Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Considera la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z(z-\pi)} \ .$$

I - (4 punti) Elenca le singolarità di $f(z)$, indicandone il tipo se sono isolate, incluso eventualmente il punto $z = \infty$.

II - (5 punti) Calcola l'integrale di $f(z)$ sul cerchio unitario percorso in senso antiorario, usando il teorema interno dei residui. Quindi, usa la formula per questo stesso integrale che viene dal teorema esterno dei residui e deduci il valore del residuo per $z = \infty$.

III - (6 punti) Discuti perché $f(z)$ non è utile per calcolare l'integrale reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{\sin(x)}{x(x-\pi)} \ ,$$

e mostra invece come calcolare questo integrale usando la funzione $g(z) = \frac{e^{iz}}{z(z-\pi)}$.

Esercizio 2

Due funzioni di variabile reale $F(t)$ e $G(t)$ soddisfano l'equazione

$$F \star G'' = G_a + G_{-a} - 2G \ , \tag{1}$$

dove $\star$ denota il prodotto di convoluzione, G'' la derivata seconda, e $G_{\pm a}$ sono le funzioni traslate del parametro a reale, ovvero

$$G_{\pm a}(t) = G(t \pm a) \ .$$

I - (5 punti) Applica la trasformata di Fourier all'equazione (1). Usa il risultato per dimostrare $\hat{F}(\omega) = 2\frac{1-\cos(a\omega)}{\omega^2}$.

II - (4 punti) Usa $\hat{F}(\omega)$ per dedurre se $F(t)$ sia di quadrato sommabile e se sia continua e limitata, e se $F'(t)$ sia di quadrato sommabile.

Esercizio 3

Considera il sistema ortonormale dei seni su $L^2([0,1])$ dato da $\{\sqrt{2}\,\sin(\pi n x)\}_{n\geq 1}$

I - (4 punti) Trova i coefficienti di Fourier della funzione $\sin(\alpha x)$ con $\alpha \in (0,\pi)$.

II - (5 punti) Usa il risultato per calcolare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2\pi^2 - \alpha^2)^2} \ .$$