Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Considera la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}} \ .$$

I - (3 punti) Elenca le singolarità di $f(z)$, indicandone il tipo se sono isolate, incluso eventualmente il punto $z = \infty$.

II - (6 punti) Considera il ramo di $\sqrt{z}$ definito con taglio sull'asse reale negativo e $\mathrm{Arg}(\sqrt{z}) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Considera l'integrale di $f(z)$ sul cammino chiuso composto da: il segmento orizzontale $z = x$ con $x \in [0, R]$ orientato nel senso delle x crescenti, l'arco $z = Re^{i\theta}$ con $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ orientato in senso antiorario, e infine il segmento verticale $z = iy$ con $y \in [0, R]$ orientato nel senso delle y decrescenti. Usa l'integrale su questo cammino per mostrare che

$$\int_0^{+\infty} dx \, \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} dy \, \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} \ . \tag{1}$$

III - (3 punti) Effettua i cambi di variabile $x = t^2$ e $y = s^2$ nell'identità (1). Usa il risultato per calcolare gli integrali

$$\int_0^{+\infty} dt \, \sin(t^2) \ , \quad \int_0^{+\infty} dt \, \cos(t^2) \ .$$

Puoi usare che $\int_0^{+\infty} ds \, e^{-s^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Esercizio 2

Considera la seguente funzione della variabile reale x

$$F(x) = (1 - |x|)\theta(1 - |x|) \ ,$$

dove θ è la funzione theta di Heaviside.

I - (5 punti) Detta $G(x) = \theta(\frac{1}{2} - |x|)$, vale che $G \star G = F$, dove $\star$ denota il prodotto di convoluzione (non è necessario dimostrare questa identità). Usa questa identità per calcolare la trasformata di Fourier $\hat{F}(k)$ di $F(x)$.

II - (6 punti) Detta $H(x) = -\text{sign}(x)\theta(1-|x|)$, calcola la trasformata di Fourier $\hat{H}(k)$. Mostra che in senso distribuzionale vale $H(x) = F'(x)$ e quindi usa i risultati che hai calcolato per $\hat{F}(k)$ e $\hat{H}(k)$ per verificare la proprietà della trasformata di Fourier della derivata di una funzione.

III - (5 punti) Usa $\hat{F}(k)$ e $F(x)$ per calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk \, \frac{\sin(\frac{k}{2})^4}{k^4} \; .$$

Esercizio 3

Considera l'operatore $T : \ell^2 \to \ell^2$ che, data una successione $a = (a_1, a_2, \dots) = \{a_n\}_{n\geq 1}$, le assegna la successione $T(a) = (c_1 a_1, c_2 a_2, \dots) = \{c_n a_n\}_{n\geq 1}$. La successione di coefficienti $\{c_n\}_{n\geq 1}$ è tale che $\forall n \geq 1$ vale $|c_n| < M$, dove M è un numero reale positivo, e inoltre $\lim_{n\to\infty} c_n = M$.

I - (5 punti) Calcola la norma dell'operatore T.