ESERCIZIO 1

I) Singolarità dagli zeri del denominatore:

- $A + e^{iz_*} = 0$

$\Rightarrow \quad e^{iz_*} = -A$

$$i z_* = \log A + i\pi + 2\pi i k \, , \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \quad z_* = -i \log A + (2k+1)\pi \, , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Sono <u>poli di ordine 1</u> ✓ perché espandendo attorno al punto:

$$A + e^{iz} = 0 + \frac{d}{dz}\left(A + e^{iz}\right)\Big|_{z=z_*}(z - z_*) + O((z-z_*)^2)$$

$$= i\, e^{iz_*}(z - z_*) + O((z-z_*)^2)$$

$$= \underbrace{-iA}_{\neq 0}(z - z_*) + O((z-z_*)^2)$$

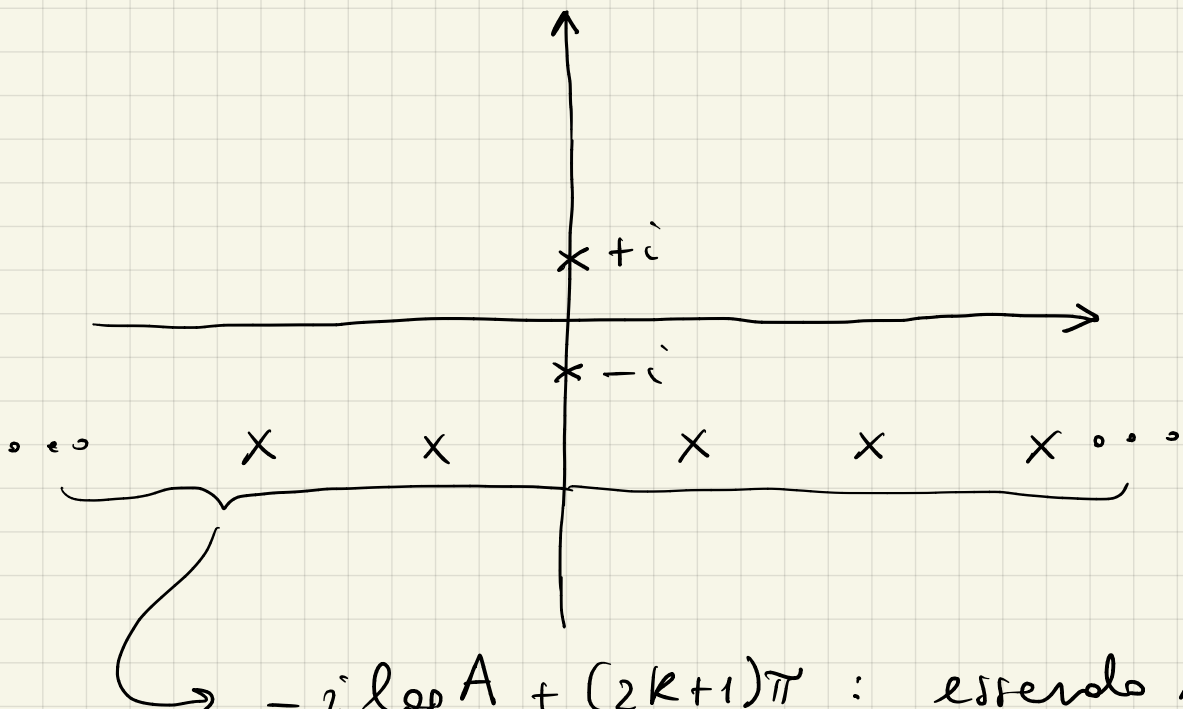
- $z_*^2 + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad z_* = \pm i \qquad$ <u>poli di ordine 1</u> ✓

- $z = \infty$: i poli in $-i \log A + (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

si accumulano in $z=\infty$, quindi $z=\infty$ <u>non</u> è una singolarità isolata, è un <u>punto di accumulazione di poli</u>.

Disegno delle singolarità:



$-i \log A + (2k+1)\pi$: essendo $A>1$ $\log A > 0$ e quindi sono nel semipiano inferiore.

II) Seguendo il suggerimento, partiamo da:

$$|A+e^{iz}| \geq A - |e^{iz}|$$

Notiamo che: $|e^{iz}| = e^{Re(iz)} = e^{-Im(z)}$;

nel semipiano superiore: $Im(z) \geq 0 \Rightarrow e^{-Im(z)} \leq 1$

Pertanto: $\quad |e^{iz}| \leq 1$

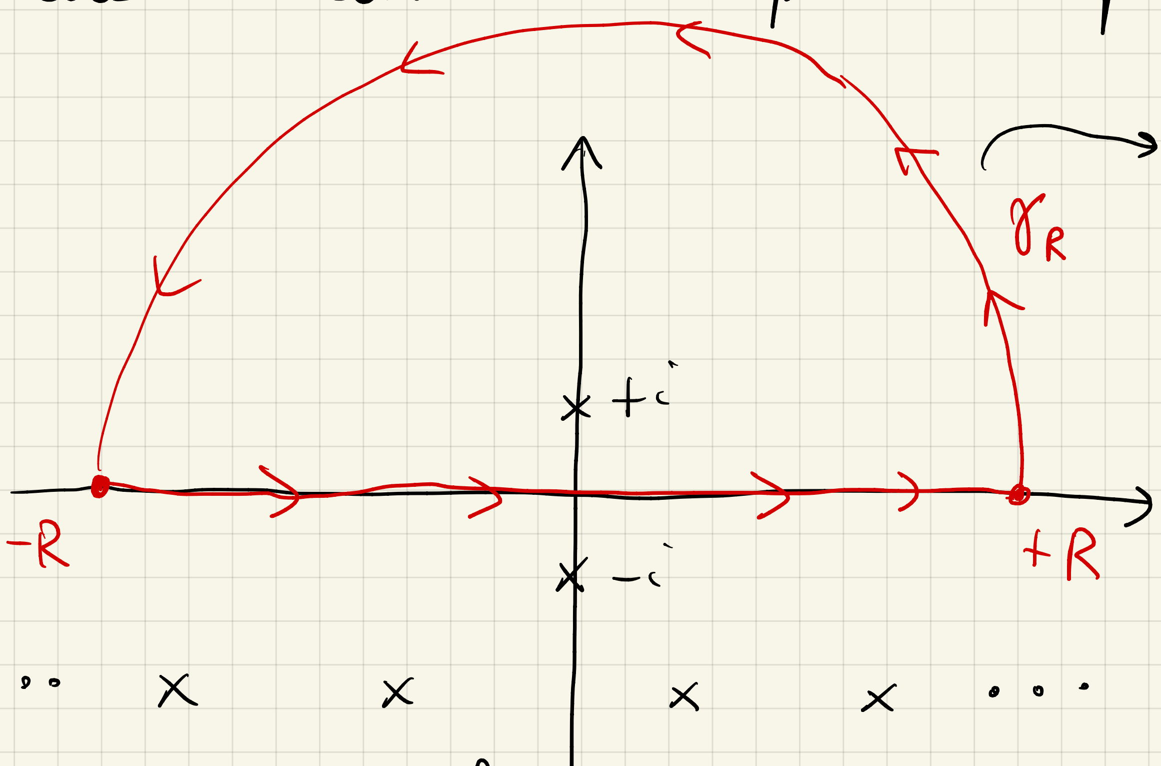
$$-|e^{iz}| \geq -1$$

$$\Rightarrow \quad |A+e^{iz}| \geq A - |e^{iz}| \geq A-1$$

Prendendo l'inverso:

$$\frac{1}{|A+e^{iz}|} \leq \frac{1}{A-1} \,.$$

III) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{1}{(A+e^{ix})(x^2+1)}$ vediamolo come integrale su cammino nel piano complesso:



chiudiamo con arco nel semipiano superiore

$$\int_{\mathbb{R}} dz\, f(z) = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{+R} dx\, f(x) = \lim_{R\to+\infty} \Big[\oint_{\gamma} dz\, f(z)$$

$$- \int_{\gamma_R} dz\, f(z) \Big]$$

γ: cammino chiuso formato dal segmento $[-R, R]$ unito all'arco γ_R, orientato in senso antiorario.

$$\left| \int_{\gamma_R} dz\, f(z) \right| \leq \pi R \cdot \operatorname*{Max}_{z \in \gamma_R} |f(z)|$$

$$\leq \pi R \frac{1}{A - 1} \operatorname*{Max}_{z \in \gamma_R} \left| \frac{1}{z^2 + 1} \right|$$

$\leq$ ↓ usando la stima del punto II

$$\underset{R \to \infty}{=} \pi R \frac{1}{A-1} \frac{1}{R^2} \left(1 + O\left(\frac{1}{R}\right)\right)$$

$$\xrightarrow[R \to \infty]{} 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} dz\, f(z) = 0.$$

D'altra parte per $R > 1$ abbiamo:

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \; \mathrm{Res}_f(i)$$

↳ teo. dei residui

$$= 2\pi i \lim_{z\to i} \cancel{(z-i)} \frac{1}{(A+e^{iz})\cancel{(z^2+1)}z+i}$$

$$= 2\pi i \frac{1}{(A+e^{-1})2i} = \frac{\pi}{A+e^{-1}}$$

Dunque: $$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{(A+e^{ix})(x^2+1)} = \frac{\pi}{A+e^{-1}} \in \mathbb{R}$$

Per prendere la parte reale e immaginaria usiamo che:

$$\frac{1}{A+e^{ix}} = \frac{1}{A+\cos x + i\sin x}$$

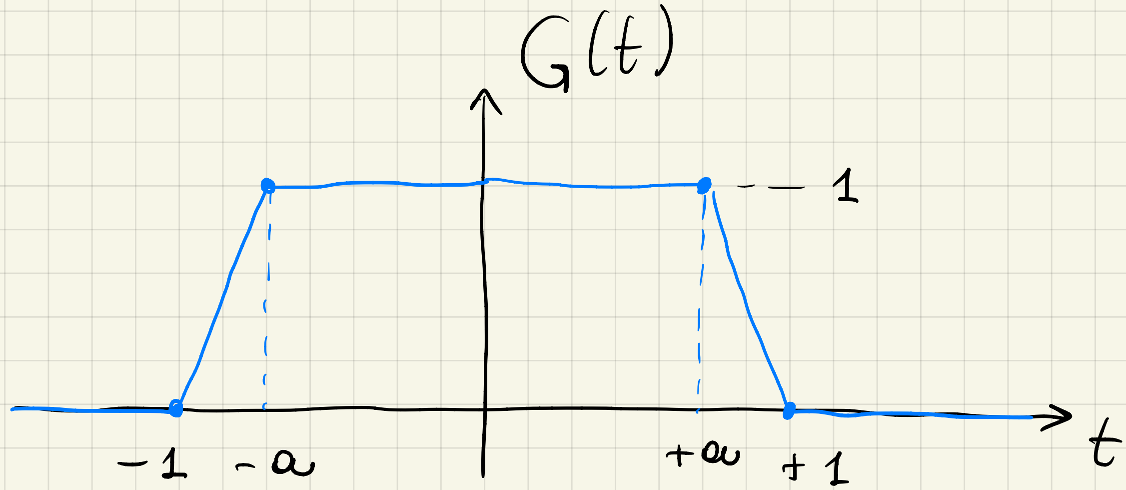
$$= \frac{A+\cos x - i\sin x}{(A+\cos x)^2+(\sin x)^2} = \frac{A+\cos x - i\sin x}{A^2+2A\cos x+1}$$

Dunque abbiamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{A+\cos x}{A^2+2A\cos x+1} \frac{1}{x^2+1} = \frac{\pi}{A+e^{-1}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin x}{A^2+2A\cos x+1} \frac{1}{x^2+1} = 0 \longrightarrow$$ segue anche dal fatto che la funzione integranda è dispari.

ESERCIZIO 2



I) $G(t)$ è una funzione limitata e a supporto compatto (ovvero: $\neq 0$ solo all'interno di un intervallo finito) quindi è a quadrato sommabile.

Visto che $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ deduciamo che:

$$G(t) \in L^2(\mathbb{R}) \implies \hat{G}(\omega) \in L^2(\mathbb{R}).$$ ✓

La moltiplicazione per variabile $t^k G(t)$ è ancora una funzione limitata e a supporto compatto per $\forall k \in \mathbb{N}$. Dunque:

$$t^k G(t) \in L^2(\mathbb{R}), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

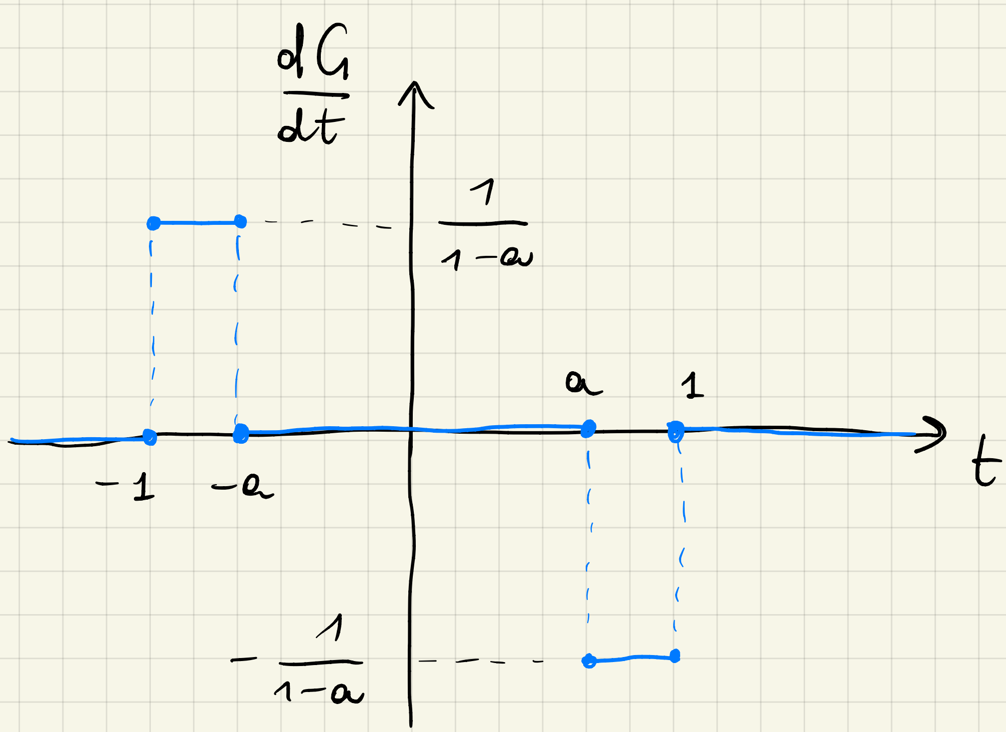
Dalle proprietà delle trasformate di Fourier

$$\widehat{t^k G(t)}(\omega) = (-i)^k \frac{d^k}{d\omega^k} \hat{G}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$$

$\Rightarrow$ $\forall k \in \mathbb{N}$, la derivata k-esima $\frac{d^k}{d\omega^k}\hat{G}(\omega)$ è ancora in $L^2(\mathbb{R})$. ✓

La derivata prima di $G(t)$ è definita per tutti i $t \in \mathbb{R}$ a meno dei punti $t = \pm 1$ e $t = \pm a$ in cui ha una discontinuità:

$$\frac{dG(t)}{dt} = \begin{cases} \frac{1}{1-a}, & -1 < t < -a \\ -\frac{1}{1-a}, & a < t < 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Quindi vediamo che anche $\frac{dG}{dt}$ è limitata e a supporto compatto $\Rightarrow \frac{dG}{dt} \in L^2(\mathbb{R})$.

Per le proprietà delle trasformate:

$$\widehat{\frac{d}{dt}G(t)} = -i\omega\,\hat{G}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \omega\,\hat{G}(\omega) \in L^2(\mathbb{R}).$$

D'altra parte $\frac{dG}{dt}$ è una funzione discontinua e non ammette derivata in $L^2(\mathbb{R})$. Questo si può vedere anche dal fatto che la derivata in senso distribuzionale è data da:

$$\frac{d^2G}{dt^2}(t) = \frac{1}{1-a}\Big(\delta(t+1) - \delta(t+a) - \delta(t-a) + \delta(t-1)\Big) \notin L^2(\mathbb{R}).$$

Se $\omega^2\hat{G}(\omega)$ appartenesse a $L^2(\mathbb{R})$ avremmo:

$$\mathcal{F}^{-1}[\omega^2\hat{G}(\omega)](t) = \frac{1}{(-i)^2}\frac{d^2}{dt^2}G(t) \in L^2(\mathbb{R})$$

↳ FALSO

Dunque $\omega^2 \hat{G}(\omega) \notin L^2(\mathbb{R})$. ✓

II) $\lim_{a \to 1} G(t) = \theta(1-|t|)$ in norme $L^2(\mathbb{R})$

$\iff \lim_{a \to 1} \| G(t) - \theta(1-|t|) \|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$.

$$G(t) - \theta(1-|t|) = \begin{cases} \frac{t+1}{1-a} - 1, & -1 < t < -a \\ \frac{1-t}{1-a} - 1, & a < t < 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\| G(t) - \theta(1-|t|) \|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$= \int_{-1}^{-a} dt \left(\frac{t+1}{1-a} - 1 \right)^2 + \int_{a}^{1} dt \left(\frac{1-t}{1-a} - 1 \right)^2$$

$$= \int_{-1}^{-a} dt \, \frac{(t+a)^2}{(1-a)^2} + \int_{a}^{1} dt \, \frac{(a-t)^2}{(1-a)^2}$$

$$= \frac{1}{3} (t+a)^3 \Big|_{-1}^{-a} \frac{1}{(1-a)^2} - \frac{1}{3} (a-t)^3 \Big|_{a}^{1} \frac{1}{(1-a)^2}$$

$$= -\frac{1}{3} (-1+a)^3 \frac{1}{(1-a)^2} - \frac{1}{3} (a-1)^3 \frac{1}{(1-a)^2} = \frac{2}{3}(1-a)$$

$$\xrightarrow[a \to 1]{} 0. \ ✓$$

$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ è una funzione continua rispetto alla norma L^2. Pertanto:

$$\lim_{a \to 1} \mathcal{F}[G(t)](\omega) = \mathcal{F}[\theta(1-|t|)](\omega)$$

Abbiamo visto quest'ultima trasformata a lezione e si può usare semplicemente il risultato. Altrimenti è anche facile ri-derivarlo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \theta(1-|t|)\, e^{i\omega t} = \int_{-1}^{+1} dt\, e^{i\omega t}$$

$$= \frac{1}{i\omega} e^{i\omega t}\Big|_{-1}^{+1} = \frac{1}{i\omega}\left(e^{i\omega} - e^{-i\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{i\omega} 2i \sin\omega = \frac{2\sin\omega}{\omega}. \checkmark$$

III) $\hat{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, G(t)\, e^{i\omega t}$

$$= \underbrace{\int_{-1}^{-a} dt\, \frac{t+1}{1-a} e^{i\omega t}}_{1} + \underbrace{\int_{-a}^{+a} dt\, e^{i\omega t}}_{3} + \underbrace{\int_{a}^{1} dt\, \frac{1-t}{1-a} e^{i\omega t}}_{2}$$

$$① = \int_{-1}^{-a} dt \, \frac{t+1}{1-a} \frac{1}{i\omega} \frac{d}{dt} e^{i\omega t}$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{integrazione} \\ \text{per parti}}}{=} \frac{1}{i\omega} \left[\frac{t+1}{1-a} e^{i\omega t} \Big|_{-1}^{-a} - \int_{-1}^{-a} dt \, \frac{1}{1-a} e^{i\omega t} \right]$$

$$= \frac{1}{i\omega} \left[e^{-i\omega a} - \frac{1}{1-a} \frac{1}{i\omega} \left(e^{-i\omega a} - e^{-i\omega} \right) \right]$$

$$= \frac{e^{-i\omega a}}{i\omega} + \frac{1}{1-a} \frac{1}{\omega^2} \left(e^{-i\omega a} - e^{i\omega} \right)$$

$$② = \int_{a}^{1} dt \, \frac{1-t}{1-a} \frac{1}{i\omega} \frac{d}{dt} e^{i\omega t}$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{integrazione} \\ \text{per parti}}}{=} \frac{1}{i\omega} \left[\frac{1-t}{1-a} e^{i\omega t} \Big|_{a}^{1} + \int_{a}^{1} dt \, \frac{1}{1-a} e^{i\omega t} \right]$$

$$= \frac{1}{i\omega} \left[- e^{i\omega a} + \frac{1}{1-a} \frac{1}{i\omega} \left(e^{i\omega} - e^{i\omega a} \right) \right]$$

$$= - \frac{e^{i\omega a}}{i\omega} - \frac{1}{1-a} \frac{1}{\omega^2} \left(e^{i\omega} - e^{-i\omega a} \right)$$

$$③ = \int_{-a}^{+a} dt\, e^{i\omega t} = \frac{1}{i\omega}\left(e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}\right)$$

$$① + ② + ③$$

$$= \cancel{\frac{e^{-i\omega a}}{i\omega}} + \frac{1}{1-a}\frac{1}{\omega^2}\left(e^{-i\omega a} - e^{-i\omega}\right)$$

$$- \cancel{\frac{e^{i\omega a}}{i\omega}} + \frac{1}{1-a}\frac{1}{\omega^2}\left(e^{+i\omega a} - e^{+i\omega}\right)$$

$$+ \frac{1}{i\omega}\left(\cancel{e^{i\omega a}} - \cancel{e^{-i\omega a}}\right)$$

$$= \frac{1}{1-a}\frac{1}{\omega^2}\left(e^{+i\omega a} + e^{-i\omega a} - e^{+i\omega} - e^{-i\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{1-a}\frac{1}{\omega^2}\left(2\cos(\omega a) - 2\cos(\omega)\right)$$

$$= -\frac{2}{\omega^2}\frac{\cos(a\omega) - \cos(\omega)}{a-1} \quad ✓$$

Notiamo che $\hat{G}(\omega)$ decresce come $\frac{1}{\omega^2}$ a infinito ed è limitata su tutto $\mathbb{R}$, anche per $\omega \to 0$ come si vede dal limite:

$\hat{G}(\omega)$

$$\underset{\omega\to 0}{=} -\frac{2}{\omega^2}\,\frac{\cancel{1}-\frac{1}{2}a^2\omega^2-\cancel{1}+\frac{1}{2}\omega^2+O(\omega^3)}{a-1}$$

$$= +\frac{\cancel{2}}{\cancel{\omega^2}}\,\frac{1}{\cancel{2}}\,\cancel{(a^2-1)}^{\,a+1}\cancel{\omega^2}\,\frac{1}{\cancel{a-1}}+O(\omega)$$

$$= a+1+O(\omega)$$

Dunque $\hat{G}(\omega)\in L^2(\mathbb{R})$ come avevamo dedotto al punto I.

È una funzione C^∞ e prendendo derivate rispetto a ω miglioriamo la convergenza per $|\omega|\to+\infty$, quindi tutte le derivate sono in $L^2(\mathbb{R})$ come dedotto al punto I.

Inoltre: $\omega\hat{G}(\omega)$ è ancora limitata e decresce come $\frac{1}{\omega}$

$$\Rightarrow \omega\hat{G}(\omega)\in L^2(\mathbb{R})$$

$\omega^2\hat{G}(\omega)$ invece è oscillante per $|\omega|\to+\infty$ e non ha quadrato sommabile $\Rightarrow$ $\omega^2\hat{G}(\omega)\notin L^2(\mathbb{R})$.

Infine notiamo che il limite $a \to 1$ dà:

$$\lim_{a\to 1} \left(-\frac{2}{\omega^2}\right) \frac{\cos(a\omega) - \cos(\omega)}{a-1}$$

$$= -\frac{2}{\omega^2} \frac{d}{da} \cos(a\omega)\Big|_{a=+1}$$

$$= -\frac{2}{\omega^2} \left(-\omega \sin(a\omega)\right)\Big|_{a=+1}$$

$$= \frac{2\sin\omega}{\omega}$$ ✓

Questo è il limite per ogni $\omega \in \mathbb{R}$; per far vedere che è anche il limite in norma $L^2(\mathbb{R})$ possiamo usare una stima:

$$\left(\hat{G}(\omega) - \frac{2\sin(\omega)}{\omega}\right)^2 \leq \begin{cases} C_1, & |\omega| \leq 1 \\ C_2/\omega^2, & |\omega| > 1 \end{cases}$$

per C_1, C_2 costanti reali. La funzione che domina è integrabile, quindi per il teorema della convergenza dominata:

$$\lim_{a\to 1} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left(\hat{G}(\omega) - \frac{2\sin(\omega)}{\omega}\right)^2 = 0.$$ ✓

Esercizio 3

I)

v generico vettore $\in \mathcal{H}$

$$v = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e^{(n)}$$

$$T[v] = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ dispari}}}^{+\infty} \alpha_n f^{(n)}$$

$$\|T[v]\|^2 = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ dispari}}}^{\infty} |\alpha_n|^2$$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^2 = \|v\|^2$$

perché mancano gli n pari

Dunque: $\forall v \in \mathcal{H}$, $\|T[v]\| \leq \|v\|$

$\Rightarrow T$ è limitato e $\|T\| \leq 1$.

D'altra parte: $\dfrac{\|T[e^{(1)}]\|}{\|e^{(1)}\|} = \dfrac{\|f^{(1)}\|}{\|e^{(1)}\|} = 1$

$\Rightarrow \|T\| \geq 1 \Rightarrow \|T\| = 1$

II) $v, w \in \mathcal{H}$ generici

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n f^{(n)}$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{(n)}$$

$$(w, T[v]) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n f^{(n)}, \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ dispari}}}^{\infty} \alpha_n f^{(n)} \right)$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ dispari}}}^{\infty} \beta_n^* \alpha_n$$

Vediamo che ponendo:

$$T^\dagger[f^{(n)}] = \begin{cases} e^{(n)} & , n \text{ dispari} \\ 0 & , n \text{ pari} \end{cases}$$

abbiamo:

$$(T^\dagger[w], v) = \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ dispari}}}^{\infty} \beta_n e^{(n)}, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{(n)} \right)$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ dispari}}}^{\infty} \beta_n^* \alpha_n = (w, T[v]). \checkmark$$