Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{z^4(\sin(\frac{1}{z}) - \frac{1}{z})}{z^2+1} .$$

I - (5 punti) Si discutano le singolarità di $f(z)$, indicandone il tipo, incluso eventualmente il punto all'infinito.

II - (6 punti) Si calcoli

$$\oint_{\gamma_{0,2}} dz\, f(z) ,$$

dove $\gamma_{0,2}$ indica il cammino circolare centrato nell'origine di raggio 2, orientato in senso antiorario.

Esercizio 2

Si consideri $F(t)$ funzione in $L^2(\mathbb{R})$ tale che

$$\hat{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} ,$$

dove T è un parametro reale.

I - (4 punti) Si usi l'espressione di $\hat{F}(\omega)$ per stabilire per quali valori del numero naturale k la derivata k-esima $F^{(k)}(t)$ possa esistere come funzione in $L^2(\mathbb{R})$.

II -(5 punti) Similmente, si determini quando $t^k F(t)$ è in $L^2(\mathbb{R})$, e si discuta anche se è possibile escludere che $F(t)$ e $t^k F(t)$ siano in $L^1(\mathbb{R})$.

III -(4 punti) Si usi l'espressione di $\hat{F}(\omega)$ per calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)^2$.

Esercizio 3

Si consideri lo spazio di Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}; e^{-x^2}dx)$ che è definito come lo spazio delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ con la proprietá che il seguente integrale converge

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2} |f(x)|^2 < \infty ,$$

con il prodotto scalare dato da

$$(f,g)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,e^{-x^2}f(x)^*\,g(x)\ .$$

I - (3 punti) Si mostri che l'operatore $U:L^2(\mathbb{R})\to\mathcal{H}$ definito su una generica $f\in L^2(\mathbb{R})$ come

$$U[f](x)=e^{\frac{x^2}{2}}f(x)\ ,$$

è un operatore unitario.

II - (6 punti) Un sistema ortonormale completo in $\mathcal{H}$ è dato

$$e^{(n)}(x)=\frac{H_{n-1}(x)}{\sqrt{2^{n-1}\sqrt{\pi}(n-1)!}}\ ,\ \ n\geq 1\ ,$$

dove $H_{n-1}(x)$ sono i *polinomi di Hermite*, polinomi di grado $n-1$ a valori in $\mathbb{R}$, di cui i primi sono

$$H_0(x)=1\ ,\ \ H_1(x)=2x\ ,\ \ H_2(x)=-2+4x^2\ ,\ldots\ .$$

Denotando con $\{a_n\}_{n\geq1}$ la successione definita dal seguente integrale

$$a_n=\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{-2x^2}e^{(n)}(x)=\begin{cases}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{2\sqrt{\pi}(n-1)!}}\ , & \text{per } n \text{ dispari,}\\ 0\ , & \text{per } n \text{ pari,}\end{cases}\ ,$$

si usi quanto spiegato sopra per calcolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|^2\ .$$