

Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Considera la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{z^4 + 1}{z^2 + 1} \sinh\left(\frac{\pi}{z}\right) .$$

- I - (4 punti)** Elenca le singolarità di $f(z)$, indicandone il tipo se sono isolate, incluso eventualmente il punto $z = \infty$.
- II - (6 punti)** Calcola il residuo di $f(z)$ in $z = 0$.

Esercizio 2

Considera la seguente funzione della variabile reale t

$$G(t) = \frac{e^{-t^2} - 1}{t^2} .$$

- I - (4 punti)** Determina se le funzioni $G(t)$, $tG(t)$ e $t^2G(t)$ sono in $L^1(\mathbb{R})$ e/o $L^2(\mathbb{R})$.
- II - (4 punti)** Calcola l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \hat{G}(\omega)$ della trasformata di Fourier $\hat{G}(\omega)$ di $G(t)$.
- III - (5 punti)** Calcola la derivata seconda della trasformata di Fourier $\frac{d^2}{d\omega^2} \hat{G}(\omega)$, e spiega in che senso può essere definita questa derivata seconda.

Esercizio 3

Su $L^2([0, +\infty))$ è dato un sistema ortonormale completo di funzioni $\{h^{(n)}(t)\}_{n \geq 1}$, dove $t \geq 0$ indica la variabile sulla semiretta $[0, +\infty)$.

I- (6 punti) Sapendo che

$$e^{-t/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n h^{(n)}(t) , \quad te^{-t/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n h^{(n)}(t) ,$$

calcola le due serie $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^* \alpha_n$.

- II - (4 punti)** Mostra che, detto $g^{(n)}(t) = e^{-t} h^{(n)}(t)$, il sistema $\{g^{(n)}(t)\}_{n \geq 1}$ è completo (non necessariamente ortonormale) su $L^2([0, +\infty))$.