Durata: 3 ore.

# Esercizio 1

L'obiettivo di questo esercizio è mostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \ , \tag{1}$$

usando tecniche di analisi complessa. A tal fine, considera la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \tan(\pi z)} \ .$$

**I - (4 punti)** Elenca le singolarità di $f(z)$, indicandone il tipo se sono singolarità isolate, incluso eventualmente il punto $z = \infty$.

**II - (6 punti)** Dato un numero naturale $N \geq 1$, considera il cammino chiuso $\gamma_N$ dato dal quadrato con vertici i quattro punti: $N+\frac{1}{2}+i(N+\frac{1}{2})$, $N+\frac{1}{2}-i(N+\frac{1}{2})$, $-(N+\frac{1}{2})-i(N+\frac{1}{2})$, $-(N+\frac{1}{2})+i(N+\frac{1}{2})$, orientato in senso antiorario. Mostra che

$$\oint_{\gamma_N} f(z)dz = 2\pi i \left[ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} + \mathrm{Res}_f(z=0) \right] \ . \tag{2}$$

**III - (6 punti)** Prendi il limite $N \to \infty$ della relazione (2). Per calcolare il limite di $\oint_{\gamma_N} f(z)dz$ usa il fatto che la funzione $\frac{1}{\tan(\pi z)}$ è limitata su $\gamma_N$ nel limite $N \to \infty$ (lo puoi dare per buono). Calcola $\mathrm{Res}_f(z=0)$ e ottieni quindi il risultato voluto (1).

[*Suggerimento*: Per calcolare $\mathrm{Res}_f(z=0)$ puó essere utile la seguente serie di Taylor attorno a $z=0$: $\tan(\pi z) = \pi z + \frac{\pi^3}{3} z^3 + \mathcal{O}(z^5)$.]

# Esercizio 2

Si considerino le funzioni

$$f_1(x) = \theta(R - |x|) \ , \quad f_2(x) = e^{-\frac{x^2}{L^2}} \ .$$

**I - (3 punti)** Calcola la funzione $(f_1 \star f_2)(x)$, dove $\star$ denota il prodotto di convoluzione (è sufficiente esprimerla come un integrale). Quindi calcolane la derivata $\frac{d}{dx}(f_1 \star f_2)(x)$.

**II -(5 punti)** Usa le proprietá della trasformata di Fourier per esprimere la trasformata $\mathcal{F}[\frac{d}{dx}(f_1 \star f_2)](k)$ in termini delle trasformate $\mathcal{F}[f_1](k)$ e $\mathcal{F}[f_2](k)$. Quindi calcola $\mathcal{F}[f_1](k)$ e $\mathcal{F}[f_2](k)$ (o usa il risultato noto) per ottenere $\mathcal{F}[\frac{d}{dx}(f_1 \star f_2)](k)$. Infine calcolane l'antitrasformata e verifica che il risultato ottenuto coincide con $\frac{d}{dx}(f_1 \star f_2)(x)$ calcolata al punto I.

## Esercizio 3

Considera l'operatore $T_L : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ definito da

$$T_L[f](x) = \frac{1}{x+i} f(x+L) \ ,$$

dove $L$ è un parametro reale.

**I -(4 punti)** Verifica che per qualsiasi $f \in L^2(\mathbb{R})$ vale che $T_L[f] \in L^2(\mathbb{R})$. Poi mostra che per qualsiasi $f \in L^2(\mathbb{R})$ vale: $\lim_{L \to +\infty} ||T_L[f]||^2_{L^2(\mathbb{R})} = 0$.

[*Suggerimento*: Nell'integrale che calcola $||T_L[f]||^2$ fai il cambio di variabili da $x$ a $y = x+L$.]

**II -(5 punti)** Mostra che per qualsiasi $L \in \mathbb{R}$ la norma dell'operatore vale $||T_L|| = 1$.

[*Suggerimento*: Può essere utile considerare la successione di funzioni:
$f_n(x) = \theta(\frac{1}{n} - |x - L|)$, dove $\theta$ denota la theta di Heaviside.]