

Note del Corso di Istituzioni di Algebra e Geometria
A.A. 2024/2025

Prof. Valentina Beorchia

24 settembre 2024

Indice

1	Preliminari di geometria	4
1.1	Spazi affini	4
1.2	Spazi proiettivi	5
1.3	Anelli di polinomi	6
2	Curve e ipersuperfici algebriche affini	7
2.1	Ipersuperfici affini	8
2.2	Comportamento sotto affinità	9

Introduzione

Questo corso riguarda lo studio delle curve piane algebriche, cioè delle curve che possono essere descritte come luogo di zeri di un polinomio non nullo in due indeterminate nel caso affine, rispettivamente un luogo di zeri di un polinomio omogeneo non nullo in tre indeterminate nel caso proiettivo. L'analogia nozione in spazi di dimensione superiore viene chiamata ipersuperficie algebrica.

Vedremo che con l'uso di svariate tecniche algebriche sarà possibile analizzare dettagliatamente singolarità e intersezioni tra curve, e potremo dare la nozione di molteplicità di intersezione tra curve; potremo quindi distinguere tra intersezioni trasversali e tangenziali a partire da equazioni algebriche.

La teoria delle curve algebriche piane fa parte di una teoria molto più ampia, e cioè della Geometria Algebrica, molto attuale e con una storia molto lunga. La Geometria Algebrica moderna ebbe inizio con l'introduzione delle coordinate cartesiane nel XVII secolo. Ebbe un grande sviluppo a partire dal diciannovesimo secolo, quando ad esempio Riemann dimostrò che le superfici di Riemann compatte (cioè varietà complesse di dimensione 1) possono sempre essere descritte come insiemi di soluzioni di equazioni polinomiali.

Anche l'importantissima scuola italiana di Geometria Algebrica tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento diede un contributo fondamentale. Il successivo sviluppo dell'algebra commutativa, in cui citiamo ad esempio David Hilbert ed Emmy Noether, permise una formalizzazione molto generale della teoria. I lavori delle fondazioni furono terminati da Oscar Zariski e André Weil a metà del XX secolo.

Recentemente, a partire dagli anni '50, la teoria è stata enormemente generalizzata e resa più potente dall'introduzione degli schemi e della coomologia da parte di Alexander Grothendieck.

Al giorno d'oggi, la Geometria Algebrica ha connessioni con molte branche della matematica. In particolare, la maggior parte della Teoria dei Numeri può essere vista come parte della Geometria Algebrica; un esempio ne è la dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat. Ci sono anche collegamenti molto stretti con l'Algebra, l'Analisi Complessa, la Topologia, la Geometria Differenziale, le Equazioni alle derivate parziali, la Fisica Matematica

ma anche con materie applicate come la Teoria dei codici e la Crittografia.

Capitolo 1

Preliminari di geometria

1.1 Spazi affini

Sia \mathbb{K} un campo e sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione finita n .

Definizione 1.1.1. Uno *spazio affine* $\mathbb{A} = \mathbb{A}(V)$ su V è un insieme non vuoto $\mathbb{A} \neq \emptyset$ su cui è definita un'applicazione $t : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow V$ tale che:

1. $\forall P, Q, R \in \mathbb{A}$ si ha $t(P, Q) + t(Q, R) = t(P, R)$;
2. $\forall P \in \mathbb{A}$ si ha $t(P, \cdot) : \mathbb{A} \rightarrow V$ è una biiezione.

Gli elementi di \mathbb{A} verranno chiamati *punti*.

Osservazione 1. In queste note considereremo principalmente lo *spazio affine standard* $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n := \mathbb{K}^n$ sullo spazio vettoriale \mathbb{K}^n , con l'applicazione

$$t((a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)) = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ \vdots \\ b_n - a_n \end{pmatrix}.$$

In questo caso, quindi, lo spazio affine e lo spazio vettoriale coincidono insiemisticamente, e i loro elementi sono n -uple di scalari.

Per motivi di chiarezza, denotiamo tali n -uple in orizzontale (a_1, a_2, \dots, a_n) per indicare gli elementi dello spazio affine, mentre la notazione verticale indicherà un vettore $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Definizione 1.1.2. Un *riferimento affine* in \mathbb{A} è il dato di un punto fissato $O \in \mathbb{A}$, che verrà chiamato *origine*, e di una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ dello spazio vettoriale V .

Dato un riferimento affine, ad ogni punto $P \in \mathbb{A}$ possono essere associate biunivocamente le sue *coordinate affini*, che sono per definizione le coordinate del vettore $t(O, P)$ nella base \mathcal{B} .

Osservazione 2. Nello spazio affine standard considereremo il sistema di riferimento affine più semplice, e cioè

$$O = (0, 0, \dots, 0), \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

In questo riferimento, ogni n -upla coincide con la propria n -upla di coordinate affini.

1.2 Spazi proiettivi

Definizione 1.2.1. Sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione finita $n + 1$. Lo *spazio proiettivo* $\mathbb{P}(V)$ su V è l'insieme quoziente

$$\mathbb{P}(V) = \frac{V \setminus \{0\}}{\sim},$$

dove \sim è la relazione di proporzionalità: $v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ tale che $w = \lambda v$.

Definizione 1.2.2. Un *sistema di riferimento proiettivo* in $\mathbb{P}(V)$ è il dato di $n+2$ punti $P_0, P_1, \dots, P_n, P_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$, quindi $n + 2$ classi di vettori di V , tali che per ogni scelta di $n + 1$ vettori tra di essi, risultino linearmente indipendenti.

Se $p : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(V)$ indica la proiezione, si può dimostrare facilmente che esiste una base $\{v_0, \dots, v_n\}$ di V tale che

$$p(v_0) = P_0, \dots, p(v_n) = P_n, p(v_0 + v_1 + \dots + v_n) = P_{n+1}.$$

Dato un vettore non nullo $v \in V$, s $v = a_0 v_0 + a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$, definiamo le *coordinate omogenee*

1.3 Anelli di polinomi

Denoteremo con $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ l'anello dei polinomi nelle indeterminate x_1, \dots, x_n a coefficienti in \mathbb{K} . Ricordiamo che $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ è un anello UFD (un dominio a fattorizzazione unica), cioè ogni polinomio si può fattorizzare in modo unico, a meno di elementi invertibili e a meno di uapermutazione dei fattori, nel prodotto di polinomi irriducibili:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1, \dots, x_n)^{\mu_1} \cdots f_r(x_1, \dots, x_n)^{\mu_r},$$

con $f_i(x_1, \dots, x_n)$ irriducibili e a due a due coprimi. Gli esponenti μ_i sono detti molteplicità (algebraica) del fattore irriducibile f_i .

Se $\mu_1 = \cdots = \mu_r = 1$, il polinomio f si dice *ridotto*.

Osservazione 3. Se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ è un campo algebricamente chiuso, allora \mathbb{K} è infinito.

Infatti, se per assurdo fosse finito: $\mathbb{K} = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, considerando il polinomio

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_m) + 1$$

si otterrebbe un polinomio senza radici in \mathbb{K} .

Capitolo 2

Curve e ipersuperfici algebriche affini

Definizione 2.0.1. Dato un polinomio $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e un punto $P = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$, indicheremo con $f(P)$ la valutazione di f nelle coordinate di P .

Indicheremo, inoltre, con $Z(f)$ il luogo degli zeri di f , cioè

$$Z(f) = \{P \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \mid f(P) = 0\}.$$

Definizione 2.0.2. Una curva algebrica piana affine C è una coppia

$$C = (Z(f), f),$$

con $f \in \mathbb{K}[x, y]$ polinomio non costante (quindi di grado ≥ 1).

Il luogo $Z(f)$ verrà chiamato *supporto di C* . L'equazione $f(x, y) = 0$ si dirà equazione di C .

Il *grado* di C è per definizione il grado del polinomio f .

Osservazione 4. Due polinomi diversi possono definire curve con lo stesso supporto, come ad esempio nel caso di $f(x, y) = x - y$ e $g(x, y) = (x - y)^2$. Nel primo caso la curva è chiamata *retta*, nel secondo caso *retta doppia*. Le rette doppie possono essere considerate come coniche piane *“doppiamente degeneri”*, per cui vogliamo tenere traccia del fatto che sono determinate da un'equazione di secondo grado.

Esempi 2.0.3. • Le rette affini sono curve algebriche di grado 1:

$$L = (Z(ax + by + c), ax + by + c),$$

con $a, b, c \in \mathbb{K}$.

- Le coniche affini sono curve piane algebriche di grado 2:

$$C = (Z(a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + b_0x + b_1y + c), a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + b_0x + b_1y + c).$$

Definizione 2.0.4. Se $f(x, y) = f_1(x, y)^{\mu_1} \cdot f_2(x, y)^{\mu_2} \cdot f_r(x, y)^{\mu_r}$, le curve piane

$$C_i = (Z(f_i), f_i)$$

si chiamano *componenti irriducibili (ridotte)* di C , di molteplicità μ_i .

Osservazione 5. Se $f = f_1 \cdot \dots \cdot f_r$, allora $Z(f) = Z(f_1) \cup \dots \cup Z(f_r)$.

Definizione 2.0.5. Se $f(x, y)$ è un polinomio irriducibile, la curva $(Z(f), f)$ si dice *curva irriducibile*.

Se $f(x, y)$ è un polinomio ridotto, la curva $(Z(f), f)$ si dice *curva ridotta*.

Esempi 2.0.6. • Sia $f = y^2 - x(x - 1)(x - 2)$. La curva $(Z(f), f)$ è una *cubica liscia irriducibile*.

- Sia $f = y^2 - x^3$. La curva $(Z(f), f)$ è una *cubica cuspidata irriducibile*.
- Sia $f = x(x - 1)(x - 2)$. La curva $(Z(f), f)$ è una *cubica riducibile ridotta irriducibile*.
- Sia $f = xy^2$. La curva $(Z(f), f)$ è una *cubica riducibile non ridotta irriducibile*. Anche $f = x^3$ determina una cubica riducibile non ridotta.

2.1 Ipersuperfici affini

In modo perfettamente analogo si possono definire le ipersuperfici affini.

Definizione 2.1.1. Una *ipersuperficie algebrica affine* X è una coppia

$$X = (Z(f), f),$$

con $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ polinomio non costante (quindi di grado ≥ 1).

Il luogo $Z(f) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ verrà chiamato *supporto di C* . L'equazione $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ si dirà equazione di C .

Il *grado* di C è per definizione il grado del polinomio f .

Esempi 2.1.2. Se $n = 3$, un'ipersuperficie si dice *superficie*. Quando il grado è 1 si tratta di un piano affine. Se il grado è 2, parliamo di superficie quadrica.

2.2 Comportamento sotto affinità

Consideriamo un'affinità $\alpha : \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$. Se $(x_1, y_1) = \alpha((x, y))$, possiamo scrivere delle equazioni del tipo

$$\begin{cases} x_1 = ax + by + c \\ y_1 = dx + ey + h, \end{cases}$$

con $\det \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \neq 0$. Data una curva $(Z(f), f)$, si ha

$$P_1 \in \alpha(Z(f)) \iff \alpha^{-1}(P_1) \in Z(f) \iff f(\alpha^{-1}(P_1)) = 0.$$

Se fissiamo una rappresentazione per α^{-1} :

$$\begin{cases} x = a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 \\ y = d_1x_1 + e_1y_1 + h_1, \end{cases}$$

otteniamo la condizione

$$f(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1, d_1x_1 + e_1y_1 + h_1) = 0.$$

Ponendo $f_1(x_1, y_1) := f(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1, d_1x_1 + e_1y_1 + h_1)$, si ha quindi

$$\alpha(Z(f)) = Z(f_1).$$

Definizione 2.2.1. Diremo che la curva algebrica $(Z(f_1), f_1)$ è immagine della curva $(Z(f), f)$ nell'affinità α .

Due curve affini si dicono *affinemente equivalenti* se una è immagine dell'altra tramite un'affinità.

Vogliamo ora capire se un'affinità conserva il grado. A questo scopo consideriamo ogni monomio che appare in f :

$$\begin{aligned} f &= \dots + qx^ky^h + \dots \\ f_1 &= \dots + q(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1)^k(d_1x_1 + e_1y_1 + h_1)^h + \dots \end{aligned}$$

quindi il grado non può aumentare: $\deg f \geq \deg f_1$.

Applicando poi l'affinità inversa, troviamo che vale anche $\deg f_1 \geq \deg f$.

Riassumendo:

Lemma 2.2.2. Sia $\alpha : \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$ un'affinità. Allora α manda curve algebriche in curve algebriche dello stesso grado.

- Esercizi 1.**
1. Si dimostri che ogni affinità conserva il numero di fattori irriducibili di un polinomio $f(x, y)$.
 2. Si dimostri che ogni affinità conserva la molteplicità di ogni fattore irriducibile di un polinomio. $f(x, y)$