25 settembre

Fare gli esercizi sezioni 0.6 e 0.7

Esercizio Dimostrare che $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$ e $\forall\, n \in \mathbb{N}$ si ha

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{j=1}^{n} a^{n-j}\, b^{j-1}$$

Formula del binomio di Newton

Sia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e definiamo $n!$ n fattoriale

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$n! = 1 \cdot \ldots \cdot n$$

Coefficienti binomiali

$n \geq 0$ intero $\qquad 0 \leq k \leq n \qquad k$ intero

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!}$$

$$\binom{n}{0} = 1 \quad , \quad \binom{n}{1} = \frac{n}{1!} = n$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))\,(n-k)(n-(k+1))\cdots 1}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad n \geq k \geq 0$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(\cancel{n}-(\cancel{n}-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{0} = \frac{\cancel{n!}}{\underset{\substack{\parallel \\ 1}}{0!}\,\cancel{n!}} = 1 = \binom{n}{n-0} = \binom{n}{n}$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{\underset{\substack{\parallel \\ 1}}{1!}\,(n-1)!} = \frac{n \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n = \binom{n}{n-1}$$

Teorema (Formula del binomio di Newton)

Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ ed ogni $n \geq 0$ intero si ha

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Lemma Abbiamo la seguente formula

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Dim

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!\,(n-k)} + \frac{(n-1)!}{k\,(k-1)!\,(n-1-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!} \left[\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right]$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!} \quad \frac{\cancel{k} + n - \cancel{k}}{(n-k)\,k}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!} \quad \frac{n}{(n-k)\;k}$$

$$= \frac{n!}{k!\quad (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Triangolo di Tartaglia $\quad (a+b)^5 = ?$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

$= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$

$\binom{5}{0} \; \binom{5}{1} \; \binom{5}{2} \; \binom{5}{3} \; \binom{5}{4} \; \binom{5}{5}$

$10 = 4 + 6$

$10 = \binom{5}{2} = \binom{5}{3}$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$10 = \binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6$$

$\binom{4}{1} = 4$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4 \cdot 3!}{4} = 6$$

$\mathbb{Z} = \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$ interi

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a\in\mathbb{Z} \text{ e } b\in\mathbb{Z}^* \right\}$

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$\mathbb{R}$ $\qquad x \geq y$ $\qquad \phi$

$x > y$

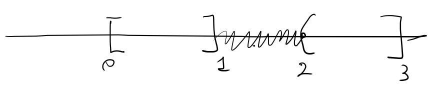
Osservazione: L'insieme dei numeri reali soddisfa l'Assioma di Completezza.

~~Definizione~~ Dati due sottoinsiemi non vuoti
$A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ $\qquad A \neq \phi$ e $B \neq \phi$
Se $a \leq b$ $\quad \forall a \in A$ e $\forall b \in B$

diciamo che la coppia (A,B) è separata.

Es $A = [0,1] = \{x\in\mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$

$B = (2,3] = \{x\in\mathbb{R} : 2 < x \leq 3\}$



$a \leq 1 < 2 < b \qquad \forall a\in A$ e $b\in B$

$\Longrightarrow a < b \qquad \forall a\in A$ e $b \in B$

Def Data una coppia separata (A,B) un numero $c\in\mathbb{R}$ t.c. $a \leq c \leq b$ $\forall a\in A$ e $\forall b\in B$ è detto un elemento di separazione per la coppia.

$A=[0,1] \qquad B=(2,3]$

Nell'esempio precedente l'insieme degli elementi di separazione è $[1,2]$

Assioma di Completezza Data una qualsiasi coppia separata (A,B) $\exists c\in\mathbb{R}$ che è un elemento di separazione.

Definizione Un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice limitato superiormente se esiste $c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$x \le c \qquad \forall x \in X.$$

Un insieme non limitato superiormente si dice illimitato superiormente.

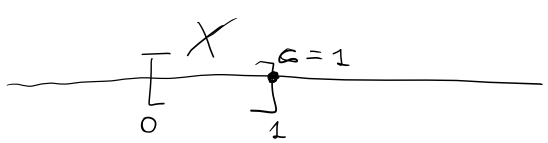
Esercizio Formulate la corrispondente definizione di limitato e di illimitato inferiormente

Def Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ limitato superiormente. Diremo che un numero c è l'estremo superiore di X se soddisfa le seguenti due proprietà

1) $x \le c \qquad \forall x \in X$

2) $x \le y \quad \forall x \in X \implies y \ge c$

$c = \sup X$



Lemma Se esiste il sup è unico.

Dim (per assurdo) Se l'enunciato è falso esiste un $X \subseteq \mathbb{R}$ con almeno due estremi superiori.

Scegliamone due c_1 e c_2 $(c_1 \neq c_2)$ $c_1 < c_2$

Se c_1 è un estremo superiore allora

$x \le c_1 \quad \forall x \in X$ per la 1) applicata a c_1

Per la proprietà 2) applicata a c_2

$$x \le c_1 \quad \forall x \in X \implies c_1 \ge c_2 > c_1 \implies c_1 > c_1$$

Assurdo.

<u>Teorema</u> $\forall\ X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente, esiste $\sup X$.

<u>Dim</u> Consideriamo l'insieme X e sia

$$Y = \{ y \in \mathbb{R} : x \leq y \quad \forall x \in X \}$$

Risulta $Y \neq \emptyset$. ~~Si~~ un (X, Y) è una coppia separata. Porremo $\sup X =$ un elemento di separazione.