# ESERCIZIO 1

$$f(z) = \frac{49\pi^2 z^2 + 1}{z\left(e^{\frac{1}{z}} + 1\right)}$$

I) Zeri del denominatore:

* $z = 0$ dal fattore $z$
* $e^{\frac{1}{z}} = -1 \implies \frac{1}{z_k} = (2k+1)i\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$\implies z_k = -\frac{i}{(2k+1)\pi}$ i.e. $\pm\frac{i}{\pi}, \pm\frac{i}{3\pi}, \pm\frac{i}{5\pi}$, e così via.

Visto che $\lim_{k\to+\infty} z_k = 0$, $z = 0$ non è una singolarità isolata, quindi non possiamo discuterne il tipo.

Per $z = z_k$ abbiamo:

$$e^{\frac{1}{z}} \underset{z\to z_k}{=} -1 + \frac{d}{dz}\left(e^{\frac{1}{z}}\right)_{z=z_k}(z - z_k) + O\left((z-z_k)^2\right)$$

$$= -1 + \left(e^{1/z}\left(-\frac{1}{z^2}\right)\right)(z - z_k) + O\left((z-z_k)^2\right)$$

$$\implies e^{\frac{1}{z}} + 1 \underset{z\to z_k}{=} \frac{z - z_k}{z_k^2} + O\left((z-z_k)^2\right)$$

$\implies$ sono poli di ordine 1.

Notiamo però che anche il numeratore ha uno zero di ordine 1 in $z = \pm \frac{i}{7\pi}$.

Di conseguenza abbiamo poli di ordine 1 in $z_k$ per tutti i $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 3, -4$, e singolarità rimovibili in $z_{k=3}$ e $z_{k=-4}$.

Rimane da controllare $z=\infty$. Espandendo troviamo:

$$f(z) = \frac{49\pi^2 z^{\cancel{2}} \left(1 + \frac{1}{49\pi^2 z^2}\right)}{\cancel{z} \quad \left(1 + e^{1/z}\right)}$$

$$\underset{z \to +\infty}{=} 49\pi^2 z \left(1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right) \frac{1}{1 + 1 + O\left(\frac{1}{z}\right)}$$

$$= 49\pi^2 z \left(1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)\left(\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

$$= \frac{49\pi^2 z}{2}\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right) \Rightarrow z = \infty \text{ è un polo di}$$

ordine 1. Riassumendo:

* $z=0$ non è una singolarità isolata;
* $z = z_k \equiv -\frac{i}{(2k+1)\pi}$ è un polo di ordine 1 per $k \in \mathbb{Z}$ e $k \neq -4, +3$
* $z = z_k$ è una singolarità rimovibile per $k = -4, +3$

* $z = \infty$ è un polo di ordine $1$.

II) Usiamo la formula per il residuo in un polo di ordine 1:

$$\mathrm{Res}_f\left(z = -\frac{i}{3\pi}\right) = \lim_{z \to -\frac{i}{3\pi}} \left(z + \frac{i}{3\pi}\right) f(z)$$

$$= \lim_{z \to -\frac{i}{3\pi}} \frac{49\pi^2 z^2 + 1}{z \, \dfrac{e^{1/z} + 1}{z + i/3\pi}}$$

Notiamo che: $$\frac{e^{1/z} + 1}{z + i/3\pi} = \frac{e^{1/z} - \left(e^{1/z}\right)\Big|_{z=-i/3\pi}}{z - \left(-i/3\pi\right)}$$

ovvero è il rapporto incrementale della funzione $e^{1/z}$ nel punto $z = -\frac{i}{3\pi}$. Quindi:

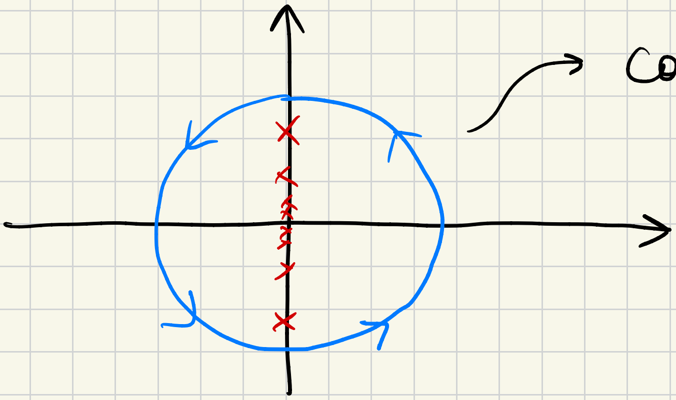
$$\mathrm{Res}_f\left(z = -\frac{i}{3\pi}\right) = \underbrace{\left(\frac{49\pi^2 z^2 + 1}{z}\right)}_{\substack{\text{funzione continua nel} \\ \text{punto} \Rightarrow \text{esce dal limite}}}\Bigg|_{z=-\frac{i}{3\pi}} \cdot \frac{1}{\dfrac{d}{dz}\left(e^{\frac{1}{z}}\right)\Big|_{z=\frac{-i}{3\pi}}}$$

$$= \frac{-\dfrac{49\pi^2}{9\pi^2} + 1}{-i/3\pi} \cdot \frac{1}{\left(e^{\frac{1}{z}}\left(-\frac{1}{z^2}\right)\right)\Big|_{z=-\frac{i}{3\pi}}}$$

$$= \cancel{3\pi} i \; \frac{-40\cancel{\pi^2}}{{}_3\cancel{9}\pi^{\cancel{2}}} \; \frac{1}{(-1)(+9\cancel{\pi^2})}$$

$$= \frac{40\, i}{27\pi} .$$

III)



conviene usare il teorema esterno dei residui.

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname{Res}_f(\infty)$$

$\operatorname{Res}_f(\infty) = -$ coefficiente di $\frac{1}{z}$ nell'espansione per $z \to \infty$

Portando avanti l'espansione che abbiamo iniziato sopra per mostrare la singolarità in $z=\infty$, abbiamo:

$$f(z) \underset{z\to\infty}{=} 49\pi^2 z \left(1 + \frac{1}{49\pi^2 z^2}\right) \frac{1}{2 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right)}$$

$$= \frac{49\pi^2 z}{2}\left(1 + \frac{1}{49\pi^2 z^2}\right) \frac{1}{1 + \frac{1}{2z} + \frac{1}{4z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right)}$$

$$= \frac{49\pi^2 z}{2}\left(1 + \frac{1}{49\pi^2 z^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2z} + \cancel{\frac{1}{4z^2}} - \cancel{\frac{1}{4z^2}} + O\left(\frac{1}{z^3}\right)\right)$$

$$= \frac{49\pi^2 z}{2}\left(1+\frac{1}{49\pi^2 z^2}\right)\left(1-\frac{1}{2z}+O\left(\frac{1}{z^3}\right)\right)$$

$$= \frac{49\pi^2 z}{2}\left(1-\frac{1}{2z}+\frac{1}{49\pi^2 z^2}+O\left(\frac{1}{z^3}\right)\right)$$

$$= \frac{49\pi^2 z}{2} - \frac{49\pi^2}{4} + \frac{1}{2z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

$\Rightarrow$ coefficiente di $\frac{1}{z} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \mathrm{Res}_f(\infty) = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \oint f(z)\,dz = -2\pi i\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi i$

## ESERCIZIO 2

$$F(t) = \mathrm{sign}(t)\, e^{-|t|}$$

I) $F(t)$ è limitata e decresce esponenzialmente a $\pm\infty$ $\Rightarrow F(t) \in L^2(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \hat{F}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$ perché è trasformata di una funzione in $L^2(\mathbb{R})$.

Visto che su $L^2(\mathbb{R})$ la trasformata è invertibile, vale anche che:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi}\hat{\hat{F}}(-t)$$ $\rightsquigarrow$ formula dell'antitrasformata.

Se $\hat{F}(\omega)$ fosse una funzione in $L^1(\mathbb{R})$, allora $\hat{\hat{F}}(t)$ sarebbe una funzione continua e limitata, e di conseguenza anche $F(t)$ lo sarebbe.

A causa di $\operatorname{sign}(t)$, però, $F(t)$ ha una discontinuità in $t=0$. Di conseguenza $\hat{F}(\omega)$ non può essere in $L^1(\mathbb{R})$.

Riassumendo:

$$F(t) \in L^2(\mathbb{R}) \implies \hat{F}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$$

$$\hat{F}(\omega) \in L^2(\mathbb{R}),\ F(t) \notin C^0(\mathbb{R}) \implies \hat{F}(\omega) \notin L^1(\mathbb{R}).$$

II) Calcoliamo esplicitamente $\hat{F}(\omega)$:

$$\hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\omega t} \operatorname{sign}(t)\, e^{-|t|}$$

$$= \int_0^{+\infty} dt\, e^{i\omega t} e^{-t} + \int_{-\infty}^{0} dt\, e^{i\omega t}(-e^{t})$$

$$= \int_0^{+\infty} dt\, e^{-(1-i\omega)t} - \int_{-\infty}^{0} dt\, e^{(1+i\omega)t}$$

$$= -\frac{1}{1-i\omega}\left(e^{-(1-i\omega)t}\right)\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{1+i\omega}\left(e^{(1+i\omega)t}\right)\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$= -\frac{1}{1-i\omega}\left(0-1\right) - \frac{1}{1+i\omega}\left(1-0\right)$$

$$= \frac{1}{1-i\omega} - \frac{1}{1+i\omega} = \frac{2i\omega}{1+\omega^2}$$

$$\Rightarrow \hat{F}(\omega) = \frac{2i\omega}{1+\omega^2}.$$

$\hat{F}(\omega)$ è una funzione continua e limitata e va a zero per $\omega \to \pm\infty$ come $O(1/\omega)$

$\Rightarrow |\hat{F}(\omega)|^2$ è integrabile ma $|\hat{F}(\omega)|$ non lo è

$\Rightarrow \hat{F}(\omega) \in L^2(\mathbb{R}), \notin L^1(\mathbb{R})$.

III) $\hat{F}(\omega) = \omega\, \hat{G}(\omega)$

$$\Rightarrow \hat{G}(\omega) = \frac{2i}{1+\omega^2}$$

Detta $G(t)$ l'antitrasformata di $\hat{G}(\omega)$, usiamo la proprietà della trasformata

$$\widehat{\frac{dG}{dt}}(\omega) = -i\omega\, \hat{G}(\omega) = -i\,\hat{F}(\omega).$$

Pertanto: $\frac{dG}{dt}(t) = -i\,F(t)$.

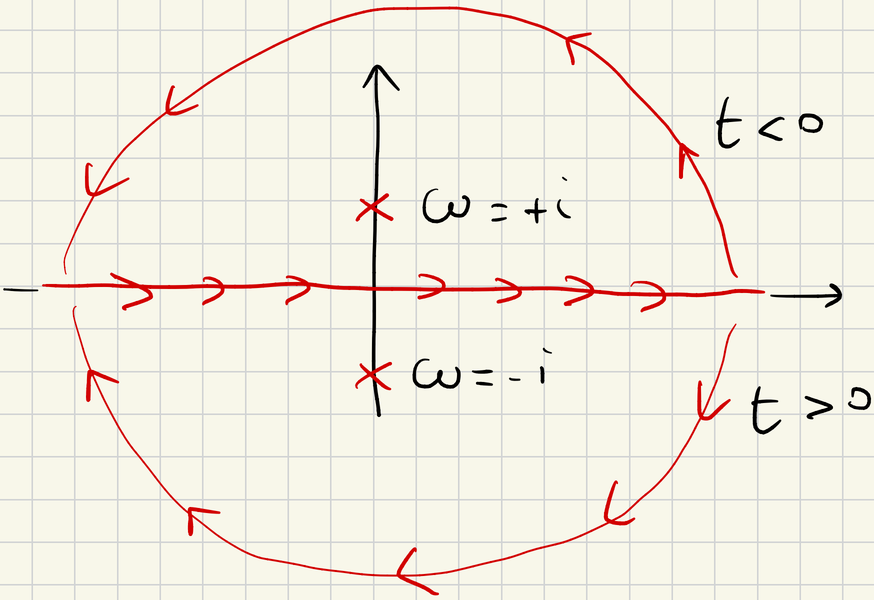
Verifichiamo calcolando esplicitamente $G(t)$.

Usiamo la formula dell'antitrasformata:

$$G(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \hat{G}(\omega)$$

$$= \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{2i}{1+\omega^2}$$

Calcoliamo con lemma di Jordan




$$= \theta(t)(-2\pi i)\, \mathrm{Res}\, \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{2i}{1+\omega^2} \quad (\omega = -i)$$

$$+ \theta(-t)(+2\pi i)\, \mathrm{Res} \quad '' \quad '' \quad '' \quad (\omega = +i)$$

$$= \theta(t)(-\cancel{2\pi} i) \frac{1}{\cancel{2\pi}} e^{-t} \frac{\cancel{2i}}{(-\cancel{2i})}$$

$$+ \theta(-t)(+\cancel{2\pi} i) \frac{1}{\cancel{2\pi}} e^{+t} \frac{\cancel{2i}}{\cancel{2i}}$$

$$= \theta(t)\, i\, e^{-t} + \theta(-t)\, i\, e^{+t} = i\, e^{-|t|}$$

$$\Rightarrow \quad G(t) = i\, e^{-|t|}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dG}{dt}(t) = -i\, e^{-|t|}\,\mathrm{sign}(t) = -i\,F(t)$$

## ESERCIZIO 3 $\quad T_n[\varphi] = (e^{(n)}, \varphi)_{L^2(\mathbb{R})}$

I) Data $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ funzione test, vale che $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ e di conseguenza è ben definito il prodotto scalare che definisce $T_n$. Dunque $T_n$ è un funzionale lineare su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Visto che il prodotto scalare con un vettore fissato è una funzione continua da $L^2(\mathbb{R})$ a $\mathbb{C}$, e che la convergenza in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ implica quella in $L^2(\mathbb{R})$, $T_n$ è anche un funzionale continuo $\Rightarrow$ $T_n$ è una distribuzione temperata.

Siccome $e^{(n)}$ è un s.o.c. su $L^2(\mathbb{R})$, vale:

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \sum_{n=1}^{+\infty} |(e^{(n)}, \varphi)|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |T_n[\varphi]|^2.$$

Quindi, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la successione $\{T_n[\varphi]\}_{n\geq 1}$

è in $\ell^2$. In particolare deve valere:

$$\lim_{n \to +\infty} T_n[\varphi] = 0 .$$

Visto che questo limite è valido $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, vale che, in senso distribuzionale: $\lim_{n \to +\infty} T_n = 0$.