Progetto - Fondamenti d'Informatica

Cognome Nome
Matricola

Anno Accademico 20XX-20XY

Indice

1 Identificazione Funzione

Numero matricola: IN0500775

$$0500775 \div 2^{2^4} = 500775 \div 65536 = 7 * 65536 + 42023$$

Resto = 42023

Codifica del resto in binario:

$$42023_{10} = 1010010000100111_2$$

42023	1
21011	1
10505	1
5252	0
2626	0
1313	1
656	0
328	0
164	0
82	0
41	1
20	0
10	0
5	1
2	0
1	1
0	/

x	y	z	w	$f(x,y,z,w)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Funzione Booleana associata corrispondente alla stringa binaria: 1010010000100111.

1.1 Minterm

Codifica dei termini minimi a partire dalla funzione f(x, y, z, w):

		x	y	z	w	$f(x,y,z,w)$
$\boldsymbol{m_0}$	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w}$	0	0	0	0	1
m_1	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,w$	0	0	0	1	0
$\boldsymbol{m_2}$	$\overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{w}$	0	0	1	0	1
m_3	$\overline{x}\,\overline{y}\,z\,w$	0	0	1	1	0
m_4	$\overline{x}\,y\,\overline{z}\,\overline{w}$	0	1	0	0	0
$\boldsymbol{m_5}$	$\overline{x}\,y\,\overline{z}\,w$	0	1	0	1	1
m_6	$\overline{x}\,y\,z\,\overline{w}$	0	1	1	0	0
m_7	$\overline{x}\,y\,z\,w$	0	1	1	1	0
m_8	$x\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w}$	1	0	0	0	0
m_9	$x\,\overline{y}\,\overline{z}\,w$	1	0	0	1	0
$\boldsymbol{m_{10}}$	$x\,\overline{y}\,z\,\overline{w}$	1	0	1	0	1
m_{11}	$x\,\overline{y}\,z\,w$	1	0	1	1	0
m_{12}	$x\,y\,\overline{z}\,\overline{w}$	1	1	0	0	0
$\boldsymbol{m_{13}}$	$x\,y\,\overline{z}\,w$	1	1	0	1	1
$\boldsymbol{m_{14}}$	$x\,y\,z\,\overline{w}$	1	1	1	0	1
$\boldsymbol{m_{15}}$	$x\,y\,z\,w$	1	1	1	1	1

Per ottenere la prima forma canonica della funzione, considero le combinazioni (x, y, z, w) in cui la funzione assume valore 1.

Funzione espressa come somma di prodotti:
$\boldsymbol{f(x,y,z,w)} = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} + \overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{w} + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,w + x\,\overline{y}\,z\,\overline{w} + x\,y\,\overline{z}\,w + x\,y\,z\,\overline{w} + x\,y\,z\,w$

1.2 Maxterm

Codifica dei termini massimi a partire dalla funzione f(x, y, z, w):

		x	y	z	w	$f(x,y,z,w)$
M_0	$x+y+z+w$	0	0	0	0	1
$\boldsymbol{M_1}$	$x+y+z+\overline{w}$	0	0	0	1	0
M_2	$x+y+\overline{z}+w$	0	0	1	0	1
$\boldsymbol{M_3}$	$x+y+\overline{z}+\overline{w}$	0	0	1	1	0
$\boldsymbol{M_4}$	$x+\overline{y}+z+w$	0	1	0	0	0
M_5	$x+\overline{y}+z+\overline{w}$	0	1	0	1	1
$\boldsymbol{M_6}$	$x+\overline{y}+\overline{z}+w$	0	1	1	0	0
$\boldsymbol{M_7}$	$x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}$	0	1	1	1	0
$\boldsymbol{M_8}$	$\overline{x}+y+z+w$	1	0	0	0	0
$\boldsymbol{M_9}$	$\overline{x}+y+z+\overline{w}$	1	0	0	1	0
M_{10}	$\overline{x}+y+\overline{z}+w$	1	0	1	0	1
$\boldsymbol{M_{11}}$	$\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{w}$	1	0	1	1	0
$\boldsymbol{M_{12}}$	$\overline{x}+\overline{y}+z+w$	1	1	0	0	0
M_{13}	$\overline{x}+\overline{y}+z+\overline{w}$	1	1	0	1	1
M_{14}	$\overline{x}+\overline{z}+\overline{w}+w$	1	1	1	0	1
M_{15}	$\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}$	1	1	1	1	1

Per ottenere la seconda forma canonica della funzione, considero le combinazioni (x, y, z, w) in cui la funzione assume valore 0.

Funzione espressa come prodotto di somme:
$\boldsymbol{f(x,y,z,w)} = (x+y+z+\overline{w})\cdot(x+y+\overline{z}+\overline{w})\cdot(x+\overline{y}+z+w)\cdot(x+\overline{y}+\overline{z}+w)\cdot(x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w})\cdot(\overline{x}+y+z+w)\cdot(\overline{x}+y+z+\overline{w})\cdot(\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{w})\cdot(\overline{x}+\overline{y}+z+w)$

2 Semplificazione

2.1 Semplificazione per via algebrica

Legenda:

Il testo sottolineato rappresenta la parte dell'equazione dove è stato applicato l'assioma o il teorema (indicato fra parentesi) nella data riga, mentre il **testo in grassetto** rappresenta il risultato di tale applicazione e si trova nella riga successiva a quella di utilizzo del dato assioma o teorema.

2.1.1 Semplificazione minterm

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z,w) &= \underline{\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w}} + \underline{\overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{w}} + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,w + x\,\overline{y}\,z\,\overline{w} + x\,y\,\overline{z}\,w + x\,y\,z\,\overline{w} + x\,y\,z\,w = (Per\ A6)\\
&= \boldsymbol{\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w}}\,\underline{\boldsymbol{(\overline{z}+z)}} + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,w + x\,\overline{y}\,z\,\overline{w} + x\,y\,\overline{z}\,w + x\,y\,z\,\overline{w} + x\,y\,z\,w = (Per\ A7)\\
&= \underline{\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w}\cdot\mathbf{1}} + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,w + x\,\overline{y}\,z\,\overline{w} + x\,y\,\overline{z}\,w + x\,y\,z\,\overline{w} + x\,y\,z\,w = (Per\ A3)\\
&= \boldsymbol{\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w}} + \underline{\overline{x}\,y\,\overline{z}\,w} + x\,\overline{y}\,z\,\overline{w} + \underline{x\,y\,\overline{z}\,w} + x\,y\,z\,\overline{w} + x\,y\,z\,w = (Per\ A6)\\
&= \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + \boldsymbol{y\,\overline{z}\,w}\,\underline{\boldsymbol{(\overline{x}+x)}} + x\,\overline{y}\,z\,\overline{w} + x\,y\,z\,\overline{w} + x\,y\,z\,w = (Per\ A7)\\
&= \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + \underline{y\,\overline{z}\,w\cdot\mathbf{1}} + x\,\overline{y}\,z\,\overline{w} + x\,y\,z\,\overline{w} + x\,y\,z\,w = (Per\ A3)\\
&= \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + \boldsymbol{y\,\overline{z}\,w} + x\,\overline{y}\,z\,\overline{w} + \underline{x\,y\,z\,\overline{w}} + \underline{x\,y\,z\,w} = (Per\ A6)\\
&= \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + x\,\overline{y}\,z\,\overline{w} + \boldsymbol{x\,y\,z}\,\underline{\boldsymbol{(\overline{w}+w)}} = (Per\ A7)\\
&= \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + x\,\overline{y}\,z\,\overline{w} + \underline{x\,y\,z\cdot\mathbf{1}} = (Per\ A3)\\
&= \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + \underline{x\,\overline{y}\,z\,\overline{w}} + \underline{\boldsymbol{x\,y\,z}} = (Per\ A6)\\
&= \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + \boldsymbol{x\,z}\,\underline{\boldsymbol{(\overline{y}\,\overline{w}+y)}} = (Per\ T5)\\
&= \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + \underline{x\,z\,\boldsymbol{(\overline{w}+y)}} = (Per\ A6)\\
&= \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + \boldsymbol{x\,z\,\overline{w}} + \boldsymbol{x\,y\,z}
\end{aligned}
$$

Funzione minterm semplificata:

$\boldsymbol{f(x,y,z,w)} = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + x\,z\,\overline{w} + x\,y\,z$

2.1.2 Semplificazione maxterm

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z,w) &= (x+y+z+\overline{w}) \cdot (x+y+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (x+\overline{y}+z+w) \cdot (x+\overline{y}+\overline{z}+w) \cdot (x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) \cdot \\
&\qquad (\overline{x}+y+z+w) \cdot (\overline{x}+y+z+\overline{w}) \cdot (\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (+\overline{x}+\overline{y}+z+w) = (Per\ A6) \\
&= [\boldsymbol{(x+y+\overline{w}) + (z \cdot \overline{z})}] \cdot (x+\overline{y}+z+w) \cdot (x+\overline{y}+\overline{z}+w) \cdot (x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) \cdot \\
&\qquad (\overline{x}+y+z+w) \cdot (\overline{x}+y+z+\overline{w}) \cdot (\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (+\overline{x}+\overline{y}+z+w) = (Per\ A7) \\
&= [(x+y+\overline{w}) + \mathbf{0}] \cdot (x+\overline{y}+z+w) \cdot (x+\overline{y}+\overline{z}+w) \cdot (x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (\overline{x}+y+z+w) \cdot \\
&\qquad (\overline{x}+y+z+\overline{w}) \cdot (\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (+\overline{x}+\overline{y}+z+w) = (Per\ A3) \\
&= \boldsymbol{(x+y+\overline{w})} \cdot (x+\overline{y}+z+w) \cdot (x+\overline{y}+\overline{z}+w) \cdot (x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (\overline{x}+y+z+w) \cdot \\
&\qquad (\overline{x}+y+z+\overline{w}) \cdot (\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (+\overline{x}+\overline{y}+z+w) = (Per\ A6) \\
&= (x+y+\overline{w}) \cdot [\boldsymbol{(x+\overline{y}+w) + (z \cdot \overline{z})}] \cdot (x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (\overline{x}+y+z+w) \cdot \\
&\qquad (\overline{x}+y+z+\overline{w}) \cdot (\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (+\overline{x}+\overline{y}+z+w) = (Per\ A7) \\
&= (x+y+\overline{w}) \cdot [(x+\overline{y}+w) + \mathbf{0}] \cdot (x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (\overline{x}+y+z+w) \cdot (\overline{x}+y+z+\overline{w}) \cdot \\
&\qquad (\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (+\overline{x}+\overline{y}+z+w) = (Per\ A3) \\
&= (x+y+\overline{w}) \cdot \boldsymbol{(x+\overline{y}+w)} \cdot (x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (\overline{x}+y+z+w) \cdot (\overline{x}+y+z+\overline{w}) \cdot \\
&\qquad (\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (+\overline{x}+\overline{y}+z+w) = (Per\ A6) \\
&= (x+y+\overline{w}) \cdot (x+\overline{y}+w) \cdot (x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) \cdot [\boldsymbol{(\overline{x}+z+w) + (y \cdot \overline{y})}] \cdot (\overline{x}+y+z+\overline{w}) \cdot \\
&\qquad (\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{w}) = (Per\ A7) \\
&= (x+y+\overline{w}) \cdot (x+\overline{y}+w) \cdot (x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) \cdot [(\overline{x}+z+w) + \mathbf{0}] \cdot (\overline{x}+y+z+\overline{w}) \cdot \\
&\qquad (\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{w}) = (Per\ A3) \\
&= (x+y+\overline{w}) \cdot (x+\overline{y}+w) \cdot (x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) \cdot \boldsymbol{(\overline{x}+z+w)} \cdot (\overline{x}+y+z+\overline{w}) \cdot \\
&\qquad (\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{w}) = (Per\ A6) \\
&= (x+y+\overline{w}) \cdot (x+\overline{y}+w) \cdot (x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (\overline{x}+z+w) \cdot \\
&\qquad [\boldsymbol{(\overline{x}+y+\overline{w}) + (z \cdot \overline{z})}] = (Per\ A7) \\
&= (x+y+\overline{w}) \cdot (x+\overline{y}+w) \cdot (x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (\overline{x}+z+w) \cdot [(\overline{x}+y+\overline{w}) + \mathbf{0}] = (Per\ A3) \\
&= (x+y+\overline{w}) \cdot (x+\overline{y}+w) \cdot (x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (\overline{x}+z+w) \cdot \boldsymbol{(\overline{x}+y+\overline{w})} = (Per\ A6) \\
&= [\boldsymbol{(y+\overline{w}) + (x \cdot \overline{x})}] \cdot (x+\overline{y}+w) \cdot (x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (\overline{x}+z+w) = (Per\ A7)
\end{aligned}
$$

$$= [(y + \overline{w}) + \mathbf{0}] \cdot (x + \overline{y} + w) \cdot (x + \overline{y} + \overline{z} + \overline{w}) \cdot (\overline{x} + z + w) = (Per\ A3)$$

$$= \boldsymbol{(y + \overline{w})} \cdot (x + \overline{y} + w) \cdot (x + \overline{y} + \overline{z} + \overline{w}) \cdot (\overline{x} + z + w) = (Per\ A6)$$

$$= (y + \overline{w}) \cdot \{\boldsymbol{(x + \overline{y}) + [w \cdot (\overline{z} + \overline{w})]}\} \cdot (\overline{x} + z + w) = (Per\ T5)$$

$$= (y + \overline{w}) \cdot [(x + \overline{y}) + \boldsymbol{(w \cdot \overline{z})}] \cdot (\overline{x} + z + w) = (Per\ A6)$$

$$= (y + \overline{w}) \cdot \boldsymbol{(x + \overline{y} + w)} \cdot \boldsymbol{(x + \overline{y} + \overline{z})} \cdot (\overline{x} + z + w)$$

Funzione maxterm semplificata:

$$\boldsymbol{f(x, y, z, w)} = (y + \overline{w}) \cdot (x + \overline{y} + w) \cdot (x + \overline{y} + \overline{z}) \cdot (\overline{x} + z + w)$$

2.1.3 Verifica dell'uguaglianza delle espressioni semplificate

A partire dalla forma semplificata maxterm mi riconduco alla forma semplificata minterm, tramite assiomi e teoremi.

$$f(x, y, z, w) = (y + \overline{w}) \cdot (x + \overline{y} + w) \cdot (x + \overline{y} + \overline{z}) \cdot (\overline{x} + z + w) = (Per\ A6)$$

$$= \boldsymbol{(x\,y + x\,\overline{w} + y\,\overline{y} + \overline{y}\,\overline{w} + y\,w + w\,\overline{w})} \cdot (x + \overline{y} + \overline{z}) \cdot (\overline{x} + z + w) = (Per\ A7)$$

$$= (x\,y + x\,\overline{w} + \mathbf{0} + \overline{y}\,\overline{w} + y\,w + \mathbf{0}) \cdot (x + \overline{y} + \overline{z}) \cdot (\overline{x} + z + w) = (Per\ A3)$$

$$= \boldsymbol{(x\,y + x\,\overline{w} + \overline{y}\,\overline{w} + y\,w)} \cdot (x + \overline{y} + \overline{z}) \cdot (\overline{x} + z + w) = (Per\ A6)$$

$$= \boldsymbol{(x\,x\,y + x\,x\,\overline{w} + x\,\overline{y}\,\overline{w} + x\,y\,w + x\,y\,\overline{y} + x\,\overline{y}\,\overline{w} + \overline{y}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{y}\,w + x\,y\,\overline{z} +}$$
$$\boldsymbol{x\,\overline{z}\,\overline{w} + \overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w)} \cdot (\overline{x} + z + w) = (Per\ T1)$$

$$= (\boldsymbol{x\,y} + \boldsymbol{x\,\overline{w}} + x\,\overline{y}\,\overline{w} + x\,y\,w + x\,y\,\overline{y} + x\,\overline{y}\,\overline{w} + \boldsymbol{\overline{y}\,\overline{w}} + y\,\overline{y}\,w + x\,y\,\overline{z} + x\,\overline{z}\,\overline{w} + \overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} +$$
$$y\,\overline{z}\,w) \cdot (\overline{x} + z + w) = (Per\ A7)$$

$$= (x\,y + x\,\overline{w} + x\,\overline{y}\,\overline{w} + x\,y\,w + \mathbf{0} + x\,\overline{y}\,\overline{w} + \overline{y}\,\overline{w} + \mathbf{0} + x\,y\,\overline{z} + x\,\overline{z}\,\overline{w} + \overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w) \cdot$$
$$(\overline{x} + z + w) = (Per\ A3)$$

$$= \boldsymbol{(x\,y + x\,\overline{w} + x\,\overline{y}\,\overline{w} + x\,y\,w + x\,\overline{y}\,\overline{w} + \overline{y}\,\overline{w} + x\,y\,\overline{z} + x\,\overline{z}\,\overline{w} + \overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w)} \cdot$$
$$(\overline{x} + z + w) = (Per\ T1)$$

$$= (x\,y + x\,\overline{w} + \boldsymbol{x\,\overline{y}\,\overline{w}} + x\,y\,w + \overline{y}\,\overline{w} + x\,y\,\overline{z} + x\,\overline{z}\,\overline{w} + \overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w) \cdot (\overline{x} + z + w) = (Per\,A6)$$

$$\begin{aligned}= \boldsymbol{(}&\boldsymbol{x\,\overline{x}\,y + x\,\overline{x}\,\overline{w} + x\,\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + x\,\overline{x}\,y\,w + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + x\,\overline{x}\,y\,\overline{z} + x\,\overline{x}\,\overline{z}\,\overline{w} +} \\ &\boldsymbol{\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,w) + (x\,y\,z + x\,z\,\overline{w} + x\,\overline{y}\,z\,\overline{w} + x\,y\,z\,w + \overline{y}\,z\,\overline{w} +} \\ &\boldsymbol{x\,y\,z\,\overline{z} + x\,z\,\overline{z}\,\overline{w} + \overline{y}\,z\,\overline{z}\,\overline{w} + y\,z\,\overline{z}\,w) + (x\,y\,w + x\,w\,\overline{w} + x\,\overline{y}\,w\,\overline{w} +} \\ &\boldsymbol{x\,y\,w\,w + \overline{y}\,w\,\overline{w} + x\,y\,\overline{z}\,w + x\,\overline{z}\,w\,\overline{w} + \overline{y}\,\overline{z}\,w\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w\,w)} = (Per\,A7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= (&\mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,w) + (x\,y\,z + x\,z\,\overline{w} + x\overline{y}\,z\,\overline{w} + \\ &x\,y\,z\,w + \overline{y}\,z\,\overline{w} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0}) + (x\,y\,w + \mathbf{0} + \mathbf{0} + x\,y\,w\,w + \mathbf{0} + x\,y\,\overline{z}\,w + \mathbf{0} + \\ &\mathbf{0} + y\,\overline{z}\,w\,w) = (Per\,A3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= &\boldsymbol{(\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,w)} + \boldsymbol{(x\,y\,z + x\,z\,\overline{w} + x\,\overline{y}\,z\,\overline{w} + x\,y\,z\,w + \overline{y}\,z\,\overline{w})} + \\ &\boldsymbol{(x\,y\,w + x\,y\,w\,w + x\,y\,\overline{z}\,w + y\,\overline{z}\,w\,w)} = (Per\,T1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= (&\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,w) + (x\,y\,z + x\,z\,\overline{w} + x\,\overline{y}\,z\,\overline{w} + x\,y\,z\,w + \overline{y}\,z\,\overline{w}) + (x\,y\,w + \\ &\boldsymbol{x\,y\,w} + x\,y\,\overline{z}\,w + \boldsymbol{y\,\overline{z}\,w}) = (Per\,T1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= (&\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,w) + (x\,y\,z + x\,z\,\overline{w} + x\,\overline{y}\,z\,\overline{w} + x\,y\,z\,w + \overline{y}\,z\,\overline{w}) + (\boldsymbol{x\,y\,w} + \\ &x\,y\,\overline{z}\,w + y\,\overline{z}\,w) = (Per\,A5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= &\boldsymbol{\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,w + x\,y\,z + x\,z\,\overline{w} + x\,\overline{y}\,z\,\overline{w} + x\,y\,z\,w + \overline{y}\,z\,\overline{w} + x\,y\,w +} \\ &\boldsymbol{x\,y\,\overline{z}\,w + y\,\overline{z}\,w} = (Per\,T9)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= &\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} + \boldsymbol{y\,\overline{z}\,w} + x\,y\,z + x\,z\,\overline{w} + x\,\overline{y}\,z\,\overline{w} + x\,y\,z\,w + \overline{y}\,z\,\overline{w} + x\,y\,w + \\ &y\,\overline{z}\,w = (Per\,T1)\end{aligned}$$

$$= \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} + \boldsymbol{y\,\overline{z}\,w} + x\,y\,z + x\,z\,\overline{w} + x\,\overline{y}\,z\,\overline{w} + x\,y\,z\,w + \overline{y}\,z\,\overline{w} + x\,y\,w = (Per\,A6)$$

$$= \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + [\boldsymbol{x\,z\,(y + \overline{y}\,\overline{w})}] + x\,z\,\overline{w} + x\,y\,z\,w + \overline{y}\,z\,\overline{w} + x\,y\,w = (Per\,T5)$$

$$= \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + [x\,z\,\boldsymbol{(y + \overline{w})}] + x\,z\,\overline{w} + x\,y\,z\,w + \overline{y}\,z\,\overline{w} + x\,y\,w = (Per\,A6)$$

$$= \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + \boldsymbol{x\,y\,z} + \boldsymbol{x\,z\,\overline{w}} + x\,z\,\overline{w} + x\,y\,z\,w + \overline{y}\,z\,\overline{w} + x\,y\,w = (Per\,T1)$$

$$= \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + x\,y\,z + \boldsymbol{x\,z\,\overline{w}} + x\,y\,z\,w + \overline{y}\,z\,\overline{w} + x\,y\,w = (Per\,T4)$$

$$= \boldsymbol{\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w}} + y\,\overline{z}\,w + x\,y\,z + x\,z\,\overline{w} + x\,y\,z\,w + \overline{y}\,z\,\overline{w} + x\,y\,w = (Per\,T4)$$

$$= \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + x\,y\,z + x\,z\,\overline{w} + \overline{y}\,z\,\overline{w} + \boldsymbol{x\,y\,w} = (Per\,A6)$$

$$= \boldsymbol{\overline{w}\,(\overline{x}\,\overline{y} + x\,z + \overline{y}\,z)} + y\,\overline{z}\,w + x\,y\,z + x\,y\,w = (Per\,T6)$$

$$= \overline{w}\,\boldsymbol{(\overline{x}\,\overline{y} + x\,z)} + y\,\overline{z}\,w + x\,y\,z + x\,y\,w = (Per\ A6)$$

$$= \boldsymbol{\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + x\,z\,\overline{w}} + y\,\overline{z}\,w + x\,y\,z + x\,y\,w = (Per\ A6)$$

$$= \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + x\,z\,\overline{w} + \boldsymbol{y\,(\overline{z}\,w + x\,z + x\,w)} = (Per\ T6)$$

$$= \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + x\,z\,\overline{w} + y\,\boldsymbol{(\overline{z}\,w + x\,z)} = (Per\ A6)$$

$$= \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + x\,z\,\overline{w} + \boldsymbol{y\,\overline{z}\,w + x\,y\,z} = (Per\ A5)$$

$$= \boldsymbol{\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + x\,z\,\overline{w} + x\,y\,z}$$

L'uguaglianza delle due espressioni semplificate è stata verificata:

$$(y + \overline{w}) \cdot (x + \overline{y} + w) \cdot (x + \overline{y} + \overline{z}) \cdot (\overline{x} + z + w) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + x\,z\,\overline{w} + x\,y\,z$$

2.2 Mappa di Karnaugh

Mappa di Karnaugh corrisponde alla funzione:

$$\boldsymbol{f(x,y,z,w)} = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} + \overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{w} + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,w + x\,\overline{y}\,z\,\overline{w} + x\,y\,\overline{z}\,w + x\,y\,z\,\overline{w} + x\,y\,z\,w$$

$zw \backslash xy$	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	1	0	1	1

Dalla mappa di Karnaugh si evince che i due implicanti colorati sono fondamentali, in quanto sono gli unici due che possono comprendere rispettivamente la funzione $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w}$ e la funzione $\overline{x}\,y\,\overline{z}\,w$.
Pertanto si possono ricavare le rispettive espressioni semplificate:

- *Implicante* $= \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} + \overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{w} = (Per\ T9)$
  $= \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w}$
- *Implicante* $= \overline{x}\,y\,\overline{z}\,w + x\,y\,\overline{z}\,w = (Per\ T9)$
  $= y\,\overline{z}\,w$

Di conseguenza le due espressioni semplificate $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w}$ e $y\,\overline{z}\,w$ saranno presenti in ogni possibile semplificazione. Considerando tutte le possibili combinazioni minime degli implicanti vi sono 3 casi possibili.

– Semplificazione numero 1:

$zw \backslash xy$	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	1	0	1	1

- $Implicante = x\,y\,z\,w + x\,y\,z\,\overline{w} = (Per\,T9)$
  $= x\,y\,z$
- $Implicante = x\,\overline{y}\,z\,\overline{w} + \overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{w} = (Per\,T9)$
  $= \overline{y}\,z\,\overline{w}$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{f(x,y,z,w)} = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + x\,y\,z + \overline{y}\,z\,\overline{w}$$

– Semplificazione numero 2:

$zw \backslash xy$	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	1	0	1	1

- $Implicante = x\,y\,\overline{z}\,w + x\,y\,z\,w = (Per\,T9)$
  $= x\,y\,w$
- $Implicante = x\,y\,z\,\overline{w} + x\,\overline{y}\,z\,\overline{w} = (Per\,T9)$
  $= x\,z\,\overline{w}$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{f(x,y,z,w)} = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + x\,y\,w + x\,z\,\overline{w}$$

– Semplificazione numero 3:

$zw \backslash xy$	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	1	0	1	1

- $Implicante = x\,y\,z\,w + x\,y\,z\,\overline{w} = (Per\,T9)$
  $= x\,y\,z$
- $Implicante = x\,y\,z\,\overline{w} + x\,\overline{y}\,z\,\overline{w} = (Per\,T9)$
  $= x\,z\,\overline{w}$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{f(x,y,z,w)} = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + x\,y\,z + x\,z\,\overline{w} = (Per\,A5)$$
$$= \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + x\,z\,\overline{w} + x\,y\,z$$

La semplificazione numero 3 è la medesima che si ottiene tramite via algebrica e di conseguenza la semplificazione è verificata.

2.3 Metodo tabellare di Quine - Mc Cluskey

Trasformazione della tavola di verità della funzione espressa in minterm per ottenere la tabella di Quine - Mc Cluskey.

		x	y	z	w	f	
0	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w}$	0	0	0	0	1	$*$
1	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,w$	0	0	0	1	0	
2	$\overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{w}$	0	0	1	0	1	$*$
3	$\overline{x}\,\overline{y}\,z\,w$	0	0	1	1	0	
4	$\overline{x}\,y\,\overline{z}\,\overline{w}$	0	1	0	0	0	
5	$\overline{x}\,y\,\overline{z}\,w$	0	1	0	1	1	$*$
6	$\overline{x}\,y\,z\,\overline{w}$	0	1	1	0	0	
7	$\overline{x}\,y\,z\,w$	0	1	1	1	0	
8	$x\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w}$	1	0	0	0	0	
9	$x\,\overline{y}\,\overline{z}\,w$	1	0	0	1	0	
10	$x\,\overline{y}\,z\,\overline{w}$	1	0	1	0	1	$*$
11	$x\,\overline{y}\,z\,w$	1	0	1	1	0	
12	$x\,y\,\overline{z}\,\overline{w}$	1	1	0	0	0	
13	$x\,y\,\overline{z}\,w$	1	1	0	1	1	$*$
14	$x\,y\,z\,\overline{w}$	1	1	1	0	1	$*$
15	$x\,y\,z\,w$	1	1	1	1	1	$*$

Livello			x	y	z	w	f	
0	0	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w}$	0	0	0	0	1	$*$
	1	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,w$	0	0	0	1	0	
1	2	$\overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{w}$	0	0	1	0	1	$*$
	4	$\overline{x}\,y\,\overline{z}\,\overline{w}$	0	1	0	0	0	
	8	$x\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w}$	1	0	0	0	0	
	3	$\overline{x}\,\overline{y}\,z\,w$	0	0	1	1	0	
2	5	$\overline{x}\,y\,\overline{z}\,w$	0	1	0	1	1	$*$
	6	$\overline{x}\,y\,z\,\overline{w}$	0	1	1	0	0	
	9	$x\,\overline{y}\,\overline{z}\,w$	1	0	0	1	0	
	10	$x\,\overline{y}\,z\,\overline{w}$	1	0	1	0	1	$*$
	12	$x\,y\,\overline{z}\,\overline{w}$	1	1	0	0	0	
	7	$\overline{x}\,y\,z\,w$	0	1	1	1	0	
3	11	$x\,\overline{y}\,z\,w$	1	0	1	1	0	
	13	$x\,y\,\overline{z}\,w$	1	1	0	1	1	$*$
	14	$x\,y\,z\,\overline{w}$	1	1	1	0	1	$*$
4	15	$x\,y\,z\,w$	1	1	1	1	1	$*$

Livello			x	y	z	w	f	
0	0	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w}$	0	0	0	0	1	$*$
1	2	$\overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{w}$	0	0	1	0	1	$*$
2	5	$\overline{x}\,y\,\overline{z}\,w$	0	1	0	1	1	$*$
	10	$x\,\overline{y}\,z\,\overline{w}$	1	0	1	0	1	$*$
3	13	$x\,y\,\overline{z}\,w$	1	1	0	1	1	$*$
	14	$x\,y\,z\,\overline{w}$	1	1	1	0	1	$*$
4	15	$x\,y\,z\,w$	1	1	1	1	1	$*$

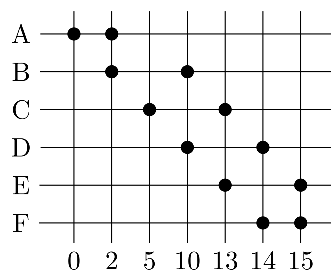
	Livello	Numero	Termine Minimo
✓	0	0	0 0 0 0
✓	1	2	0 0 1 0
✓	2	5	0 1 0 1
✓		10	1 0 1 0
✓	3	13	1 1 0 1
✓		14	1 1 1 0
✓	4	15	1 1 1 1

$0, 2$	0 0 - 0
$2, 10$	- 0 1 0
$5, 13$	- 1 0 1
$10, 14$	1 - 1 0
$13, 15$	1 1 - 1
$14, 15$	1 1 1 -

Nella prima tabella metto un segno di spunta sui minterm che ho usato. Sulla seconda tabella non sono possibili ulteriori semplificazioni.

$\Longrightarrow$

A	$0, 2$	0 0 - 0
B	$2, 10$	- 0 1 0
C	$5, 13$	- 1 0 1
D	$10, 14$	1 - 1 0
E	$13, 15$	1 1 - 1
F	$14, 15$	1 1 1 -



Dall'esame del reticolo si osserva che gli implicanti A e C sono essenziali, siccome sono gli unici in grado di coprire rispettivamente i termini minimi 0 e 5.

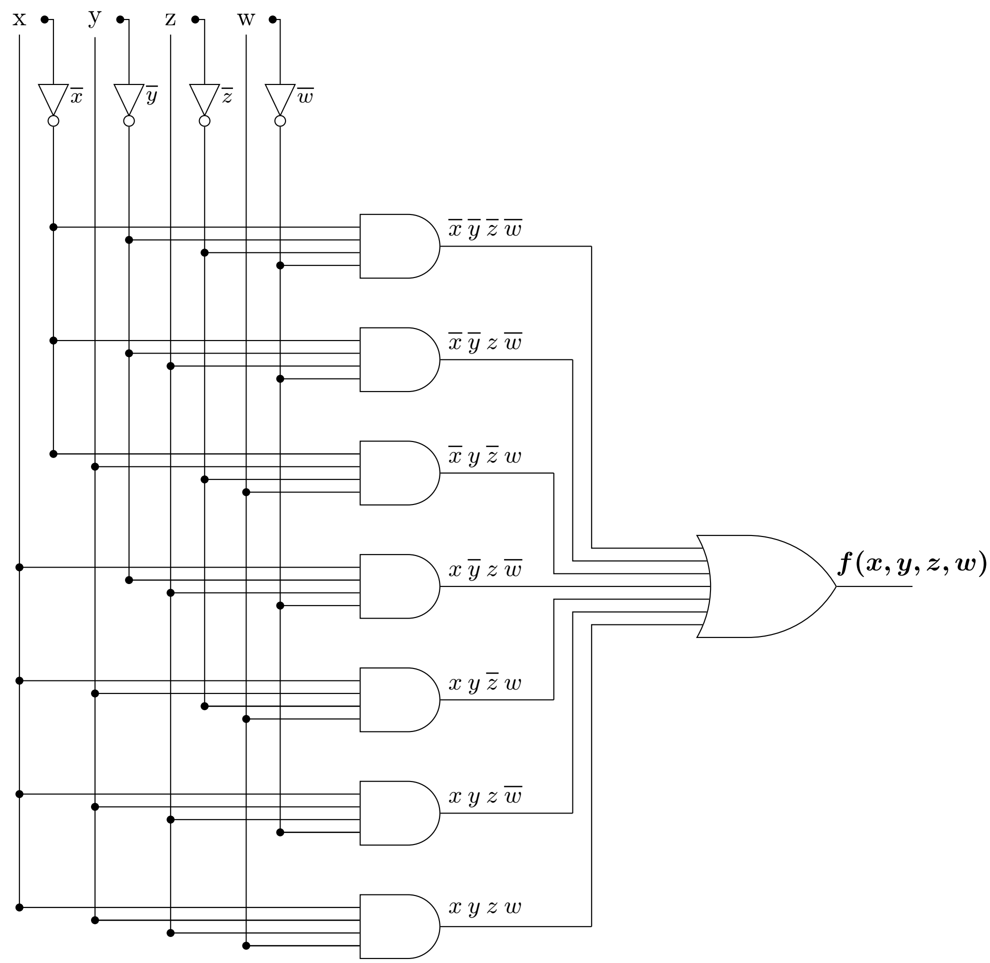
Quindi vi sono tre possibili coperture minime equivalenti:
$\boldsymbol{f(x, y, z, w)} = A + C + B + F = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + \overline{y}\,z\,\overline{w} + x\,y\,z$
$\boldsymbol{f(x, y, z, w)} = A + C + D + E = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + x\,z\,\overline{w} + x\,y\,w$
$\boldsymbol{f(x, y, z, w)} = A + C + D + F = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + x\,z\,\overline{w} + x\,y\,z$

L'ultima espressione è la stessa che si ottiene tramite via algebrica e mappa di Karnaugh (semplificazione numero 3) e di conseguenza la semplificazione è verificata. Inoltre, la prima e seconda semplificazione corrispondono rispettivamente alle semplificazioni numero 1 e 2 della mappa di Karnaugh (a seguito dell'applicazione di A5).

3 Schema Logico

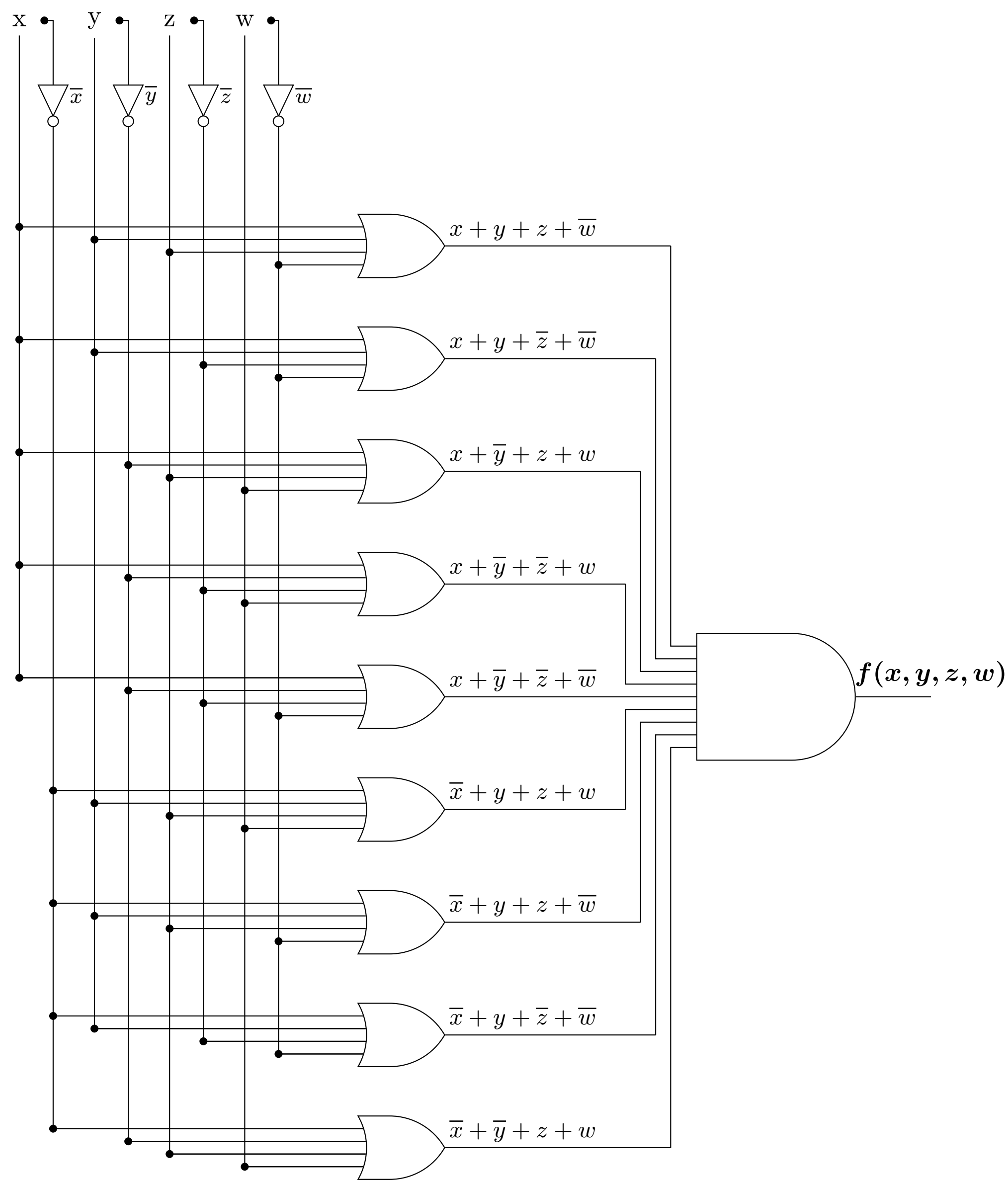
3.1 Minterm

$$\boldsymbol{f(x,y,z,w)} = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w} + \overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{w} + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,w + x\,\overline{y}\,z\,\overline{w} + x\,y\,\overline{z}\,w + x\,y\,z\,\overline{w} + x\,y\,z\,w$$



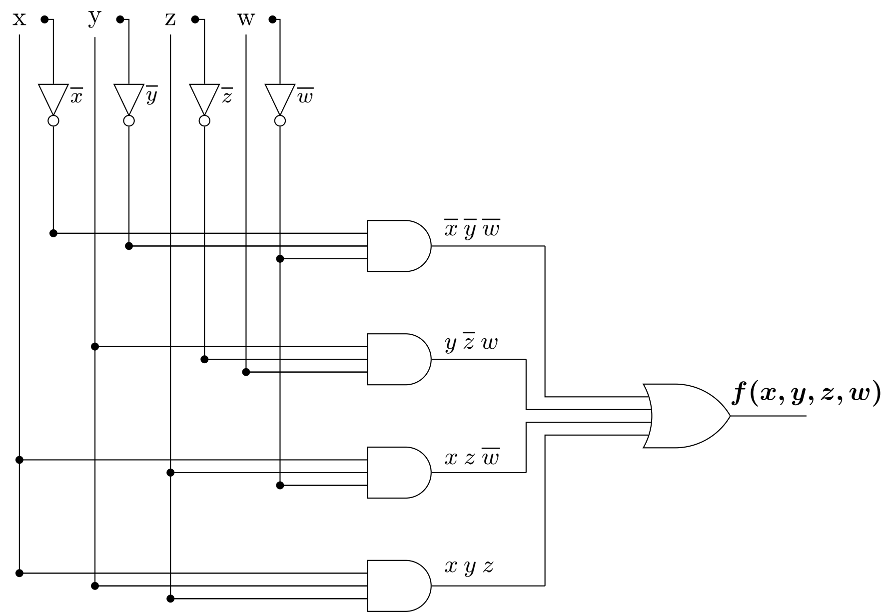
3.2 Maxterm

$\boldsymbol{f(x,y,z,w)} = (x+y+z+\overline{w})\cdot(x+y+\overline{z}+\overline{w})\cdot(x+\overline{y}+z+w)\cdot(x+\overline{y}+\overline{z}+w)\cdot$
$(x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w})\cdot(\overline{x}+y+z+w)\cdot(\overline{x}+y+z+\overline{w})\cdot(\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{w})\cdot(\overline{x}+\overline{y}+z+w)$



3.3 Funzione semplificata

$\boldsymbol{f(x,y,z,w)} = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} + y\,\overline{z}\,w + x\,z\,\overline{w} + x\,y\,z$



4 Dichiarazione finale

Il lavoro di cui sopra è stato svolto da me in completa autonomia.

Cognome Nome
IN0500775
Trieste, 22 settembre 2023