Durata: 5 ore.

Esercizio 1

Considera la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - e^{\frac{1}{z}}} \ .$$

I - (3 punti) Trova tutte le singolaritá di f (anche eventualmente a $z = \infty$), e se le singolaritá sono isolate descrivine il tipo.

II - (3 punti) Calcola il residuo di f a tutte le singolaritá isolate e a $z = \infty$.

III - (4 punti) Calcola l'integrale

$$\int_{\gamma_0(\frac{1}{3\pi})} dz\, f(z) \ ,$$

dove $\gamma_0(\frac{1}{3\pi})$ è un cammino circolare centrato in $z = 0$ con raggio $\frac{1}{3\pi}$.

[*Suggerimento*: Usa il teorema esterno dei residui.]

Esercizio 2

Considera la funzione $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definita come segue

$$F(x) = Cx^\alpha \ ,$$

dove C e α sono costanti reali e $\alpha > -1$. Questa funzione si puó caratterizzare come la generica soluzione dell'equazione differenziale del prim'ordine

$$x \frac{d}{dx} F(x) = \alpha F(x) \ . \tag{1}$$

I - (3 punti) Applica la trasformata di Laplace all'equazione (1) e, utilizzando le proprietá della trasformata, mostra che anche la trasformata $\tilde{F}(s)$ soddisfa un'equazione del prim'ordine identica a (1) ma con un differente parametro $\alpha' = -\alpha - 1$. Deduci che la trasformata $\tilde{F}(s)$ deve essere

$$\tilde{F}(s) = C' s^{-\alpha-1} \ ,$$

per una qualche costante C'.

II - (3 punti) Calcola esplicitamente l'integrale che definisce la trasformata e mostra che la relazioni tra le costanti C e C' è

$$C' = C\,\Gamma(\alpha+1)\ .$$

Perché è necessario restringersi a $\alpha > -1$?

[Ricorda che la funzione $\Gamma(x)$ é definita dall'integrale

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dt\, t^{x-1} e^{-t}\ .$$

per $\mathrm{Re}(x) > 0$.]

III - (5 punti) Restringiamoci al caso $-1 < \alpha < 0$ (in modo che $\alpha > -1$ ma anche $\alpha' > -1$). In questo caso la funzione $\tilde{F}(s)$ ha un taglio lungo l'asse reale negativo della variabile s, ed altrove è una funzione olomorfa. Calcola l'integrale nel piano complesso s che definisce l'anti-trasformata di $\tilde{F}(s)$, e verifica che si ritrova la funzione originale $F(x)$ usando la formula di riflessione per la funzione Γ

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha)\sin(\pi(\alpha+1))}{\pi} = 1.$$

[*Suggerimento*: Deforma il cammino per ottenere un integrale sul taglio della funzione $\tilde{F}$. Non è richiesto giustificare la deformazione del cammino.]

Esercizio 3

Data $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$, definiamo $\phi(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ come segue

$$\phi(f)(x) = \sqrt{\frac{2}{1+x^2}}\, f(2\arctan(x))\ .$$

I - (4 punti) Mostra che ϕ è un operatore da $L^2([-\pi,\pi])$ a $L^2(\mathbb{R})$, ovvero se $f(t)$ è una funzione a quadrato sommabile di $t \in [-\pi,\pi]$, allora $\phi(f)(x)$ è una funzione a quadrato sommabile di $x \in \mathbb{R}$. Mostra anche che ϕ preserva il prodotto scalare.

II - (3 punti) Mostra per qualsiasi intero $k \in \mathbb{Z}$ vale che

$$\phi(e^{-ikt})(x) = \sqrt{\frac{2}{1+x^2}} \left(\frac{i+x}{i-x}\right)^k\ . \tag{2}$$

Deduci da questo che

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2}{1+x^2}} \left(\frac{i+x}{i-x}\right)^k \right\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

è un sistema ortonormale completo su $L^2(\mathbb{R})$.

[*Suggerimento*: Per mostrare (2) poni $t = 2\arctan(x)$, in modo che $x = \tan(\frac{t}{2})$, e riscrivendo le funzioni trigonometriche in termini di esponenziali complessi mostra che questo implica $\frac{i+x}{i-x} = e^{-it}$.]

III - (5 punti) Calcola i coefficienti di Fourier nel sistema ortonormale completo trovato al punto II per la funzione $F \in L^2(\mathbb{R})$ cosí definita

$$F(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{2}}\frac{1}{x^2+4} \ .$$

[*Suggerimento*: Per calcolare l'integrale che definisce i coefficienti, quando $k \geq 0$ chiudi il cammino con un arco nel semipiano superiore del piano complesso, mentre per $k < 0$ chiudilo con un arco nel semipiano inferiore. In questo modo riceverai contributo solo dai poli di $\frac{1}{x^2+4}$.]