Soluzione Esercizio 1

I La funzione ha singolarità in $z = 0$ a causa del fattore $\frac{1}{z}$ e nei punti $z = z_k \equiv \frac{i}{2\pi k}$ in cui $e^{\frac{1}{z_k}} = 1$. Attorno a $z = \infty$ abbiamo

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{-\frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \mathcal{O}(z^{-3})} = -1 + \frac{1}{2z} + \mathcal{O}(z^{-2}) \ , \tag{1}$$

quindi la funzione non ha singolarità a $z = \infty$. Dato che la successione z_k si accumula in $z = 0$, $z = 0$ non è una singolarità isolata. Invece le singolarità in $z = z_k$ sono isolate e sono poli semplici (vedi II per la dimostrazione che sono poli semplici).

II Il residuo in z_k è

$$\mathrm{Res}_f(z_k) = \lim_{z \to z_k} (z - z_k)\frac{1}{z}\frac{1}{1 - e^{\frac{1}{z}}} = -\frac{1}{z_k}\frac{1}{\left.\frac{d\,e^{\frac{1}{z}}}{dz}\right|_{z=z_k}} = z_k \ .$$

Il fatto che questo limite sia $\neq 0, \infty$ mostra che in effetti $z = z_k$ è un polo di ordine 1. Dall'equazione (1) segue che

$$\mathrm{Res}_f(\infty) = -\frac{1}{2} \ .$$

III I poli semplici esterni a $\gamma_0(\frac{1}{3\pi})$ sono solo z_1 e z_{-1}. Dunque otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_0(\frac{1}{3\pi})} dz\, f(z) &= -2\pi i \mathrm{Res}_f(z_1) - 2\pi i \mathrm{Res}_f(z_{-1}) - 2\pi i \mathrm{Res}_f(\infty) \\ &= -2\pi i z_1 - 2\pi i z_{-1} + \pi i = +\pi i \ .\end{aligned}$$

Soluzione Esercizio 2

I La trasformata di Laplace dell'equazione dà

$$-\frac{d}{ds}\left(s\tilde{F}(s) - F(0)\right) = \alpha \tilde{F}(s) \ .$$

Distribuiamo la derivata all'interno della parentesi. Dato che $F(0)$ è una costante, la sua derivata rispetto a s è zero, per cui l'equazione diventa

$$s\frac{d}{ds}\tilde{F}(s) = (-\alpha - 1)\tilde{F}(s) \ ,$$

da cui $\tilde{F}(s) = C' s^{-\alpha-1}$.

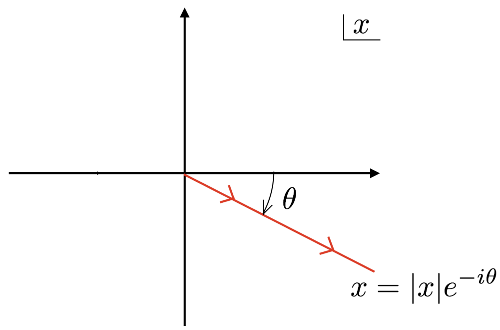

Figure 1

II L'integrale che definisce la trasformata di Laplace è

$$\tilde{F}(s) = \int_0^\infty dx\, C x^\alpha\, e^{-sx} \ .$$

Facendo l'assunzione $s \in \mathbb{R}_+$, possiamo calcolare l'integrale con il cambio di variabile $x = t/s$, ottenendo $\tilde{F}(s) = C\Gamma(\alpha+1)s^{-\alpha-1}$. Siccome dall'integrale vediamo che in questo caso l'ascissa di convergenza è $\lambda_0 = 0$, $\tilde{F}(s)$ è una funzione olomorfa per $\mathrm{Re}(s) > 0$, e quindi possiamo concludere che $\tilde{F}(s) = C\Gamma(\alpha+1)s^{-\alpha-1}$ su tutto il semipiano $\mathrm{Re}(s) > 0$, dove $s^{-\alpha-1}$ per $\alpha \notin \mathbb{Z}$ è definita con un taglio sull'asse reale negativo.

Un altro modo di ottenere questo risultato è di considerare $s = |s|e^{i\theta}$ e usare olomorfia per ruotare il cammino di integrazione nel piano complesso x come mostrato in figura 1. Scegliendo $|x| \in [0, +\infty[$ come parametro dell'integrale, otteniamo

$$\tilde{F}(s) = \int_0^\infty d|x| e^{-i\theta} C |x|^\alpha e^{-i\alpha\theta} e^{-|x||s|} \ ,$$

e facendo il cambio di variabile $|x| = t/|s|$ troviamo

$$\tilde{F}(s) = C\Gamma(\alpha+1)|s|^{-\alpha-1}e^{-i(\alpha+1)\theta} = C\Gamma(\alpha+1)s^{-\alpha-1} \ .$$

In entrambi i casi è necessario imporre $\alpha > -1$ per evitare che l'integrale diverga in $x = 0$.

III Dobbiamo calcolare

$$F(x) = \int_\gamma \frac{ds}{2\pi i} s^{-\alpha-1} e^{sx} \ ,$$

dove γ è una retta verticale $\mathrm{Re}(s) = c$ con $c > 0$, orientata da $-i\infty$ a $+i\infty$. Seguendo il suggerimento deformiamo il cammino in modo che circondi il taglio di $s^{-\alpha-1}$ sull'asse reale negativo. Notiamo che il cammino deformato andrà da $-\infty$ a 0 sotto il taglio, e da 0 a $+\infty$

sopra il taglio. Prendiamo $|s| = -s \in [0, +\infty[$ come parametro dell'integrale. La funzione $s^{-\alpha-1}$ sopra/sotto il taglio vale

$$(-|s| \pm i0^+)^{-\alpha-1} = |s|^{-\alpha-1} e^{\mp i\pi(\alpha+1)} \ ,$$

per cui otteniamo

$$\begin{aligned} F(x) &= -\int_0^{+\infty} \frac{d|s|}{2\pi i} C\Gamma(\alpha+1)|s|^{-\alpha-1}(e^{-i\pi(\alpha+1)} - e^{i\pi(\alpha+1)})e^{-|s|x} \\ &= \frac{C\Gamma(\alpha+1)\sin(\pi(\alpha+1))}{\pi} \int_0^{+\infty} d|s|\, |s|^{-\alpha-1} e^{-|s|x} \\ &= \frac{C\Gamma(\alpha+1)\sin(\pi(\alpha+1))\Gamma(-\alpha)}{\pi} x^\alpha \ . \end{aligned}$$

Dunque utilizzando l'identità $\frac{\Gamma(\alpha+1)\sin(\pi(\alpha+1))\Gamma(-\alpha)}{\pi} = 1$ abbiamo verificato che l'anti-trasformata restituisce la funzione iniziale $F(x) = Cx^\alpha$.

Soluzione Esercizio 3

I Date $f, g \in L^2([-\pi, \pi])$, abbiamo

$$(\phi(f), \phi(g))_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{2}{1+x^2} \, f^*(2\arctan(x)) \, g(2\arctan(x)) \ .$$

Cambiando variabile da x a $t = 2\arctan(x)$ troviamo

$$(\phi(f), \phi(g))_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{-\pi}^{+\pi} dt \, f^*(t) \, g(t) = (f, g)_{L^2([-\pi,\pi])} \ .$$

In particolare se f è a quadrato sommabile abbiamo che $(\phi(f), \phi(f))_{L^2(\mathbb{R})} = (f, f)_{L^2([-\pi,\pi])} < \infty$ e quindi $\phi(f)$ è anche a quadrato sommabile.

II Notiamo che

$$\phi(e^{-ikt})(x) = \sqrt{\frac{2}{1+x^2}} e^{-ik\, 2\arctan(x)} = \sqrt{\frac{2}{1+x^2}} \left(e^{-i\, 2\arctan(x)}\right)^k \ .$$

Quindi è sufficiente mostrare che $e^{-i\,2\arctan(x)} = \frac{i+x}{i-x}$. Equivalentemente, poniamo $x = \tan(t/2)$ e mostriamo che $e^{-it} = \frac{i+\tan(t/2)}{i-\tan(t/2)}$. Scrivendo le funzioni trigonometriche in termini di esponenziale complesso infatti abbiamo

$$\frac{i+\tan(t/2)}{i-\tan(t/2)} = \frac{i(e^{i\frac{t}{2}} + e^{-i\frac{t}{2}}) - i(e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}})}{i(e^{i\frac{t}{2}} + e^{-i\frac{t}{2}}) + i(e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}})} = \frac{2ie^{-i\frac{t}{2}}}{2ie^{i\frac{t}{2}}} = e^{-it} \ .$$

Dato che ϕ preserva il prodotto scalare e $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ikt}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ è un sistema ortonormale, anche la sua immagine è un sistema ortonormale. Notiamo che ϕ è invertibile, con inversa data da

$$\phi^{-1}(F)(t) = \frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)}F\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) \ .$$

Se $(F, \phi(e^{-ikt}))_{L^2(\mathbb{R})} = 0$, per ogni k, allora abbiamo che $(\phi^{-1}(F), e^{-ikt})_{L^2([-\pi,\pi])} = 0$, e dato che $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ikt}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ è un sistema ortonormale completo (s.o.c.) concludiamo che $\phi^{-1}(F) = 0$ da cui segue $F = 0$. Quindi $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\phi(e^{-ikt})\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ è un s.o.c. su $L^2(\mathbb{R})$.

III I coefficienti di Fourier a_k di $F(x)$ sono definiti da

$$a_k = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\phi(e^{-ikt}), F\right)_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{-i+x}{-i-x}\right)^k \frac{1}{4+x^2}$$

La funzione integranda ha poli semplici in $x = \pm 2i$, e inoltre per $k > 0$ ha un polo di ordine k in $x = -i$ e per $k < 0$ ha un polo di ordine k in $x = i$. Per $k \geq 0$ chiudiamo il cammino con un arco nel semipiano superiore del piano complesso x, in modo che contribuisca solo il polo semplice in $x = 2i$, viceversa per $k < 0$ chiudiamo nel semipiano inferiore in modo che contribuisca solo il polo semplice in $x = -2i$. Otteniamo

$$a_k = \begin{cases} 2\pi i \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{4i}\left(\frac{i}{-3i}\right)^k & , \ k \geq 0 \\ -2\pi i \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{-4i}\left(\frac{-3i}{i}\right)^k & , \ k < 0 \end{cases} = \frac{\sqrt{2\pi}(-1)^k\, 3^{-|k|}}{4} \ .$$