Durata: 5 ore.

Esercizio 1

Dato un parametro reale $\alpha > 0$ considera la funzione di variabile complessa

$$f_\alpha(z) = \alpha^{-z}\,\Gamma(z) \ .$$

I - (2 punti) Elenca le singolarità di $f_\alpha(z)$ (anche eventualmente a $z = \infty$), e se le singolarità sono isolate descrivine il tipo.

[Ricorda che la funzione $\Gamma(z)$ è analitica sull'intero piano complesso con l'eccezione dei punti $z = -k$, $k \in \mathbb{N}$. In tali punti $\Gamma(z)$ ha un polo semplice con residuo

$$\mathrm{Res}_\Gamma(-k) = \frac{(-1)^k}{k!} \ .]$$

II - (4 punti) Considera l'integrale (funzione del parametro α)

$$I(\alpha) = \int_{\gamma(c)} \frac{dz}{2\pi i}\, f_\alpha(z) \ ,$$

dove il cammino $\gamma(c) = \{z = c + iy \mid y \in \mathbb{R}\}$ è una retta parallela all'asse immaginario, orientata da $-i\infty$ a $+i\infty$, con ascissa $\mathrm{Re}(z) = c > 0$. Questo integrale converge perché $\Gamma(c + iy)$ tende a zero esponenzialmente per grande $|y|$. Spiega perché $I(\alpha)$ non dipende dalla scelta di $c > 0$. Prendi una derivata rispetto al parametro α (puoi portare la derivata dentro l'integrale) e mostra che

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = -I(\alpha) \ ,$$

la cui soluzione è $I(\alpha) = Ce^{-\alpha}$ con C costante arbitraria.

II - (5 punti) Considera l'integrale

$$\int_{\gamma(c,R)} \frac{dz}{2\pi i}\, f_\alpha(z)$$

sul cammino $\gamma(c, R)$ mostrato in figura 1, costituito da un segmento parallelo all'asse immaginario orientato da $c - iR$ a $c + iR$, e chiuso a sinistra da un semicerchio di raggio R centrato in c. Scrivi questo integrale come somma sui residui interni, e mostra che questa somma converge nel limite $R \to \infty$. Dando per buono che il contributo del semicerchio tenda a zero nel limite $R \to \infty$, usa questo per calcolare $I(\alpha)$, e fissare così la costante arbitraria C trovata al punto II.

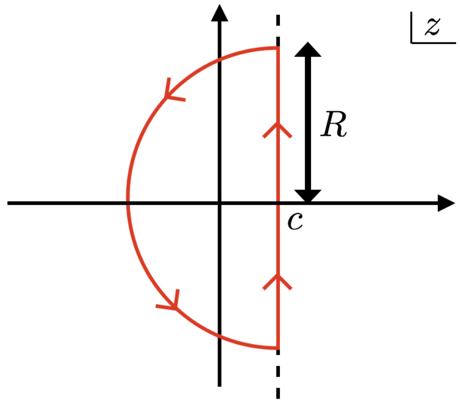

Figure 1

Esercizio 2

Considera $F_T \in L^2(\mathbb{R})$ definita da

$$F_T(t) = \begin{cases} 1 - |\frac{t}{T}| & , \text{ per } t \in [-T, T] \ , \\ 0 & , \text{ altrimenti } , \end{cases}$$

dove T è un parametro reale positivo.

I - (3 punti) Mostra che il limite $\lim_{T\to+\infty} F_T$ non esiste in norma $L^2(\mathbb{R})$, ma esiste nel senso delle distribuzioni ed è la funzione costante 1.

II - (2 punti) Usa che $\lim_{T\to+\infty} F_T = 1$ per ottenere il limite per $T \to +\infty$ nel senso delle distribuzioni della trasformata di Fourier $\hat{F_T}(\omega)$, senza calcolare esplicitamente la trasformata.

III - (5 punti) Calcola la trasformata di Fourier $\hat{F_T}(\omega)$ e verifica il limite nel senso delle distribuzioni ottenuto al punto precedente.

[*Suggerimento:* Per calcolare gli integrali di $\left(1 \pm \frac{t}{T}\right) e^{i\omega t}$, scrivi $e^{i\omega t} = \frac{1}{i\omega}\frac{d}{dt}e^{i\omega t}$ e integra per parti. Per il passaggio finale potresti aver bisogno di uno di questi integrali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \, \frac{1-\cos(y)}{y^2} = \pi \ ,$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \, \frac{\sin(y)^2}{y^2} = \pi \ .]$$

Esercizio 3

Considera il seguente sistema ortonormale completo (s.o.c.) su $L^2([-L, L])$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{k\pi x}{L} \right), \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{(k - \frac{1}{2})\pi x}{L} \right) \right\}_{k \geq 1} . \tag{1}$$

Questo sistema si può caratterizzare come il s.o.c. delle autofunzioni $f(x)$ dell'operatore $-\frac{d^2}{dx^2}$ con condizioni al contorno $f'(-L) = f'(L) = 0$. L'obiettivo di questo esercizio è di ricavare e applicare il s.o.c. delle autofunzioni con condizioni al contorno "miste" $f(-L) = f'(L) = 0$.

I - (4 punti) Data una funzione $g(y) \in L^2([0, L])$, associa ad essa una funzione $g^{\text{ext}}(x) \in L^2([-L, L])$ ottenuta da $g(y)$ estendendo *con legge dispari*, ovvero

$$g^{\text{ext}}(x) = \begin{cases} g(x) \ , & 0 \leq x \leq L \\ -g(-x) \ , & -L \leq x < 0 \ . \end{cases}$$

Cosa si può dire sui coefficienti di Fourier della funzione $g^{\text{ext}}(x)$ nel s.o.c. (1)? Usa questo per dedurre che le sole funzioni seno di (1), ristrette a $[0, L]$, formano un s.o.c. su $L^2([0, L])$. Infine fai il cambio di variabile $y = \frac{x+L}{2}$ da $y \in [0, L]$ a $x \in [-L, L]$ e ottieni che

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{(k - \frac{1}{2})\pi(x + L)}{2L} \right) \right\}_{k \geq 1} , \tag{2}$$

è s.o.c. su $L^2([-L, L])$. Verifica che le funzioni di questo s.o.c. sono autofunzioni di $-\frac{d^2}{dx^2}$ con la condizione al contorno $f(-L) = f'(L) = 0$.

II - (4 punti) Trova i coefficienti di Fourier della funzione costante $F(x) = c$ nel s.o.c. (2). Quindi usa l'identità di Parseval per ottenere che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \ .$$

III - (4 punti) Considera l'equazione

$$-\frac{d^2 f}{dx^2} = F(x) \ ,$$

per la funzione $f(x)$ con $x \in [-L, L]$ con condizioni al contorno $f(-L) = f'(L) = 0$. Nel caso in cui la forza esterna è una costante $F(x) = c$, trova i coefficienti di Fourier di $f(x)$ nel s.o.c. (2).