Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Una funzione di variabile complessa $F(z)$ ha le seguenti proprietà

- Ha un taglio sull'asse reale tra -1 e $+1$, e vale $\lim_{\epsilon\to 0^+} [F(x+i\epsilon)+F(x-i\epsilon)] = x$ per qualsiasi x sull'asse reale tra -1 e $+1$;
- È olomorfa in tutti i punti del piano complesso escluso questo taglio;
- Il primo termine dello sviluppo di Taylor per $z \to \infty$ è $F(z) \underset{z\to\infty}{=} \frac{c}{z} + \mathcal{O}(\frac{1}{z^2})$;
- $F(z)$ è limitata nell'intorno dei punti di diramazione $z = \pm 1$.

L'obiettivo dell'esercizio è determinare la funzione $F(z)$.

I - (4 punti) Considera la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z-w} \frac{F(z)}{\sqrt{z-1}\sqrt{z+1}}$$

dipendente da un parametro complesso w che è fuori dall'intervallo $[-1,1]$ dell'asse reale. Per le funzioni radice quadrata usa il ramo principale. Usando le ipotesi date sulla funzione $F(z)$, elenca le singolarità di $f(z)$, incluso eventualmente il punto $z = \infty$.

II - (6 punti) Considera l'integrale della funzione $f(z)$ su un cammino chiuso che include al suo interno l'intervallo tra -1 e 1 dell'asse reale, e tale che w si trovi all'esterno di questo cammino. Calcola l'integrale di questo cammino in due modi diversi e confrontando il risultato determina la funzione F. Puoi utilizzare la seguente identità

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}(x-w)} = \pi - \frac{\pi w}{\sqrt{w-1}\sqrt{w+1}} \ .$$

Esercizio 2

La funzione $f(t,x)$ soddisfa l'equazione

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f(t,x) = F(t,x) \ ,$$

con il tempo t variabile reale $t \in \mathbb{R}$ e la coordinata spaziale x ristretta all'intervallo $-L \le x \le L$, e con le condizioni al bordo $f(t,\pm L) = 0$ per ogni t. F è una funzione nota, che pure rispetta $F(t,\pm L) = 0$ per ogni t.

I - (4 punti) Espandi f e F come funzioni della variabile x in un sistema ortonormale completo su $[-L, L]$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{L} \right), \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right\}_{n\geq 1} ,$$

che rispetta la condizione al bordo data. Denota con $\{\alpha_n(t), \beta_n(t)\}_{n\geq 1}$ e con $\{A_n(t), B_n(t)\}_{n\geq 1}$ i coefficienti di Fourier di f e F, rispettivamente, in questo sistema. Quindi scrivi l'equazione risultante $\alpha_n(t)$ e $\beta_n(t)$.

II - (4 punti) Specializzando l'equazione trovata al caso omogeneo $F(t,x) = 0$, mostra che l'unica soluzione con la proprietà che $\alpha_n(t)$ e $\beta_n(t)$ siano funzioni a quadrato sommabile della variabile t è la soluzione nulla $\alpha_n(t) = \beta_n(t) = 0$.

III -(6 punti) Considera ora il caso $F(t,x) = \delta(t)\delta(x)$. Mostra che in questo caso $A_n(t) = \frac{1}{\sqrt{L}}\delta(t)$ e $B_n(t) = 0$, per ogni $n \geq 1$. Quindi considera l'equazione per $\alpha_n(t)$ e applicando la trasformata di Fourier rispetto alla variabile t determina $\widehat{\alpha_n}(\omega)$. Infine calcola l'antitrasformata per ottenere $\alpha_n(t)$.

Esercizio 3

È dato uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ con s.o.c. $\{e^{(n)}\}_{n\geq 1}$. Considera l'operatore definito sul s.o.c.

$$T(e^{(n)}) = e^{(n)} - a_n e^{(1)} ,$$

ed esteso per linerità a un vettore generico, dove $\{a_n\}_{n\geq 1}$ è una successione di numeri complessi.

I -(4 punti) Mostra che l'operatore aggiunto di T è

$$T^\dagger(e^{(n)}) = \begin{cases} e^{(1)} - \sum_{n=1}^\infty a_n^* e^{(n)} , & n = 1 , \\ e^{(n)} , & n > 1 . \end{cases}$$

Quale condizione bisogna imporre sulla successione $\{a_n\}_{n\geq 1}$ affinché $T^\dagger$ risulti ben definito?

II -(5 punti) Considera l'equazione agli autovalori per T

$$T(v) = \lambda v ,$$

e scrivila espandendo il vettore v nel s.o.c.. Mostra quindi che gli unici autovalori possibili per T sono $\lambda = 1$ oppure $\lambda = 1 - a_1$. Per $\lambda = 1$ quale condizione devono soddisfare i coefficienti di Fourier v_n dell'autovettore v nel s.o.c.? Per $\lambda = 1 - a_1$ determina l'autovettore.