Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Considera la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{(1+z^4)\log\left(1+\frac{z}{2}\right)}{z\sinh(\pi z^2)} \ .$$

I - (5 punti) Elenca le singolarità di $f(z)$, indicandone il tipo se sono isolate, incluso eventualmente il punto $z=\infty$.

II - (6 punti) Prendendo il ramo principale della funzione log, con taglio sull'asse reale negativo e $\mathrm{Im}(\log) \in (-\pi, \pi)$, calcola l'integrale di $f(z)$ sul cammino dato dal cerchio unitario, orientato positivamente.

Esercizio 2

Considera la seguente funzione della variabile reale t

$$F(t) = \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{4}}}\theta(1-|t|) \ ,$$

dove θ è la funzione theta di Heaviside.

I - (6 punti) Deduci (senza calcolarla) che la trasformata di Fourier $\hat{F}(\omega)$ è in $L^2(\mathbb{R})$ ed è una funzione continua e limitata. Deduci anche che la derivata k-esima $\hat{F}^{(k)}(\omega)$ ha le stesse proprietà per qualsiasi $k \geq 1$, mentre la funzione $\omega^n \hat{F}(\omega)$ non è in $L^2(\mathbb{R})$ per nessun valore intero $n \geq 1$.

II - (4 punti) Usa la conoscenza di $F(t)$ per calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \hat{F}(\omega)$, e $\lim_{\omega\to\pm\infty} \hat{F}^{(k)}(\omega)$ per qualsiasi $k \geq 0$.

III - (4 punti) Usa la conoscenza di $F(t)$ per calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |\hat{F}(\omega)|^2$.

Esercizio 3

Considera la funzione $g(t) = e^{-i\alpha t}$ della variabile $t \in [-T, T]$, dove α è un parametro complesso.

I - (4 punti) Calcola la serie di Fourier di $g(t)$ nel sistema ortonormale completo $\{\frac{e^{-i\frac{n\pi t}{T}}}{\sqrt{2T}}\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

II - (4 punti) Usa il risultato per calcolare la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{|\sin(\alpha T - n\pi)|^2}{|\alpha T - n\pi|^2} \ .$$