Esercizio 1

$$f(z) = \frac{(1+z^4)\log\left(1+\frac{z}{2}\right)}{z\sinh(\pi z^2)}$$

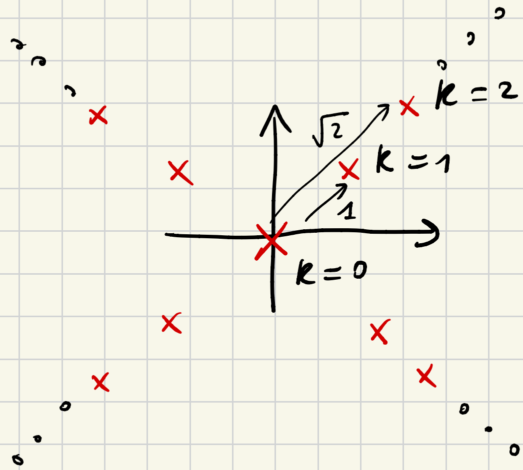
I) Singolarità dal denominatore:

$$\sinh(\pi z^2) = 0 \Rightarrow \pi z^2 = \pi i k, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow z^2 = i k, \ k \in \mathbb{Z}$$

$k \geq 0$: $\quad z = \pm e^{i\pi/4}\sqrt{k}$

$k < 0$: $\quad z = \pm e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{k}$



$\frac{1}{\sinh(\pi z^2)}$ quindi dà un polo di ordine 2 in $z=0$ e poli di ordine 1 in $z = \pm e^{\pm i\pi/4}\sqrt{k}$ con $k \in \mathbb{Z}, k \geq 1$.

Controllo che per $k \geq 1$ sono di ordine 1:

$$\sinh(\pi z^2) = \left(\frac{d}{dz}\sinh(\pi z^2)\right)_{z=\pm e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\sqrt{k}}\left(z-\left(\pm e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\sqrt{k}\right)\right) + O\left(\left(z-\left(\pm e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\sqrt{k}\right)\right)^2\right)$$

$$= \left(\cosh(\pi z^2)\,2\pi z\right)_{z=\pm e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\sqrt{k}}\left(z-\left(\pm e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\sqrt{k}\right)\right) + O\left(\left(z-\left(\pm e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\sqrt{k}\right)\right)^2\right)$$

$$= 2\pi\left(\pm e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\sqrt{k}\right) \underbrace{\cosh(\pi(\pm i k))}_{=\cos(\pi k)}\left(z-\left(\pm e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\sqrt{k}\right)\right)$$

$$+ \mathcal{O}\left(\left(z-\left(\pm e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\sqrt{k}\right)\right)^2\right)$$

$$= (-1)^k\, 2\pi\left(\pm e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\sqrt{k}\right)\left(z-\left(\pm e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\sqrt{k}\right)\right)$$

$$+ \mathcal{O}\left(\left(z-\left(\pm e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\sqrt{k}\right)\right)^2\right)$$

$\Rightarrow \sinh(\pi z^2)$ ha uno zero di ordine 1 in questi punti, quindi $\frac{1}{\sinh(\pi z^2)}$ ha un polo di ordine 1.

Notiamo che il fattore z^4+1 al numeratore ha uno zero di ordine 1 in:

$$z^4 = -1 \Rightarrow z = \pm e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$$

$\Rightarrow$ i quattro punti $\pm e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\sqrt{k}$ con $k=1$ sono singolarità rimovibili per $f(z)$.

Inoltre $f(z)$ ha un fattore addizionale $\log\left(1+\frac{z}{2}\right)\frac{1}{z}$ che è potenzialmente anche singolare in $z=0$. Vediamo però che sviluppando il logaritmo: $\log\left(1+\frac{z}{2}\right)\frac{1}{z} \underset{z\to 0}{=} \left(\frac{z}{2}+\mathcal{O}(z^2)\right)\frac{1}{z}$

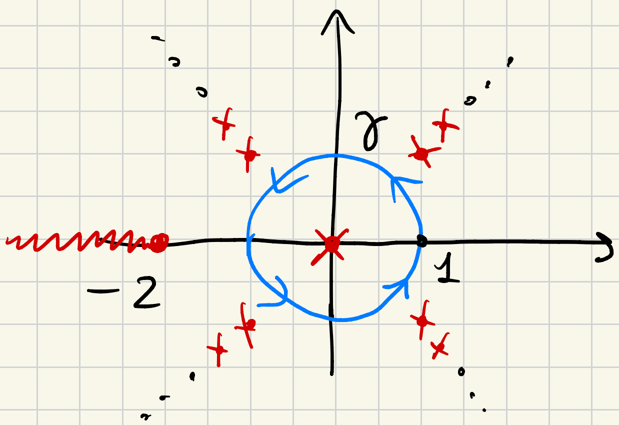
$\underset{z\to 0}{=} \left(\frac{1}{2} + O(z)\right) \Rightarrow$ questo fattore è regolare in $z=0$. Questo fattore però, a causa del log, ha un punto di diramazione dove l'argomento del log si annulla, ovvero $z=-2$, e un punto di diramazione in $z=\infty$.

Mettendo assieme quanto discusso per i vari fattori, concludiamo che $f(z)$ ha:

* un polo di ordine 2 in $z=0$;
* singolarità rimovibili in $z = \pm e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$;
* poli di ordine 1 in $z = \pm e^{\pm i\pi/4}\sqrt{k}$, $k\in\mathbb{Z}$, $k\geq 2$;
* punti di diramazione in $z=-2$ e $z=\infty$;

$z=\infty$ essendo un punto di diramazione non è una singolarità isolata.

II)



$$\oint_\gamma dz\, f(z)$$

L'unica singolarità interna al cammino è il polo di ordine 2 in $z=0$. Quindi:

$$\oint_\gamma dz\, f(z) = 2\pi i\, \mathrm{Res}_f(z=0)$$

Per calcolare il residuo, espandiamo per $z \to 0$:

$$f(z) \underset{z\to 0}{=} \frac{(1+z^4)\underbrace{\left(\frac{z}{2} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{4} + O(z^3)\right)}_{\text{espansione di } \log(1+\frac{z}{2})}}{z\underbrace{\left(\pi z^2 + O(z^6)\right)}_{\text{espansione di } \sinh(\pi z^2)}}$$

$$= \frac{1}{\cancel{z}}(1+z^4)\frac{\cancel{z}}{2}\left(1 - \frac{z}{4} + O(z^2)\right)\frac{1}{\pi z^2(1+O(z^4))}$$

$$= \frac{1}{2\pi z^2}(1+z^4)\left(1-\frac{z}{4}+O(z^2)\right)(1+O(z^4))$$

$$= \frac{1}{2\pi z^2}\left(1-\frac{z}{4}+O(z^2)\right)$$

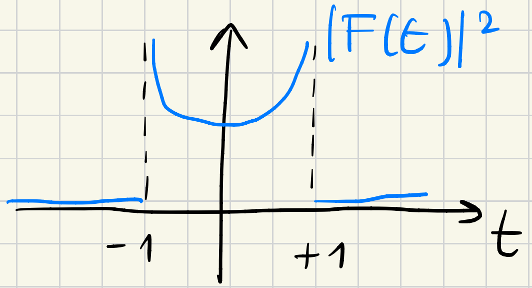
$$= \frac{1}{2\pi z^2} - \frac{1}{8\pi z} + O(1)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}_f(0) = -\frac{1}{8\pi}$$

$$\Rightarrow \oint f(z)\,dz = -2\pi i \frac{1}{8\pi} = -\frac{i}{4}.$$

ESERCIZIO 2 $\quad F(t) = \dfrac{1}{(1-t^2)^{1/4}}\,\theta(1-|t|)$

I) $\quad |F(t)|^2 = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\theta(1-|t|)$



$|F(t)|^2$ diverge in $t=\pm 1$ ma va a ∞ in questi punti come: $\dfrac{1}{\sqrt{1\mp t}}$ $\Rightarrow$ singolarità integrabile. Quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(t)|^2\,dt < +\infty \Rightarrow F(t) \in L^2(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \hat{F}(\omega) \in L^2(\mathbb{R}).$$

$|F(t)|$ va a ∞ ancora più lentamente in $t=\pm 1$, ovvero come $\dfrac{1}{(1\pm t)^{1/4}}$, quindi a maggior ragione è integrabile:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(t)|\,dt < +\infty \Rightarrow F(t) \in L^1(\mathbb{R})$$

$\Rightarrow \hat{F}(\omega)$ è continua e limitata.

Se moltiplichiamo $F(t)$ per una potenza arbitraria t^k, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, le considerazioni sulla convergenza dell'integrale non cambiano, visto che la $\Theta(1-|t|)$ restringe il dominio a $t \in [-1, 1]$ su cui t^k è una funzione misurabile e limitata. Quindi:

$$\forall k \geq 0 \quad , \quad t^k F(t) \in L^1(\mathbb{R}) \text{ e } \in L^2(\mathbb{R}).$$

Usando la proprietà della trasformata:

$$\widehat{t^k F(t)} = (-i)^k \frac{d^k}{d\omega^k} \hat{F}(\omega)$$

deduciamo che quindi deve valere anche per $\forall k \geq 1$ che:

$$\Rightarrow \quad \frac{d^k}{d\omega^k} \hat{F}(\omega) \in L^2(\mathbb{R}) \text{ ed è}$$

continua e limitata.

Se invece prendiamo una derivata di $F(t)$ troviamo:

$$\frac{d}{dt} F(t) = -\frac{1}{4} \frac{1}{(1-t^2)^{5/4}} 2t$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{t}{(1-t^2)^{5/4}} , \quad \forall t \in (-1, 1)$$

da cui segue che ora le divergenze per $t \to \pm 1$ è di tipo: $\frac{1}{(1 \pm t)^{5/4}}$ che non è integrabile. Aggiungendo altre derivate la potenza al denominatore può solo aumentare, e la funzione è ancora $\notin L^1(\mathbb{R})$ e $\notin L^2(\mathbb{R})$.

Riassumendo abbiamo mostrato che:

* $t^k F(t) \in L^1(\mathbb{R})$ e $\in L^2(\mathbb{R})$, $\forall k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$
* $\frac{d^k}{dt^k} F(t) \notin L^1(\mathbb{R})$ e $\notin L^2(\mathbb{R})$, $\forall k \in \mathbb{Z}, k \geq 1$.

II) Visto che $F(t)$ e $\hat{F}(\omega)$ sono in $L^2(\mathbb{R})$, vale l'antitrasformata:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \hat{F}(\omega) e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, \hat{F}(\omega) = 2\pi F(0) = 2\pi.$$

Visto che $\hat{F}^{(k)}(\omega)$, $\forall k \geq 0$, è trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R})$, vale il teorema di Riemann-Lebesgue che afferma che:

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} \hat{F}^{(k)}(\omega) = 0.$$

III) Vale l'identità di Parseval (perché $F \in L^2(\mathbb{R})$):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, |\hat{F}(\omega)|^2 = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |F(t)|^2$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{+1} dt \, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\underset{t = \sin\theta}{=} 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta \, \cancel{\cos\theta} \, \frac{1}{\cancel{\sqrt{1-\sin\theta^2}}} = 2\pi \cdot \pi = 2\pi^2$$

ESERCIZIO 3 $\quad g(t) = e^{-i\alpha t}, \quad t \in [-T, T]$

I) $$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{g}_n \frac{1}{\sqrt{2T}} e^{-i\frac{n\pi t}{T}}$$

$$\hat{g}_n = \int_{-T}^{T} dt \, \frac{1}{\sqrt{2T}} e^{+i\frac{n\pi t}{T}} g(t)$$

$$= \int_{-T}^{T} dt \, \frac{1}{\sqrt{2T}} e^{i\left(\frac{n\pi}{T} - \alpha\right)t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2T}} \frac{1}{i\left(\frac{n\pi}{T} - \alpha\right)} \left(e^{i\left(\frac{n\pi}{T} - \alpha\right)T} - e^{-i\left(\frac{n\pi}{T} - \alpha\right)T}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2T}} \frac{-iT}{(n\pi - \alpha T)} 2i \sin(n\pi - \alpha T)$$

$$= \sqrt{2T}\ \frac{\sin(n\pi - \alpha T)}{n\pi - \alpha T}.$$

$\underline{\mathrm{II}}$) Vale Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{g}_n|^2 = \int_{-T}^{+T} dt\, |g(t)|^2$$

$$\Rightarrow\quad 2T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{|\sin(n\pi - \alpha T)|^2}{|n\pi - \alpha T|^2}$$

$$= \int_{-T}^{+T} dt\, |e^{-i\alpha t}|^2$$

$$= \int_{-T}^{+T} dt\ e^{2\,\mathrm{Im}(\alpha)\,t}$$

$$= \frac{1}{2\,\mathrm{Im}(\alpha)} \left(e^{2\,\mathrm{Im}(\alpha) T} - e^{-2\,\mathrm{Im}(\alpha) T} \right)$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Im}(\alpha)} \sinh(2\,\mathrm{Im}(\alpha) T)$$

$$\Rightarrow\quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{|\sin(n\pi - \alpha T)|^2}{|n\pi - \alpha T|^2} = \frac{\sinh(2\,\mathrm{Im}(\alpha) T)}{2\,\mathrm{Im}(\alpha)\, T}.$$