# Esercizio 1

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \frac{1}{e^{-\frac{1}{z^2}} - 1}$$

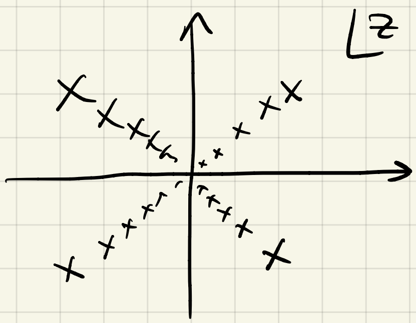
## I)

Singolarità:

$$e^{-\frac{1}{z^2}} - 1 = 0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{z^2}} = 1 \Rightarrow \frac{1}{z^2} = 2\pi i K, \quad K \in \mathbb{Z}$$

$$z_* = \pm e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi K}} \text{ per } K > 0, \quad z_* = \pm e^{+i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi |K|}} \text{ per } K < 0$$

POLI DI ORDINE 1 perché: $\frac{d}{dz}\left(e^{-\frac{1}{z^2}} - 1\right)\Big|_{z_*} = \frac{2}{z_*^3} e^{-\frac{1}{z_*^2}} = \frac{2}{z_*^3} \neq 0.$




$z = 0$ e non è una singolarità isolata (punto di accumulazione di poli). Comportamento a $z = \infty$:

$$e^{-\frac{1}{z^2}} = 1 - \frac{1}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^4}\right)$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z^3} \frac{1}{-\frac{1}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^4}\right)}$$

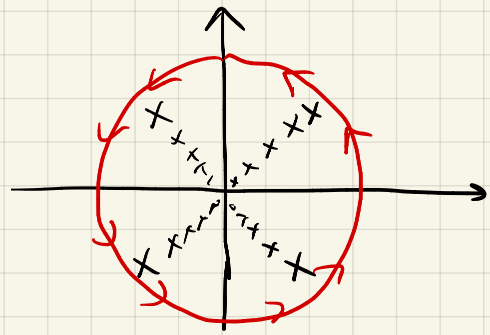
$$= -\frac{1}{z + O\left(\frac{1}{z}\right)}$$

$$= -\frac{1}{z} \frac{1}{1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)} = -\frac{1}{z}\left(1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^3}\right).$$

Quindi $f(z)$ è regolare in $z=\infty$.

II)



Le singolarità trovate al punto I sono tutte interne al cerchio unitario.

Conviene calcolare usando il teorema esterno dei residui:

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = -2\pi i \, \mathrm{Res}_f(\infty)$$

Dal calcolo al punto precedente: $f(z) \underset{z\to\infty}{=} -\frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^3}\right)$

quindi: $\mathrm{Res}_f(\infty) = +1$

$$\Rightarrow \oint_\gamma f(z)\,dz = -2\pi i.$$

## ESERCIZIO 2

$$\hat{F}(\omega) = \frac{\sinh(\omega)}{\cosh(\omega)^2}$$

I) $\hat{F}(\omega)$ è una funzione $C^\infty(\mathbb{R})$ e il suo comportamento per $|\omega| \to +\infty$ è un decadimento esponenziale:

$$\hat{F}(\omega) \underset{|\omega|\to\infty}{=} \frac{\frac{1}{2}\operatorname{sign}(\omega) e^{|\omega|}\left(1+O(e^{-2|\omega|})\right)}{\frac{1}{4} e^{2|\omega|}\left(1+O(e^{-2|\omega|})\right)}$$

$$= 2\operatorname{sign}(\omega) e^{-|\omega|}\left(1+O(e^{-2|\omega|})\right).$$

Pertanto $\hat{F}(\omega)$ è a quadrato sommabile $\in L^2(\mathbb{R})$ ed è anche $\in L^1(\mathbb{R})$.

$\hat{F}(\omega) \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow F(t) \in L^2(\mathbb{R})$

$\hat{F}(\omega) \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{\hat{F}}(t) = 2\pi F(-t)$ è funzione continua e limitata $\Rightarrow$ anche $F(t)$ è continua e limitata.

Visto che $\hat{F}(\omega)$ è $C^\infty(\mathbb{R})$ e con decadimento esponenziale, anche le funzioni $\omega^k \hat{F}(\omega)$ per $\forall k$ intero positivo sono funzioni in $L^2(\mathbb{R})$ e in $L^1(\mathbb{R})$. D'altra parte:

$$\omega^k \hat{F}(\omega) = \widehat{\left(-i\frac{d}{dt}\right)^k F(t)}(\omega)$$

$\Rightarrow$ con lo stesso argomento usato sopra per $\hat{F}$ deduciamo che anche $\frac{d^k}{dt^k}F(t)$ è in $L^2(\mathbb{R})$ ed è una funzione continua e limitata.

Analogamente, avele $\frac{d^k}{d\omega^k}\hat{F}(\omega)$ è sia in $L^2(\mathbb{R})$ che in $L^1(\mathbb{R})$, per qualsiasi intero positivo $K$.

Usando:
$$\frac{d^k}{d\omega^k}\hat{F}(\omega) = \widehat{(i t)^k F(t)}(\omega)$$

allo stesso modo deduciamo che anche $t^k F(t)$ è funzione continua e limitata e in $L^2(\mathbb{R})$.

II)
$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\hat{F}(\omega)e^{-i\omega t}$$
$$\underset{\omega'=-\omega}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi}\hat{F}(-\omega')e^{+i\omega' t}$$

$\hat{F}$ è dispari: $\hat{F}(-\omega') = -\hat{F}(\omega')$, quindi:
$$F(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi}\hat{F}(\omega')e^{-i\omega'(-t)} = -F(-t).$$

Quindi $F(t)$ è funzione dispari, e di conseguenza $tF(t)$ è pari. Quindi:
$$\int_0^{+\infty} dt\, t F(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, t F(t) = \frac{1}{2}\widehat{tF(t)}(\omega=0)$$
$$= \frac{1}{2}\left(-i\frac{d}{d\omega}\right)\hat{F}(\omega)\Big|_{\omega=0}$$

$$= -\frac{i}{2}\left[\frac{1}{\cosh(\omega)} - \frac{2\sinh(\omega)}{\cosh(\omega)^3}\right]\Bigg|_{\omega=0} = -\frac{i}{2}.$$

III) Usiamo: $\widehat{\dfrac{1}{2\cosh(\frac{\pi}{2}t)}}(\omega) = \dfrac{1}{\cosh(\omega)}$

e l'osservazione che: $\hat{F}(\omega) = -\dfrac{d}{d\omega}\dfrac{1}{\cosh(\omega)}$

$$\Rightarrow \quad \hat{F}(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\widehat{\frac{1}{\cosh(\frac{\pi}{2}t)}}(\omega)$$

$$= \widehat{-\frac{it}{\cosh(\frac{\pi}{2}t)}}(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad F(t) = -\frac{it}{2\cosh(\frac{\pi}{2}t)}$$

# Esercizio 3

I) $f(x) \in L^2(\mathbb{R})_\mu$, ovvero: $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \mu(x)\, |f(x)|^2 < +\infty$

$$U[f](x) = \sqrt{\mu(x)}\, f(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |U[f](x)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \mu(x)\, |f(x)|^2 < +\infty$$

$$\Rightarrow \quad U[f](x) \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow U : L^2(\mathbb{R})_\mu \to L^2(\mathbb{R})$$

$$(U[f], U[g])_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, U[f]^*(x)\, U[g](x)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \mu(x)\, f^*(x)\, g(x) = (f, g)_{L^2(\mathbb{R})_\mu}$$

$\forall f, g \in L^2(\mathbb{R})_\mu \Rightarrow U$ preserve il prodotto scalare.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\mu(x)}}\, U[f](x)$$

$$\Rightarrow U^{-1}[f](x) = \frac{1}{\sqrt{\mu(x)}}\, f(x),$$ serve $\mu(x) \neq 0$.

II) $T[f](x) = F(x)\, f(x)$, $F$ continua e limitata

$$\| T[f] \|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |F(x)|^2\, |f(x)|^2$$

$$\leq \operatorname{Max} |F|^2\, \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \Rightarrow$$ $T$ è limitato su $L^2(\mathbb{R})$

$$U^{-1} T U : L^2(\mathbb{R})_\mu \to L^2(\mathbb{R})_\mu$$

$$(U^{-1} T U)[f](x) = U^{-1}[T[U[f]]](x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mu(x)}}\, T[U[f]](x) = \frac{F(x)}{\sqrt{\mu(x)}}\, U[f](x)$$

$$= \frac{F(x)}{\cancel{\sqrt{\mu(x)}}}\, \cancel{\sqrt{\mu(x)}}\, f(x) = F(x)\, f(x).$$

$$\Rightarrow U^{-1} T U[f](x) = F(x) f(x)$$

$$\| U^{-1} T U[f] \|^2_{L^2(\mathbb{R})_\mu} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \mu(x) |F(x)|^2 |f(x)|^2$$

$$\leq \operatorname{Max} |F|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \mu(x) |f(x)|^2$$

$$\leq \operatorname{Max} |F|^2 \; \| f \|^2_{L^2(\mathbb{R})_\mu}$$

$\Rightarrow U^{-1} T U$ è limitato su $L^2(\mathbb{R})_\mu$.

$\mathcal{D}[f](x) = \frac{df}{dx}(x)$, $\mathcal{D}$ è definito sul dominio: $D = \{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \frac{df}{dx} \in L^2(\mathbb{R}) \}$.

$$(U^{-1} \mathcal{D} U)[f] = U^{-1}[\mathcal{D}[U[f]]](x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mu(x)}} \mathcal{D}[U[f]](x) = \frac{1}{\sqrt{\mu(x)}} \frac{d}{dx} (U[f])(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mu(x)}} \frac{d}{dx} \left( \sqrt{\mu(x)} f(x) \right) = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{1}{2} \frac{\frac{d\mu}{dx}}{\mu(x)} f(x)$$

Possiamo definire $U^{-1} \mathcal{D} U$ sul dominio:

$$D_\mu = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R})_\mu \;\middle|\; \frac{d}{dx} f + \frac{\frac{d\mu}{dx}}{2\mu} f \in L^2(\mathbb{R})_\mu \right\}$$

Equivalentemente, conoscendo il dominio $D$ su cui è definito l'operatore derivata $\mathcal{D}$ in $L^2(\mathbb{R})$, possiamo definire: $D_\mu = U^{-1} D$.