ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA II

A.A. 2023/2024

DOCENTE: PROF.SSA RODICA TOADER

ESERCIZI SULLA CONVERGENZA DELLE SERIE NUMERICHE

ATTENZIONE Potrebbero esserci degli errori di stampa nei risultati. Siete gentilmente pregati di comunicarmeli.

1. [A-B] esercizio 9.4: dite se sono convergenti, divergenti, indeterminate le seguenti serie, al variare dell'eventuale parametro reale α .

a. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{n^2}}{n^{2n}}$ [divergente a $+\infty$]

b. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n + (-1)^n n^2}$ [convergente]

c. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \cos n}{1 - \sin n}$ [divergente a $+\infty$]

d. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^2}$ [divergente a $+\infty$]

e. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$ [convergente]

f. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + \sin^2 n}$ [divergente a $+\infty$]

g. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + e^n}{n!}$ [convergente]

h. $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin n$ [indeterminata]

i. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log^2 n}{n\sqrt{n}}$ [convergente]

j. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)$ [divergente a $+\infty$]

k. $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n \log n} - \frac{1}{(n+1) \log(n+1)} \right)$ [convergente]

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n + 5^n}{n!}$ [convergente]
- m. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\log n)^n}{n!}$ [convergente]
- n. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$ [divergente a $+\infty$]
- o. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{1+n} - n}{n^\alpha}$ [conv. se e solo se $\alpha > 2$.]
- p. $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\log(1+\alpha)}$ [conv. se $\alpha > e - 1$, altrimenti div.]
- q. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n n!}{n^n}$ [conv. se $\alpha < e$, div. se $\alpha > e$]

2. [G] Dire se convergono le serie seguenti

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n+2}$ [sì]
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)$ [sì]
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n+1}$ [sì]
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^3}$ [sì]
5. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$ [sì]
6. $\sum_{n=0}^{+\infty} \tan\left(\frac{n}{1+n^3}\right)$ [sì]
7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ [sì]
8. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n!}$ [sì]
9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}$ [sì]
10. $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sin(\sin n))^n$ [sì]
11. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{\binom{2n}{n}}$ [no]

12. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\sqrt{n}}{2^n}$ [si]
13. $\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)$ [si]
14. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\binom{3n}{n}}$ [si]
15. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$ [si]
16. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, dove $a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ non è un cubo} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{se } n \text{ è un cubo} \end{cases}$ [si]
17. $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-\sqrt{n}}$ [si]
18. $\sum_{n=1}^{+\infty} (n!)^{-1/n}$ [no]

3. [G] Trovare la somma delle serie seguenti (tratto da Pietro Mengoli: *Novae quadraturae arithmeticae*, 1651)

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(an+b)(a(n+1)+b)}$, supponendo $an+b \neq 0$ per tutti i numeri naturali n [$\frac{1}{ab}$]
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$ [$\frac{1}{12}$]
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1} \dots a_{n+7}}$ dove $a_k = ak + b$, supponendo $a_k \neq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ [$\frac{1}{7a a_0 a_1 \dots a_6} = \frac{1}{7ab(a+b) \dots (a+6a)}$]
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ [$\frac{3}{4}$]
5. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_{n+s} - b_n}{b_n b_{n+1} \dots b_{n+s}}$ dove b_n è una successione crescente con $b_n > 0$ e $\lim_n b_n = b$. [$\frac{b^s - b_0 b_1 \dots b_{s-1}}{b^s b_0 b_1 \dots b_{s-1}}$]

4. Discutere la convergenza delle serie:

- (a) $\sum_n \frac{1}{(2n+1)!}$ [converge]
- (b) $\sum_n \frac{n}{2^n}$ [converge]
- (c) $\sum_n \frac{3^n}{n^2}$ [diverge a $+\infty$]

- (d) $\sum_n \frac{n^2}{n!}$ [converge]
- (e) $\sum_n n^2 \frac{2^{n+1}}{3^n}$ [converge]
- (f) $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ [diverge a $+\infty$]
- (g) $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n(n^3+1)}}$ [converge]
- (h) $\sum_n \frac{1+2+\dots+n}{n^3}$ [diverge a $+\infty$]
- (i) $\sum_n \left(\frac{1}{2}\right)^{n!}$ [converge]
- (j) $\sum_n \left(\frac{1}{n^{3+(-1)^n}}\right)$ [converge]
- (k) $\sum_n \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^2}$ [converge]
- (l) $\sum_n \frac{n!}{(2n)!}$ [converge]

5. Calcolare la somma delle seguenti serie telescopiche:

- (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$ [1]
- (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1/2}{n^2(n+1)^2}$ [1/2]
- (c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$ [3/4]

6. Sia $x > 0$. Dalla somma della serie geometrica si deduce che

$$x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{x}{1-x}$$

e

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1},$$

quindi sommando si ottiene

$$\dots + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{x}{x-1} + \frac{x}{1-x} = 0.$$

Dove è l'errore?

[La prima converge per $|x| < 1$, la seconda per $|x| > 1$]

7. Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri positivi tali che la serie $\sum_n a_n^2$ sia convergente e si abbia

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad \text{per ogni } n > 1.$$

Dimostrare che la serie $\sum_n a_n$ è convergente.

[$a_n \rightarrow 0$, $a_n > 0$, quindi a_n non può essere crescente; sia k tale che $a_k < a_{k-1}$. Per $n > k$ si ha

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \dots \frac{a_k}{a_{k-1}} a_{k-1} < \left(\frac{a_k}{a_{k-1}} \right)^{n-k+1} a_{k-1}$$

$\sum_n a_n$ converge per confronto con la serie geometrica.]

8. Sia $\sum_n a_n$ una serie convergente. Dimostrare che anche la serie $\sum_n a_n^2$ è convergente.

[Allora $a_n \rightarrow 0$, quindi $a_n^2 < a_n$ e per confronto la serie $\sum_n a_n^2$ è convergente.]

È vero che se $\sum_n a_n^2$ è convergente anche $\sum_n a_n$ è convergente?

[No, si veda la serie armonica.]

9. Stabilire se le seguenti implicazioni sono vere per ogni successione $(b_n)_n$ di numeri reali:

$$b_n \rightarrow 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} (b_{n+1} - b_n) \quad \text{converge}$$

$$(b_n)_n \text{ monotona e } b_n \rightarrow 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |b_{n+1} - b_n| \quad \text{converge}$$

$$b_n \rightarrow 0^+ \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |b_{n+1} - b_n| \quad \text{converge.}$$

10. (Teorema dei carabinieri per serie) Siano $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ e $(c_n)_n$ tre successioni di numeri reali (senza ipotesi di segno). Supponiamo che $a_n \leq b_n \leq c_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che le serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n c_n$ convergano. Dimostrare che anche la serie $\sum_n b_n$ converge.