Lezione 24 settembre 2024

martedì 24 settembre 2024 17:09

Parleremo di curve alg. piane affini e proiettive.

Sono una generalizzazione delle RETTE:

$$ax+by+c=0$$

e delle coniche:

$$a_0x^2+a_1xy+a_2y^2+b_0x+b_1y+c=0$$

eq. in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ piano affine.

* * *

PRELIMINARI & RICHIAMI:

Sia V sv (spazio vettoriale) su $\mathbb{K}$ campo, $\dim V = n < \infty$

Def: Uno SPAZIO AFFINE su V è $\mathbb{A} \neq \emptyset$ insieme, con una applicazione

$$t : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to V \quad \text{tale che}$$

(A1) $\forall\ P, Q, R \in \mathbb{A}$, si ha

$$t(P,Q) + t(Q,R) = t(P,R)$$

(altra notazione: $t(P,Q) =: \overrightarrow{PQ}$)

(A2) $\forall\ P \in \mathbb{A}$, l'applicazione

$$t(P,\cdot): A \longrightarrow V$$
$$Q \rightsquigarrow t(P,Q)$$

è biiettiva

Gli elementi di $\mathbb{A}$ si chiamano PUNTI.

Poniamo $\dim \mathbb{A} := \dim V = n$

SPAZIO AFFINE STANDARD:

se $V = \mathbb{K}^n$; scelgo $\mathbb{A} = \mathbb{K}^n$

e definisco $t: \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to V$

$t: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$

Gli elementi di $\mathbb{A} = \mathbb{K}^n$ sono n-ple di scalari, che denoteremo IN ORIZZONTALE

$P \in \mathbb{A}$, $P = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

Gli elementi di $V = \mathbb{K}^n$, li indicheremo IN VERTICALE $v \in \mathbb{K}^n$,

$$v = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Def. $t: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$

$$f\Big(\underbrace{(a_1, a_2, \dots, a_n)}_{=P}, \underbrace{(b_1, b_2, \dots, b_n)}_{=Q}\Big) = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ \vdots \\ b_n - a_n \end{pmatrix}$$

Def: Lo SA standard si denota con

$$\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} .$$

Def: RIFERIMENTO AFFINE

è il dato di un punto $O \in \mathbb{A}$ e una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V

COORDINATE AFFINI di $P \in \mathbb{A}$:

Cons. il vettore $f(O, P) = \overrightarrow{OP}$ e le sue coord. nella $\mathcal{B}$

$$\overrightarrow{OP} = d_1 v_1 + d_2 v_2 + \dots + d_n v_n$$

$\Rightarrow$ le coordinate di P sono $(d_1, d_2, \dots, d_n)$

CASO STANDARD : $\mathbb{A} = \mathbb{K}^n$
$V = \mathbb{K}^n$

La scelta più semplice :

$$O = (0, 0, \dots, 0)$$

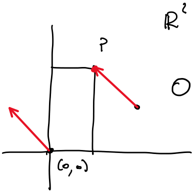
$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ base canonica di $\mathbb{K}^n$

Con questa scelta: se $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$

$$\overrightarrow{OP} = P - O = \begin{pmatrix} p_1 - 0 \\ p_2 - 0 \\ \vdots \\ p_n - 0 \end{pmatrix}$$

le coordinate sono uguali alle componenti

$(p_1, p_2, \dots, p_n)$



* * *

ANELLI DI POLINOMI:

$\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ anello dei pol.

nelle indet. $x_1, \dots, x_n$, e coefficienti
in $\mathbb{K}$

è SV su $\mathbb{K}$, di dimensione infinita
(rivedere Geo 1)
Insieme di generatori: $\{$tutti i possibili monomi monici in $x_1, \dots, x_n\}$

$= \{1, x_1, x_2, .., x_n, x_1^2, x_1 x_2, .., x_1 x_n, ..., x_n^2, x_1^3, ...\}$

Proprietà: $K[x_1, .., x_n]$ è UFD (dominio a fattorizz. unica):

$$f = f_1^{\mu_1} \cdot f_2^{\mu_2} \cdots f_r^{\mu_r}$$: è unica a meno di permutazioni e di molt. per scalari $\neq 0$

con f_i POL. IRRIDUC.

$\mu_i \geq 1$ MOLTEPLICITÀ

$$f = (a \cdot f_1^{\mu_1}) \cdot \left(\frac{1}{a} f_2^{\mu_2}\right) \cdots f_r^{\mu_r}, \quad a \neq 0$$

Es.: in $\mathbb{R}[x]$: $x-1$ è irriduc.

x^2+1 è irriduc.

in $\mathbb{C}[x]$: per Teo. Fond. Alg

e il Teo di Ruffini

(cioè: $f(p) = 0 \iff f(x) = (x-p) \cdot g(x)$)

gli unici irriducibili sono: pol. lineari $ax+b$.

in $\mathbb{C}[x,y]$: x^2+y^2-1 è irriduc.
$y-x^2$ è irriduc. } ESERCIZIO

Per assurd: $y-x^2=(a_1x+a_2y+a_3)\cdot(b_1x+b_2y+b_3)$

CURVE PIANE ALG. AFFINI

Cons. $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$, e cons. $\mathbb{K}=\mathbb{C},\mathbb{R}$

Def.: Dato $P=(p_1,p_2)\in\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$, $f\in\mathbb{K}[x,y]$

$f(p)$: valutazione di f nella coppia $x=p_1$
$y=p_2$

$f(p)\in\mathbb{K}$

Def.: Dato $f\in\mathbb{K}[x,y]$

$$Z(f):=\{P\in\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} : f(P)=0\}$$

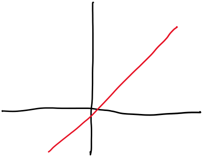
LUOGO DEGLI ZERI DI f

Def. CURVA ALG. è una coppia

$$C=(Z(f),f)$$, $f\in\mathbb{K}[x,y]$ non costante

Oss.: $Z(f)$ può coincidere per polinomi diversi:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{rette}}}{Z(y-x)} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{rette doppie}}}{Z\left((y-x)^2\right)}$$



Coniche: $Z(f)$, f pol. di grado 2

Def. Se f è RIDUCIBILE:

$$f = f_1 \cdot f_2$$

$$Z(f) = Z(f_1 \cdot f_2) = \{P \in \mathbb{A}^2 \mid \underbrace{(f_1 \cdot f_2)(P)}_{\substack{\parallel \\ \underbrace{f_1(P) \cdot f_2(P)}_{\in K} = 0}} = 0\}$$

$$= Z(f_1) \cup Z(f_2)$$

$(Z(f), f) = C$ si dice RIDUCIBILE.