16/11/2021

Es 1

I) Singolarità in : $z^n + 1 = 0$

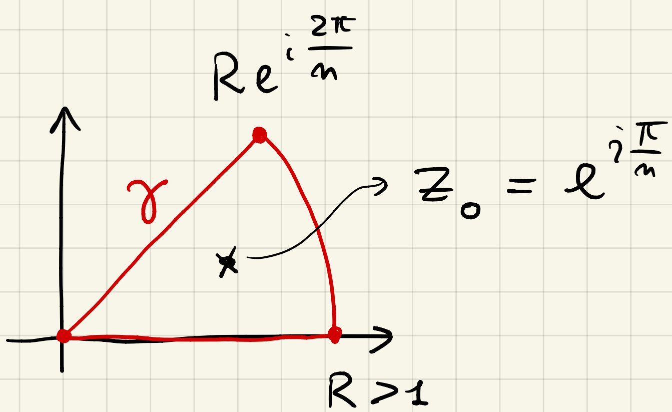
$$\Rightarrow z = z_k = e^{i\frac{\pi}{n} + i\frac{2\pi k}{n}} \quad , \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

n poli di ordine 1.

A infinito: $f(z) \underset{z\to\infty}{=} \frac{1}{z^n}\left(1 + O\left(\frac{1}{z^n}\right)\right)$

$\underset{z\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow$ non c'è singolarità.

II)



L'unica singolarità contenuta dentro γ è il polo di ordine 1 in $z = z_0$. Quindi:

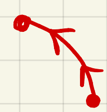
$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \, \mathrm{Res}_f(z_0)$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to z_0} (z - z_0)\frac{1}{1+z^n}$$

$$= 2\pi i \, \frac{1}{\dfrac{(z^n+1)-(z_0^n+1)}{z-z_0}}$$ → posso aggiungere perché $z_0^n+1=0$

$$= 2\pi i \, \frac{1}{\dfrac{d}{dz}(z^n+1)\Big|_{z=z_0}} = 2\pi i \, \frac{1}{n\, z_0^{n-1}}$$

$$= 2\pi i \, \frac{e^{i\frac{\pi}{n}(-n+1)}}{n} = 2\pi i \, \frac{e^{-i\pi + i\frac{\pi}{n}}}{n} = -\frac{2\pi i \, e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}.$$

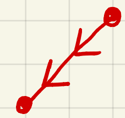
III) Chiamando γ_{arco} il pezzo del cammino dato dall'arco:  , abbiamo:

$$\left| \int_{\gamma_{arco}} f(z)\,dz \right| \leq L(\gamma_{arco}) \max_{z\in\gamma_{arco}} |f(z)|$$

$$L(\gamma_{arco}) = R\,\frac{2\pi}{n}$$

$$\max_{z\in\gamma_{arco}} |f(z)| \underset{R\to\infty}{=} \frac{1}{R^n}\left(1+O\left(\frac{1}{R^n}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\gamma_{arco}} f(z)\,dz \right| \leq \frac{2\pi}{n}\, R\, \frac{1}{R^n}\left(1+O\left(\frac{1}{R^n}\right)\right) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Denotando con $\gamma_{\frac{2\pi i}{n}}$ il tratto di cammino dato dal segmento inclinato:  , abbiamo:

$$\int_{\gamma_{\frac{2\pi i}{n}}} f(z)\,dz = -\int_0^R dx\, e^{\frac{2\pi i}{n}} \frac{1}{\left(x e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^n + 1}$$

[parametrizzazione:

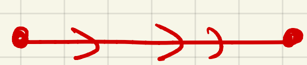
$z = x e^{i\frac{2\pi}{n}}, \quad x \in [0, R]$]

orientazione da R a 0

$$= -e^{\frac{2\pi i}{n}} \int_0^R dx \frac{1}{x^n e^{2\pi i} + 1} = -e^{\frac{2\pi i}{n}} \int_0^R dx \frac{1}{x^n + 1}$$

Nel limite $R \to +\infty$ troviamo dunque:

$$\int_{\gamma_{\frac{2\pi i}{n}}} f(z)\,dz \xrightarrow[R\to\infty]{} -e^{\frac{2\pi i}{n}} \int_0^{+\infty} dx \frac{1}{x^n+1} = -e^{\frac{2\pi i}{n}} I_n .$$

Notiamo infine che, detto γ_0 il tratto di cammino orizzontale:  , abbiamo:

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_0^R dx \frac{1}{1+x^n} \xrightarrow[R\to+\infty]{} I_n$$

parametrizzazione

$z = x, \quad x \in [0, R]$

Pertanto abbiamo:

$$\lim_{R\to\infty} \oint_\gamma f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty}\left[\left(\int_{\gamma_{arco}} + \int_{\gamma_{\frac{2\pi i}{n}}} + \int_{\gamma_0}\right) f(z)dz\right]$$

$$= \left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right) I_n$$

Quindi:
$$\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right) I_n = -\frac{2\pi i}{n} e^{i\frac{\pi}{n}}$$

$$\Rightarrow \quad I_n = \frac{2\pi i}{n} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1}$$

$$= \frac{2\pi i}{n} \frac{1}{e^{\frac{\pi i}{n}} - e^{-\frac{\pi i}{n}}}$$

$$= \frac{2\pi i}{n} \frac{1}{2i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Es 2

I) $$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f(t)\, e^{i\omega t}$$

$$= \int_{-R}^{+R} dt\, f(t)\, e^{i\omega t}$$ perché $f = 0$ fuori da $[-R, R]$

Seguendo il suggerimento, consideriamo

lo stesso integrale con $z \in \mathbb{C}$ al posto di ω:

$$\int_{-R}^{+R} dt\, f(t)\, e^{izt}$$

$\hookrightarrow$ grazie al fatto che stiamo integrando solo su un intervallo questo integrale converge per $\forall z \in \mathbb{C}$. Infatti su un intervallo se una funzione è in $L^2([-R,R])$ allora è necessariamente anche in $L^1([-R,R])$

e abbiamo: $$\left| \int_{-R}^{+R} dt\, f(t)\, e^{izt} \right|$$

$$\leq \int_{-R}^{+R} dt\, |f(t)|\, e^{-\mathrm{Im}(z)t}$$

$$\leq \underbrace{e^{|\mathrm{Im}(z)|R}} \int_{-R}^{+R} dt\, |f(t)| < \infty .$$

(da qui si vede che non funziona per $R \to \infty$).

$$F(z) \equiv \int_{-R}^{+R} dt\, f(t)\, e^{izt} \quad \text{è anche analitica}$$

perché: $$\frac{d}{dz} F(z) = \int_{-R}^{+R} dt\, \underbrace{(it)\, f(t)\, e^{izt}}_{\text{converge per lo stesso motivo}}$$

quindi $F(z)$ è derivabile in senso complesso e quindi analitica. $F(z=\omega\in\mathbb{R}) = \hat{f}(\omega)$ quindi $\hat{f}(\omega)$ è la restrizione all'asse reale della funzione analitica $F(z)$.

Se $F(z)$ è limitata nell'intorno di $z=\infty$

$\Rightarrow$ per teorema di Liouville $F(z)$ è costante.

$\Rightarrow$ $\hat{f}(\omega)$ è una costante. Ma $\hat{f}\in L^2(\mathbb{R})$ e l'unica funzione costante in $L^2(\mathbb{R})$ è la funzione $=0$. Dunque $\hat{f}(\omega)=0$ e anche $f(t)=0$.

II) $f(x) = x\,\theta\left(\frac{1}{2} - |x-\frac{3}{2}|\right) + x\,\theta\left(\frac{1}{2} - |x+\frac{3}{2}|\right)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\, e^{i\omega x} = \int_{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} dx\, x\, e^{i\omega x} + \int_{+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}^{+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} dx\, x\, e^{i\omega x}$$

$$= \int_{-2}^{-1} dx\, x\, e^{i\omega x} + \int_{1}^{2} dx\, x\, e^{i\omega x}$$

$$= -i \frac{d}{d\omega} \int_{-2}^{-1} dx\, e^{i\omega x} - i \frac{d}{d\omega} \int_{1}^{2} dx\, e^{i\omega x}$$

$$= -i \frac{d}{d\omega} \frac{1}{i\omega}\left(e^{-i\omega} - e^{-2i\omega}\right) - i \frac{d}{d\omega} \frac{1}{i\omega}\left(e^{2i\omega} - e^{i\omega}\right)$$

$$= -\frac{d}{d\omega} \frac{1}{\omega}\left(e^{-i\omega} - e^{-2i\omega}\right) - \frac{d}{d\omega} \frac{1}{\omega}\left(e^{2i\omega} - e^{i\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{\omega^2}\left(e^{-i\omega} - e^{-2i\omega} + e^{2i\omega} - e^{i\omega}\right)$$

$$+ \frac{1}{\omega}\left(i e^{-i\omega} - 2i\, e^{-2i\omega} - 2i\, e^{2i\omega} + i\, e^{i\omega}\right)$$

$$= -2i \frac{\sin(\omega) - \sin(2\omega)}{\omega^2} + 2i \frac{\cos(\omega) - 2\cos(2\omega)}{\omega}$$

$$= \frac{2i}{\omega^2}\left(\omega\cos(\omega) - 2\omega\cos(2\omega) - \sin(\omega) + \sin(2\omega)\right)$$

$$F(z) = \frac{2i}{z^2}\left(z\cos z - 2z\cos(2z) - \sin z + \sin(2z)\right)$$

è analitica $\forall z \in \mathbb{C}$, infatti per $z \to 0$

$$z\cos z - 2z\cos(2z) - \sin z + \sin(2z)$$

$$\underset{z\to 0}{=} \cancel{z} - \cancel{2z} - \cancel{z} + \cancel{2z} + O(z^3) = \underbrace{O(z^3)}$$

cancella z^2 al denominatore.

26/02/21

Es 2

I) $\quad -i\omega\,\hat{F}(\omega) = \hat{f}(\omega) + C$

$\downarrow$

usando $\widehat{\delta(t)}(\omega) = 1$

Prendendo $\omega=0$: $\quad C = -\hat{f}(0)$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f(t)\, e^{i\omega t}\Big|_{\omega=0}$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f(t)$$

$$\lim_{t\to 0^+} F(t) = \lim_{t\to 0^+}\left[-\int_t^{+\infty} dt\, f(t)\right] = -\int_0^{+\infty} dt\, f(t)$$

$$\lim_{t\to 0^-} F(t) = \lim_{t\to 0^-}\int_{-\infty}^{t} dt\, f(t) = \int_{-\infty}^{0} dt\, f(t)$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0^+} F(t) - \lim_{t\to 0^-} F(t) = -\left(\int_0^{\infty} dt + \int_{-\infty}^{0} dt\right) f(t)$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f(t) = -C$$

II) $f(t) = \frac{\sin t}{t}$

$$\hat{f}(\omega) = \pi\,\theta(1-|\omega|) \leftarrow \text{suggerimento}$$

$$-i\omega\,\hat{F}(\omega) = \pi\,\theta(1-|\omega|) + C$$

$$C = -\int_{-\infty}^{+\infty} dt\,\frac{\sin t}{t} = -\hat{f}(0) = -\pi$$

$$\Rightarrow \quad -i\omega\,\hat{F}(\omega) = \pi\left(\theta(1-|\omega|) - 1\right)$$

$$\hat{F}(\omega) = i\,\frac{\pi}{\omega}\underbrace{\left(\theta(1-|\omega|) - 1\right)}_{\begin{cases} 1-1=0, & \text{per } -1 \leq \omega \leq 1 \\ 0-1=-1, & \text{per } \omega > 1 \text{ e } \omega < -1 \end{cases}}$$

$$\Downarrow$$

$$= -i\,\frac{\pi}{\omega}\,\theta(|\omega|-1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\,(F(t))^2 \underset{\substack{\downarrow \\ F(t)\in\mathbb{R}}}{=} \|F\|^2_{L^2} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Parseval}}}{=} \frac{1}{2\pi}\|\hat{F}\|_{L^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\,\frac{\pi^2}{\omega^2}\,\theta(|\omega|-1) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{+1}^{+\infty} d\omega + \int_{-\infty}^{-1} d\omega\right)\frac{\pi^2}{\omega^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\pi^2 \left[\left(-\frac{1}{\omega}\right)\Bigg|_{+1}^{+\infty} + \left(-\frac{1}{\omega}\right)_{-\infty}^{-1} \right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[+1+1\right] = \pi .$$