

Modulo 24

Teorema (Induzione) Supponiamo
di avere una famiglia infinita
di proposizioni

$P_1, P_2, P_3, \dots$

Supponiamo che valgono:

1) P_1 è vera

2) Se P_n è vera $\Rightarrow P_{n+1}$ è vera.

Allora P_n è vera per ogni n .

Teor (disug. Bernoulli) Per ogni $a \geq -1$
e per ogni $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ vale

$$(1+a)^n \geq 1+na \quad (P_n)$$

Dim Si procede per induzione su $n \in \mathbb{N}$

Dimostriamo che P_1 è vera e che

P_n vera $\Rightarrow P_{n+1}$ vera

1) Dimostriamo che P_1 è vera.

$$(1+a)^1 = 1+a = 1+1 \cdot a \quad (P_1)$$

$\Rightarrow P_1$ vera

2) Sia P_n vera cioè è vero che $(1+a)^n \geq 1+na$

$$\begin{aligned} (1+a)^n &\geq 1+na & \cdot (1+a) &\geq 0 & 1+a &\geq 0 \\ & & \downarrow & & \updownarrow & \\ & & & & a &\geq -1 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} (1+a)^{n+1} &\geq (1+na)(1+a) = \\ &= 1+(n+1)a + \underbrace{na^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1+(n+1)a \end{aligned}$$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$$

Abbiamo appena dimostrato che

se P_n è vera allora P_{n+1} è vera.

Il teorema è dimostrato $\square$

Sommatorie

Dati $a_1, \dots, a_n$ si fanno le seguenti notazioni

$$\sum_{j=1}^n a_j = a_1 + \dots + a_n$$

$$\sum_{k=1}^n a_k$$

$$\sum_{j=1}^1 a_j = a_1$$

$$\sum_{j=10}^3 a_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^{20} a_j = \sum_{j=1}^{11} a_j + \sum_{j=12}^{20} a_j$$

$$\sum_{j=1}^m (a_j + b_j) = \sum_{j=1}^m a_j + \sum_{j=1}^m b_j$$

$$\sum_{j=1}^m c a_j = c \sum_{j=1}^m a_j$$

(P_n) $\sum_{j=1}^m j = \frac{(n+1)n}{2}$ Somma aritmetica

(P₁) $\sum_{j=1}^1 j = 1$

$\frac{(1+1) \cdot 1}{2} = 1$ ✓

Assumiamo che (P_n) $\sum_{j=1}^m j = \frac{(n+1)n}{2}$ sia vera e dimostriamo che è vera

(P_{n+1}) $\sum_{j=1}^{n+1} j = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$

$$\begin{aligned} \boxed{\sum_{j=1}^{n+1} j} &= \sum_{j=1}^n j + \sum_{j=n+1}^{n+1} j \\ &= \frac{(n+1)n}{2} + (n+1) \\ &= (n+1) \left[\frac{n}{2} + 1 \right] \\ &= (n+1) \frac{n+2}{2} \\ &= \boxed{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \end{aligned}$$

$\text{somma} = 11$
 $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 =$

$$\begin{aligned} &= (1+10) + (2+9) + (3+8) + (4+7) + (5+6) \\ &= 11 + 11 + 11 + 11 + 11 = \\ &= 11 \cdot 5 \\ &= \frac{11 \cdot 10}{2} \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^m j = \frac{(n+1)n}{2}$$

Somma geometrica di ragione x .

Sia $x \neq 1$. Allora per $x^0 = 1$

$$\sum_{j=0}^n x^j = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Dimostrazione per induzione

$$n=0 \quad \sum_{j=0}^0 x^j = x^0 = 1$$

$$\frac{1-x^1}{1-x} = \frac{1-x}{1-x} = 1$$

$$P_n \quad \sum_{j=0}^n x^j = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$\Downarrow$

$$P_{n+1} \quad \sum_{j=0}^{n+1} x^j = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=0}^{n+1} x^j \right) &= \sum_{j=0}^n x^j + x^{n+1} \\ &= \frac{(1-x^{n+1})}{1-x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1-x^{n+1} + x^{n+1}(1-x)}{1-x} \\ &= \frac{1-\cancel{x^{n+1}} + \cancel{x^{n+1}} - x^{n+2}}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{n+2}}{1-x} \end{aligned}$$

□

Osservazioni

$$1) \quad \sum_{j=0}^n 1^j = \sum_{j=0}^n 1 = n+1$$

$$2) \quad \sum_{j=0}^n x^j = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \cdot (1-x)$$

$$\begin{aligned} (1-x) \sum_{j=0}^n x^j &= 1-x^{n+1} \\ &= \sum_{j=0}^n (1-x)x^j = \sum_{j=0}^n (x^j - x^{j+1}) \\ &= \underbrace{x^0 - x^{n+1}}_{= 1-x^{n+1}} \end{aligned}$$

Somma Telescopica

$$\sum_{j=1}^n (a_j - a_{j+1})$$