

## Soluzione Esercizio 1

**I** Usando che la trasformata del prodotto di convoluzione è il prodotto delle trasformate

$$\widehat{G^{*n}}(\omega) = (-1)^n \frac{1}{(1 + \omega^2)^n} .$$

**II** La somma della serie geometrica (che converge perché  $|\frac{1}{1+\omega^2}| < 1$ ) dà

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{G^{*n}}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(1 + \omega^2)^n} - 1 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\omega^2}} - 1 = -\frac{1}{2 + \omega^2} .$$

**III** Dobbiamo calcolare l'integrale che definisce l'anti-trasformata, ovvero

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left( -\frac{1}{2 + \omega^2} \right) e^{-i\omega t} .$$

Usando il lemma di Jordan, per  $t \geq 0$  chiudiamo il contorno con un arco nel semipiano inferiore del piano complesso  $\omega$ , e riceviamo contributo solo dal polo in  $\omega = -i\sqrt{2}$ , viceversa per  $t < 0$  chiudiamo nel semipiano superiore e riceviamo contributo dal polo in  $\omega = i\sqrt{2}$ . Quindi troviamo

$$g(t) = \begin{cases} -2\pi i \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{1}{-2\sqrt{2}i} \right) e^{-\sqrt{2}t} , & t \geq 0 \\ 2\pi i \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{1}{2\sqrt{2}i} \right) e^{\sqrt{2}t} , & t < 0 \end{cases} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|t|} .$$

## Soluzione Esercizio 2

**I** Ponendo  $z = \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$  otteniamo la seguente equazione per la variabile  $e^{it}$

$$(e^{it})^2 - 2z e^{it} + 1 = 0 \Rightarrow (e^{it})_{\pm} = \frac{z \pm i\sqrt{1 - z^2}}{2} .$$

Dato che vogliamo ottenere  $t = \arccos(z) \in [0, \pi]$ , richiediamo che  $e^{it}$  sia sulla parte del cerchio unitario tra gli angoli 0 e  $\pi$ , dunque  $e^{it}$  deve avere parte immaginaria positiva. Pertanto va scelto il segno  $+$ . Per concludere basta prendere il logaritmo e dividere per  $i$ .

**II** Percorrendo in maniera continua un cerchio di raggio infinitesimo attorno a  $z = 1$

$$z - 1 \rightarrow (z - 1)e^{2\pi i}$$

si ha che

$$\sqrt{1 - z} \rightarrow -\sqrt{1 - z} , \quad \sqrt{1 - z^2} \rightarrow -\sqrt{1 - z^2} . \quad (1)$$

Usando questo dentro l'argomento del logaritmo, troviamo (nota che per  $z$  vicino a 1 l'argomento del logaritmo è molto vicino a 1 e quindi possiamo ignorare la discontinuità del logaritmo in questo calcolo)

$$\log(z + i\sqrt{1-z^2}) \rightarrow \log(z - i\sqrt{1-z^2}) = \log\left(\frac{1}{z + i\sqrt{1-z^2}}\right) = -\log(z + i\sqrt{1-z^2}) .$$

Pertanto

$$F(z) \rightarrow \frac{-\log(z + i\sqrt{1-z^2})}{-\sqrt{1-z^2}} = \frac{\log(z + i\sqrt{1-z^2})}{\sqrt{1-z^2}} = F(z) ,$$

e dunque  $F(z)$  non ha un punto di diramazione in  $z = 1$ .

**III** Da un semplice calcolo si ottiene

$$\frac{df}{dz} = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-z}} \left(-\frac{1}{\sqrt{z+1}}\right) .$$

Dato che  $-\frac{1}{\sqrt{z+1}}$  è olomorfa in  $z = 1$ , ammette una serie di Taylor centrata in questo punto, i cui coefficienti possiamo denotare con  $a_n$ , e troviamo così l'espansione richiesta. Usando l'espressione fornita per  $f(z)$ , vediamo che

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (1-z)^{n-1} ,$$

da cui segue

$$F(1) = b_1 = -2a_0 = -2 \left(-\frac{1}{\sqrt{z+1}}\right) \Big|_{z=1} = \sqrt{2} .$$

## Soluzione Esercizio 3

**I** Notiamo che

$$\begin{aligned} & (T(e^{(n)}), T(e^{(m)})) \\ &= \left( \frac{e^{(2n-1)} + e^{(2n)}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{(2m-1)} + e^{(2m)}}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} [(e^{(2n-1)}, e^{(2m-1)}) + (e^{(2n-1)}, e^{(2m)}) + (e^{(2n)}, e^{(2m-1)}) + (e^{(2n)}, e^{(2m)})] \\ &= \frac{1}{2} [\delta_{nm} + 0 + 0 + \delta_{nm}] = \delta_{nm} . \end{aligned}$$

Pertanto dati due arbitrari vettori  $v, w \in H$ , i cui coefficienti di Fourier nel s.o.c. denoteremo rispettivamente con  $\alpha_n$  e  $\beta_n$ , troviamo

$$(T(v), T(w)) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^* \beta_m (T(e^{(n)}), T(e^{(m)})) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^* \beta_n = (v, w) .$$

$T$  non è unitario perché non è invertibile, come si vede dal fatto che i vettori  $e^{(2n-1)} - e^{(2n)}$  sono ortogonali a tutti i vettori in  $\text{Im}(T)$ .

**II** Notiamo che

$$\begin{aligned}
& (e^{(n)}, T(e^{(m)})) \\
&= \left( e^{(n)}, \frac{e^{(2m-1)} + e^{(2m)}}{\sqrt{2}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} [\delta_{n,2m-1} + \delta_{n,2m}] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} \delta_{\frac{n+1}{2}, m} & , \text{ per } n \text{ dispari,} \\ \delta_{\frac{n}{2}, m} & , \text{ per } n \text{ pari} \end{cases} \\
&= (T^\dagger(e^{(n)}), e^{(m)}) .
\end{aligned}$$

Nell'ultima riga abbiamo definito

$$T^\dagger(e^{(n)}) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{(\frac{n+1}{2})} & , \text{ per } n \text{ dispari,} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{(\frac{n}{2})} & , \text{ per } n \text{ pari.} \end{cases}$$

Verifichiamo che in effetti questo operatore è l'aggiunto. Dati due vettori arbitrari  $v$  e  $w$  in  $H$  abbiamo

$$(v, T(w)) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^* \beta_m (e^{(n)}, T(e^{(m)})) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^* \beta_m (T^\dagger(e^{(n)}), e^{(m)}) = (T^\dagger(v), w) .$$

**III** Supponiamo  $T(v) = \lambda v$ . Denotando con  $\alpha_n$  i coefficienti di Fourier di  $v$ , questa uguaglianza implica

$$\lambda \alpha_n = \begin{cases} \alpha_{\frac{n+1}{2}} & , \text{ per } n \text{ dispari,} \\ \alpha_{\frac{n}{2}} & , \text{ per } n \text{ pari.} \end{cases}$$

Se fosse  $\lambda = 0$  da questa equazione seguirebbe subito  $\alpha_n = 0$  per ogni  $n$ , quindi possiamo restringerci a  $\lambda \neq 0$ . Con questa assunzione, mostriamo per induzione su  $n$  che  $\alpha_n = \alpha_1$  per ogni  $n \geq 1$ . È banalmente vero per  $n = 1$ . Supponiamo che  $\alpha_n = \alpha_1$  sia vero per ogni  $n < N$ , allora dall'equazione abbiamo che  $\alpha_N = \frac{1}{\lambda} \alpha_1$ . Inoltre dall'equazione stessa per  $n = 1$  abbiamo che  $\alpha_1 = \lambda \alpha_1$ , quindi abbiamo trovato  $\alpha_N = \alpha_1$ , che conclude la dimostrazione per induzione. Pertanto la successione  $\alpha_n$  è costante, ma deve anche essere a quadrato sommabile, e dunque l'unica possibilità è che  $\alpha_n = 0$  per ogni  $n$ . Segue che  $v = 0$  e non c'è nessun autovettore per  $T$ .

Invece dalla definizione di  $T^\dagger$  abbiamo:  $T^\dagger(e^{(1)}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{(1)}$ . Dunque  $e^{(1)}$  è autovettore di  $T^\dagger$ .