Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Considera la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{\cos(\alpha z)}{(z^2+4)(z-i)} \ ,$$

dove α è un parametro reale.

I - (4 punti) Elenca le singolarità di $f(z)$, indicandone il tipo se sono isolate, incluso eventualmente il punto $z = \infty$.

II - (6 punti) Calcola l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ come funzione del parametro α.

Esercizio 2

Considera la seguente funzione della variabile reale t

$$F_a(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, a} e^{-\frac{t^2}{a^2}} \ ,$$

che dipende anche da un parametro $a > 0$.

I - (6 punti) Usa la trasformata di Fourier per mostrare che $(F_a \star F_b)(t) = F_{\sqrt{a^2+b^2}}(t)$ per qualsiasi $a, b > 0$, dove $\star$ denota il prodotto di convoluzione.

II - (5 punti) Calcola il limite in senso distribuzionale di F_a per $a \to 0$, sia partendo direttamente dalla funzione F_a che usando la sua trasformata di Fourier.

III - (3 punti) Verifica la consistenza dell'equazione per il prodotto di convoluzione trovata al punto I con il limite per $a \to 0$ trovato al punto II.

Esercizio 3

Su uno spazio di Hilbert H con un sistema ortonormale completo $\{e^{(n)}\}_{n\geq 1}$ considera l'operatore lineare P che agisce su un generico $v \in H$ come segue

$$P(v) = \sum_{k=1}^{\infty} (e^{(2k)}, v) e^{(2k)} \ .$$

I- (5 punti) Verifica che P è un operatore lineare, e poi calcolane la norma e l'operatore aggiunto.

II - (4 punti) Mostra che $P^2 = P$ (con P^2 si intende la composizione di P con sè stesso). Deduci da questa relazione i possibili autovalori di P.