ESERCIZIO 1 $\quad f(z) = \dfrac{\sin z}{z(z-\pi)}$

I) Zeri del denominatore: $z=0$, $z=\pi$.

In questi punti però anche il denominatore si annulla:

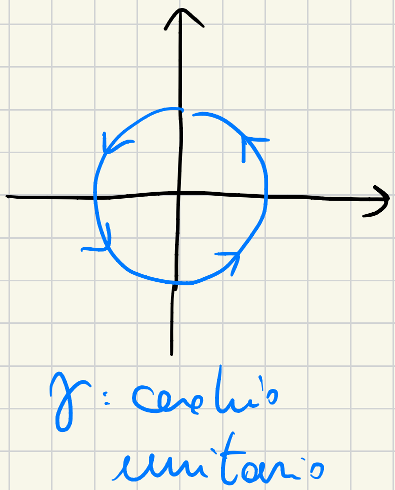
$$\sin z \underset{z\to 0}{\sim} z + O(z^3)$$

$$\sin z \underset{z\to \pi}{\sim} -(z-\pi) + O\left((z-\pi)^3\right)$$

$\Rightarrow$ $z=0$ e $z=\pi$ sono singolarità rimuovibili.

$\sin z$ dà luogo a una singolarità essenziale in $z=\infty$ (dà infinite potenze negative di $\frac{1}{z}$).

II)



$\oint_\gamma f(z)dz = 0$

$\downarrow$

teorema interno dei residui: non ci sono singolarità all'interno.

$\oint_\gamma f(z)dz = -2\pi i \, Res_f(\infty)$. Confrontando,

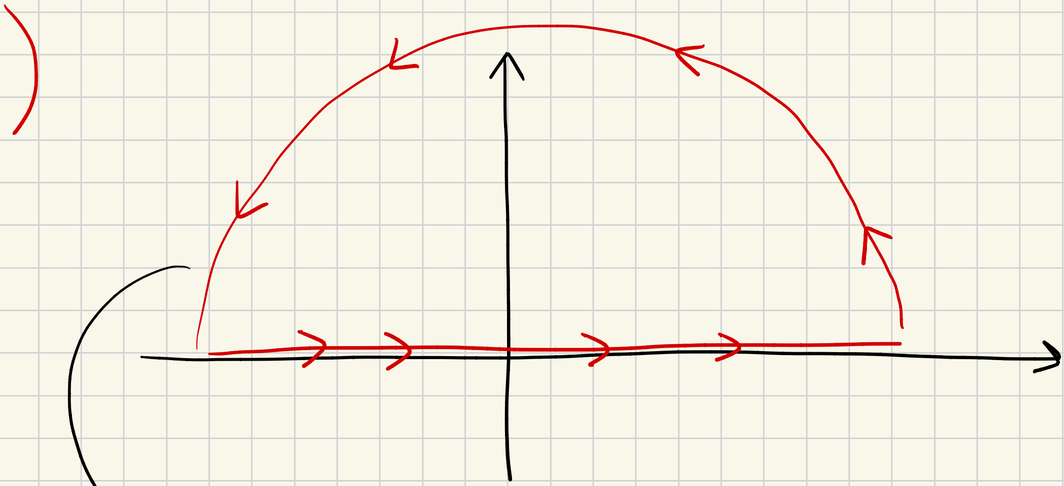
$\downarrow$

teorema esterno: non ci sono singolarità esterne per z finito.

otteniamo:

$Res_f(\infty) = 0$.

III)

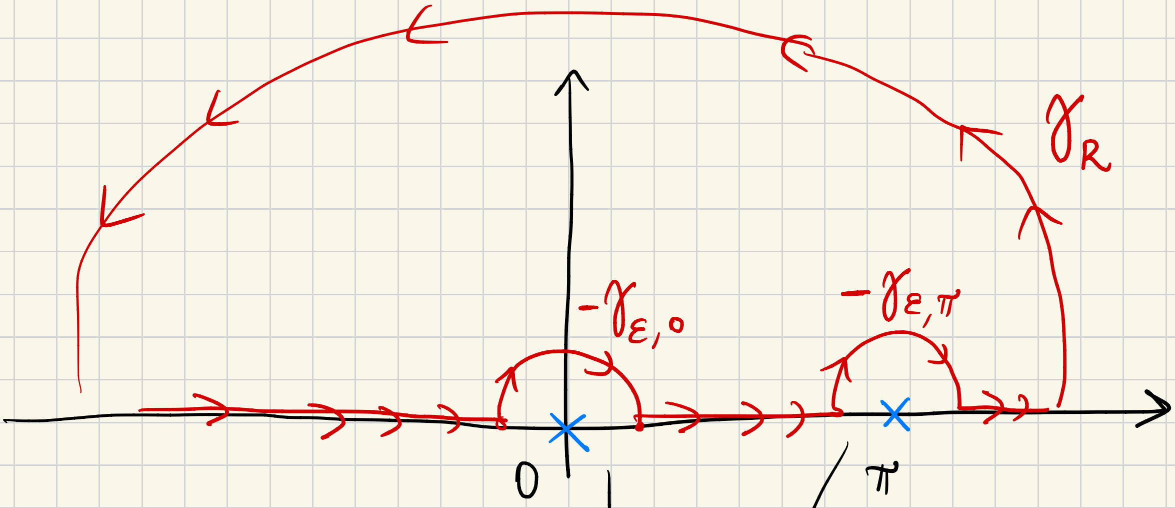


Non possiamo calcolare l'integrale reale $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{\sin x}{x(x-\pi)}$ usando $f(z)$ perchè la funzione $\sin z$ non è limitata nè sull'arco nel semipiano superiore, nè sull'arco nel semipiano inferiore $\Rightarrow$ non possiamo ottenere un cammino chiuso.

Invece possiamo scrivere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{\sin x}{x(x-\pi)} = \mathrm{Im}\left[P \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{e^{ix}}{x(x-\pi)} \right]$$

Dobbiamo usare la parte principale perchè la funzione $\frac{e^{ix}}{x(x-\pi)}$ ha singolarità sul cammino di integrazione, poli di ordine 1 in $z=0,\pi$.



definisco con $-$ perché in senso orario.

$$P\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{e^{ix}}{x(x-\pi)}$$

$$= \lim_{\substack{R\to+\infty \\ \varepsilon\to 0^+}} \left[\left(\oint_{\gamma} dz + \int_{+\gamma_{\varepsilon,0}} dz + \int_{+\gamma_{\varepsilon,\pi}} dz - \int_{\gamma_R} dz \right) \frac{e^{iz}}{z(z-\pi)} \right]$$

$$\oint dz\, \frac{e^{iz}}{z(z-\pi)} = 0$$ perché non ci sono singolarità interne.

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\gamma_{\varepsilon,0}} dz\, \frac{e^{iz}}{z(z-\pi)} = \pi i\, \mathrm{Res}_{\frac{e^{iz}}{z(z-\pi)}}(z=0)$$

$$= \pi i \times \lim_{z\to 0} \left[\cancel{z}\, \frac{e^{iz}}{\cancel{z}(z-\pi)} \right] = \pi i \left(-\frac{1}{\pi} \right) = -i$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\gamma_{\varepsilon,\pi}} dz\, \frac{e^{iz}}{z(z-\pi)} = \pi i\, \mathrm{Res}_{\frac{e^{iz}}{z(z-\pi)}}(z=\pi)$$

$$= \pi i \lim_{z\to\pi} \left[\cancel{(z-\pi)} \frac{e^{iz}}{z\cancel{(z-\pi)}} \right] = \pi i \frac{(-1)}{\pi} = -i .$$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} dz \frac{e^{iz}}{z(z-\pi)} = 0$$ per lemma di Jordan

(lo possiamo usare perché $\underset{\gamma_R}{\mathrm{Max}} \left| \frac{1}{z(z-\pi)} \right| \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$.)

Quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin x}{x(x-\pi)} = \mathrm{Im}\left[-i-i\right] = -2 .$$

ESERCIZIO 2 $\quad F * G'' = G_a + G_{-a} - 2G$

I) Applicando la trasformata troviamo

$$\hat{F}(\omega) \cdot \widehat{G''}(\omega) = \widehat{G_a}(\omega) + \widehat{G_{-a}}(\omega) - 2\hat{G}(\omega)$$

$\downarrow$

$\mathcal{F}$ manda convoluzione in prodotto.

Proprietà di $\mathcal{F}$ e derivate:

$$\widehat{G''}(\omega) = (-i\omega)^2 \hat{G}(\omega) = -\omega^2 \hat{G}(\omega)$$

Proprietà di $\mathcal{F}$ e traslazioni:

$$\widehat{G_a}(\omega) = e^{-i\omega a}\,\hat{G}(\omega)$$

$$\widehat{G_{-a}}(\omega) = e^{+i\omega a}\,\hat{G}(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad -\omega^2 \hat{F}(\omega)\cancel{\hat{G}(\omega)} = (\overbrace{e^{i\omega a} + e^{-i\omega a}}^{2\cos(\omega a)} - 2)\cancel{\hat{G}(\omega)}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{F}(\omega) = 2\,\frac{1-\cos(a\omega)}{\omega^2} \qquad 1 - 1 + \frac{1}{2}a^2\omega^2$$

II) $\hat{F}(\omega)$ non ha nessuna divergenza perché $\lim_{\omega \to 0} \hat{F}(\omega) = a^2$ e quindi è continua su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre vale che:

$$|\hat{F}(\omega)| = 2\,\frac{|1-\cos(a\omega)|}{|\omega|^2} \leq \frac{4}{|\omega|^2}$$ dunque sia

$|\hat{F}(\omega)|$ che $|\hat{F}(\omega)|^2$ sono integrabili per $|\omega| \to +\infty$.

Dunque: $\hat{F}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$ e $\in L^1(\mathbb{R})$.

$$\hat{F} \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow F(t) \in L^2(\mathbb{R})$$

perché $\mathcal{F}$ manda L^2 in L^2. Possiamo quindi usare l'antitrasformata per ottenere che:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi}\,\mathcal{F}[\hat{F}(\omega)](-t)$$

Visto che $\hat{F}(\omega) \in L^1(\mathbb{R})$ e $\mathcal{F}$ manda funzioni $L^1(\mathbb{R})$ in funzioni continue e limitate, deduciamo che $F(t)$ è continua e limitata.

$$\widehat{F'}(\omega) = -i\omega\,\hat{F}(\omega).$$

proprietà delle trasformate.

$$= -2i\,\frac{1-\cos(a\omega)}{\omega}$$

Valgono le stesse osservazioni fatte sopra, eccetto che ora il comportamento per $|\omega| \to +\infty$ è $\frac{1}{|\omega|}$ non $\frac{1}{|\omega|^2}$ $\Rightarrow$ $\widehat{F'}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$ ma non $\in L^1(\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ $F'(t)$ è in $L^2(\mathbb{R})$.

ESERCIZIO 3

$\{\sqrt{2}\sin(n\pi x)\}_{n\geq 1}$ su $L^2([0,1])$.

I) Coefficienti di Fourier

$$\sin(\alpha x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sqrt{2}\sin(n\pi x)$$

Con $b_n = \int_0^1 dx\,\sqrt{2}\sin(n\pi x)\sin(\alpha x)$

$$= \int_0^1 dx \sqrt{2} \; \frac{e^{in\pi x} - e^{-in\pi x}}{2i} \; \frac{e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}}{2i}$$

$$= \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{(2i)^2}}_{-\frac{1}{2\sqrt{2}}} \int_0^1 dx \left(e^{i(n\pi+\alpha)x} - e^{i(n\pi-\alpha)x} - e^{-i(n\pi-\alpha)x} + e^{-i(n\pi+\alpha)x} \right)$$

Conviene calcolare: $\int_0^1 dx\, e^{iAx}$ con generico A:

$$\int_0^1 dx\, e^{iAx} = \frac{1}{iA} \left(e^{iAx} \right)\Big|_0^1 = \frac{e^{iA} - 1}{iA} .$$

Sostituendo:

$$b_n = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{e^{i(n\pi+\alpha)} \cancel{-1}}{i(n\pi+\alpha)} - \frac{e^{i(n\pi-\alpha)} \cancel{-1}}{i(n\pi-\alpha)} - \frac{e^{-i(n\pi-\alpha)} \cancel{-1}}{-i(n\pi-\alpha)} + \frac{e^{-i(n\pi+\alpha)} \cancel{-1}}{-i(n\pi+\alpha)} \right)$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{e^{i(n\pi+\alpha)} - e^{-i(n\pi+\alpha)}}{i(n\pi+\alpha)} - \frac{e^{i(n\pi-\alpha)} - e^{-i(n\pi-\alpha)}}{i(n\pi-\alpha)} \right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sin(n\pi+\alpha)}{n\pi+\alpha} - \frac{\sin(n\pi-\alpha)}{n\pi-\alpha} \right)$$

$\sin(n\pi + X) = (-1)^n \sin(X)$, quindi:

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2}} \sin(\alpha) \left(\frac{1}{n\pi + \alpha} + \frac{1}{n\pi - \alpha} \right)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2}} \sin(\alpha) \frac{n\pi \cancel{-\alpha} + n\pi \cancel{+\alpha}}{n^2\pi^2 - \alpha^2}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2}} \sin(\alpha)(2\pi) \frac{n}{n^2\pi^2 - \alpha^2}$$

II) L'identità di Parseval ci dice che:

$$\int_0^1 dx \, |\sin(\alpha x)|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^2$$

Calcoliamo il membro sinistro:

$$\int_0^1 dx \, (\sin(\alpha x))^2 = \int_0^1 dx \, \frac{1 - \cos(2\alpha x)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2\alpha} (\sin(2\alpha x)) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2\alpha} \left(\sin(2\alpha) \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sin(2\alpha)}{2\alpha} \right)$$

Calcoliamo il membro destro:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}(\sin(\alpha))^2 (2\pi)^2 \frac{n^2}{(n^2\pi^2-\alpha^2)^2}$$

$$= 2\pi^2(\sin(\alpha))^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(n^2\pi^2-\alpha^2)^2}$$

serie che vogliamo calcolare.

Uguagliando i due risultati troviamo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(n^2\pi^2-\alpha^2)^2} = \frac{1}{4\pi^2(\sin(\alpha))^2}\left(1 - \frac{\sin(2\alpha)}{2\alpha}\right).$$