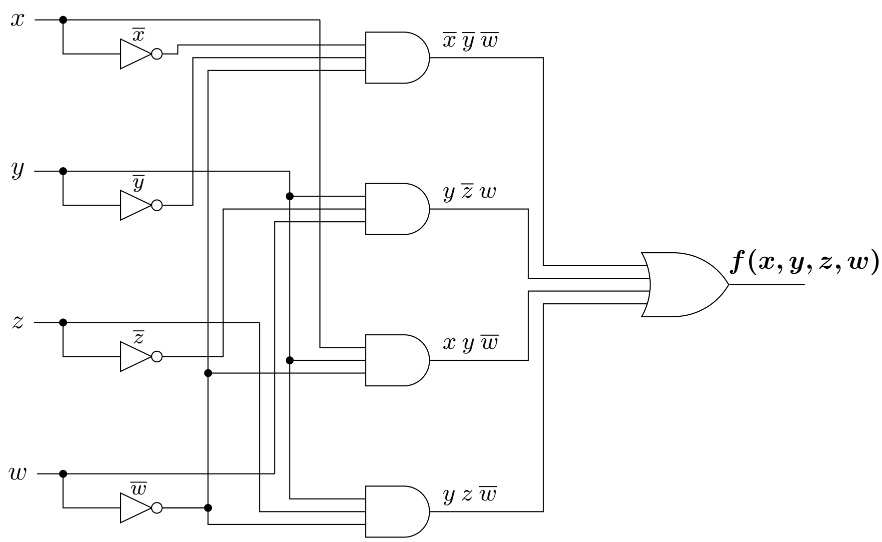
Rappresento graficamente la funzione booleana espressa tramite i maxterm.
$\boldsymbol{f(x,y,z,w)} = (x+y+z+\overline{w})\cdot(x+y+\overline{z}+\overline{w})\cdot(x+\overline{y}+z+w)\cdot(x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w})\cdot(\overline{x}+y+z+w)\cdot(\overline{x}+y+z+\overline{w})\cdot(\overline{x}+y+\overline{z}+w)\cdot(\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{w})\cdot(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w})$



5.3 Funzione semplificata

Rappresento graficamente l'espressione semplificata della funzione. Espressione trovata precedentemente tramite *Semplificazione Agebrica*, *Semplificazione 1* della mappa di Karnaugh e *Possibilità 1* del metodo tabellare di Quine - McCluskey.

$\boldsymbol{f(x, y, z, w)} = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + x\,y\,\overline{w} + y\,z\,\overline{w}$



6 Dichiarazione finale

Il lavoro di cui sopra è stato svolto da me in completa autonomia.

Visintin Giacomo
IN0501262
Trieste, 22 settembre 2023